

С.Т. Суржиков || Тепловое излучение газов и плазмы

С.Т. Суржиков

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

С.Т. Суржиков

**Тепловое
излучение
газов и плазмы**

Российская академия наук
Институт проблем механики

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Тепловое излучение газов и плазмы

Редакционная коллегия:

академик **Д.М. Климов**
академик **А.С. Коротеев**
профессор **С.А. Медин**
профессор **Г.Э. Норман**
член-кор. РАН **Ю.В. Полежаев**
профессор **С.Т. Суржииков**
член-кор. РАН **И.Б. Федоров**
академик **В.Е. Фортов**
академик **Г.Г. Черный**

Москва
Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана
2004

Российская академия наук
Институт проблем механики

С.Т. Суржиков

**Тепловое
излучение
газов и плазмы**

Москва
Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана
2004

УДК 533
ББК 22.365
С 90

Отделение энергетики, машиностроения, механики
и процессов управления
Программа фундаментальных исследований

Рецензенты: *д-р физ.-мат. наук, проф. С.А. Лосев,*
д-р физ.-мат. наук, проф. Ю.П. Райзер

Суржиков С.Т.

С 90 Тепловое излучение газов и плазмы. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, – 2004. – 544 с.: 120 ил. (Компьютерные модели физической механики).

ISBN 5-7038-2605-5 (Ч.1)
ISBN 5-7038-2604-7

Введены основные понятия теории переноса лучистой энергии в горячих газах и низкотемпературной плазме. Представлена формулировка феноменологических коэффициентов и функций теории переноса, а также их связь с квантовыми характеристиками. Приведены основные законы теории переноса теплового излучения. Сформулировано уравнение переноса и даны наиболее часто употребляемые его частные формы. Обсуждаются особенности применения моделей элементарных радиационных процессов к построению феноменологических моделей переноса излучения. Представлены методы интегрирования уравнения переноса излучения по частоте и по пространственным переменным.

Для научных сотрудников и инженеров в области теплообмена излучением, физической газовой динамики и физики низкотемпературной плазмы, а также для студентов и аспирантов физико-технических специальностей университетов.

УДК 533
ББК 22.365

ISBN 5-7038-2605-5 (Ч.1)
ISBN 5-7038-2604-7

© С.Т. Суржиков, 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	14
Глава 1. Основные характеристики теории переноса теплового излучения	17
1.1. Спектральная интенсивность излучения и основные усредненные характеристики теплового излучения	17
1.2. Феноменологические коэффициенты теории переноса теплового излучения	21
1.3. Радиационные характеристики поверхностей.....	24
1.4. Спектральные, групповые и интегральные характеристики теории переноса теплового излучения	30
Глава 2. Фундаментальные законы теплового излучения. Термодинамическая формулировка.	33
2.1. Равновесное тепловое излучение	33
2.2. Принцип детального равновесия	34
2.3. Абсолютно черное тело. Закон Планка	34
2.4. Функции излучения абсолютно черного тела	37
2.5. Следствия из закона Планка	38
2.6. Закон Кирхгофа	40
2.7. Закон Ламберта	42
2.8. Закон Бугера	42
2.9. Термодинамика равновесного теплового излучения	43
2.10. Приближение локального термодинамического равновесия ..	47
Глава 3. Уравнение переноса селективного теплового излучения 48	
3.1. Уравнение переноса теплового излучения. Общие и частные формулировки	48
3.2. Формальное решение уравнения переноса	53

3.3. Формулировка уравнения переноса в различных одномерных геометриях	62
3.3.1. Прямоугольная декартова система координат. Одномерный случай (бесконечный плоский слой)	62
3.3.2. Сферическая система координат. Одномерный случай (сферическая симметрия)	63
3.3.3. Цилиндрическая система координат. Одномерный случай (цилиндрическая симметрия)	64
3.4. Уравнения переноса излучения в трехмерном случае	65
3.4.1. Прямоугольная декартова система координат	66
3.4.2. Сферическая система координат	66
3.4.3. Цилиндрическая система координат	67
3.5. Интегральная форма уравнения переноса излучения для произвольной геометрии	68
3.6. Интегральная форма уравнения переноса излучения для плоского слоя применительно к задачам физики звездных фотосфер. Задача Милна	71
3.7. Феноменологический вывод уравнения переноса излучения...	73
3.8. Граничные условия, формулируемые для уравнения переноса излучения	77
Глава 4. Основные понятия теории моделирования радиационных процессов	82
4.1. Феноменологическое введение квантовых понятий в теорию переноса излучения	82
4.1.1. Коэффициенты Эйнштейна	83
4.1.2. Связь между коэффициентами Эйнштейна	84
4.1.3. Скорости элементарных радиационных процессов	84
4.1.4. Связь феноменологических коэффициентов поглощения и излучения с коэффициентами Эйнштейна	86
4.1.5. Приближение полного перераспределения по частотам	90
4.1.6. Спектральный объемный коэффициент поглощения с поправкой на вынужденное излучение	90
4.1.7. Спектральная функция источников в линии	91
4.2. Общие сведения о способах расчета вероятностей квантовых переходов	92

4.3. Иерархия моделей описания радиационных процессов	93
4.3.1. Модели элементарных радиационных процессов	96
4.3.2. Модели статистических радиационных процессов	99
4.3.3. Феноменологические модели радиационного переноса	101
Глава 5. Модели и методы переноса селективного теплового излучения в условиях ЛТР	104
5.1. Приближения предельных оптических толщин	105
5.1.1. Приближение оптически тонкого слоя	106
5.1.2. Приближение оптически толстого слоя	107
5.2. Методы интегрирования уравнения переноса по угловым переменным	108
5.2.1. Модель плоского слоя	110
5.2.2. Метод Шварцшильда – Шустера	128
5.2.3. Диффузионное приближение	132
5.2.4. Метод Эддингтона	137
5.3. Метод моментов	140
5.4. Метод эффективных излучательных способностей	145
5.4.1. Метод эквивалентного излучающего объема	145
5.4.2. Метод произвольных от полусферических испускательных способностей	146
Глава 6. Методы сферических гармоник (P_N-метод).....	147
6.1. Применение метода сферических гармоник к решению задачи переноса излучения в плоском слое	148
6.2. Применение метода сферических гармоник к решению задачи переноса излучения в осесимметричной слое	155
6.3. Конечно-разностные схемы численного интегрирования двумерных уравнений P_1 -приближения метода сферических гармоник	165
6.4. Особенности формулировки граничных условий для методов сферических гармоник	180
6.4.1. Граничные условия Марка	180
6.4.2. Граничные условия Маршака	181
6.5. Формулировка уравнений P_1 -приближения метода сферических гармоник для произвольной геометрии	183

Глава 7. Метод конечного объема для решения задач теории переноса теплового излучения	190
7.1. Общие понятия	190
7.2. Понятие о консервативных и неконсервативных численных схемах	191
7.3. Формальное описание метода	193
7.4. Расчетные соотношения метода конечного объема в двумерной геометрии	194
7.4.1. Расчетные формулы для потоков при использовании потоковой аппроксимации и централизованного в объеме метода конечного объема	196
7.4.2. Расчетные формулы для потоков при использовании потоковой аппроксимации и централизованного в узлах метода конечного объема	197
7.4.3. Расчетные формулы для потоков при использовании центрально-разностной аппроксимации и централизованного в объеме метода конечного объема	198
7.4.4. Расчетные формулы для потоков при использовании центрально-разностной аппроксимации и централизованного в узлах метода конечного объема	200
7.4.5. Представление производных в методе конечного объема..	203
7.5. Расчетные соотношения метода конечного объема в трехмерной геометрии	206
7.5.1. Вводные замечания	206
7.5.2. Расчет объема трехмерной ячейки	207
7.6. Формулировка уравнений метода конечного объема применительно к двумерной задаче переноса теплового излучения в области произвольной геометрии	209
7.6.1. Вариант централизованного в объеме метода конечного объема, основанный на центрально-разностной аппроксимации	209
7.6.2. Вариант централизованного в объеме метода конечного объема (МКО), основанный на потоковой аппроксимации	214
Глава 8. Методы дискретных ординат, характеристик и дискретных направлений	223
8.1. Одномерная формулировка	223

8.2. Трехмерная формулировка	227
8.3. Расчет переноса излучения без учета эффектов светорассеяния	233
8.4. Метод характеристик	235
8.4.1. Метод характеристик для одномерной сферической геометрии	235
8.4.2. Метод характеристик с интерполяцией	237
8.4.3. Консервативный метод характеристик с интерполяцией ...	239
8.5. S_n -метод	241
8.5.1. Применение S_n -метода для решения одномерных задач ..	242
8.5.2. Применение S_n -метода для решения двумерных задач.....	243
8.5.3. DS_n -метод	245
8.6. Методы непосредственного численного интегрирования угловой зависимости интенсивности излучения	246
Глава 9. Поточковые методы	258
9.1. Методы модифицированных сферических гармоник. DP_L -методы	259
9.2. Метод полумоментов	260
9.3. Итерационные методы решения уравнения переноса	270
9.3.1. Метод последовательных приближений	270
9.3.2. Аналитические итерационные методы	271
9.3.3. Вариационные методы решения уравнения переноса излучения	272
9.4. Метод квадромоментов	272
Глава 10. Статистическое моделирование переноса теплового излучения в неоднородных объемах светорассеивающих горячих газов	279
10.1. Общие понятия о принципах имитационного моделиро- вания распространения излучения в рассеивающей среде.....	281
10.2. Исходная информация имитационного моделирования	284
10.3. Расчет случайных чисел распределенных по произвольным законам	286

10.4. Моделирование изотропного случайного вектора	287
10.5. Дискретизация исследуемого объема	289
10.6. Определение начальных координат траекторий	291
10.7. Построение прямолинейного участка траектории в замкнутой области	293
10.8. Моделирование длины свободного пробега	294
10.9. Розыгрыш столкновений	296
10.10. Моделирование процессов поглощения и рассеяния	296
10.11. Регистрация конца историй фотонов	301
10.12. Регистрация актов поглощения	301
10.12.1. Регистрация частиц, покидающих исследуемый объем через цилиндрическую поверхность	302
10.12.2. Регистрация фотонов на плоскостях $z = 0$ и $z = H$	304
10.13. Определение спектральной силы излучения по результатам моделирования	304
10.14. Определение плотностей радиационных потоков	305
10.15. Особенности имитационного моделирования в твердых и жидких средах	305
10.16. Оценка достоверности имитации и некоторые другие алгоритмы статистического моделирования	308
Глава 11. Методы учета спектральной зависимости коэффициентов поглощения в теории теплообмена излучением	315
11.1. Классификация спектральных оптических моделей	316
11.2. Среднеинтегральные коэффициенты поглощения	325
Глава 12. Методы интегрирования уравнения переноса по частоте электромагнитного излучения	329
12.1. Обзор методов интегрирования уравнения переноса по частоте в задачах теплообмена излучением и радиационной газовой динамики	329
12.2. Модели разделения переменных интегрирования	338

12.2.1. Приближение Милна – Эддингтона	338
12.2.2. Модель разделяющихся переменных в коэффициенте поглощения	339
12.2.3. Методы разделения переменных Шмыглевского	340
12.2.4. Моментный метод, использующий в качестве независимой переменной коэффициент поглощения	341
12.2.5. Методы лебегова усреднения	341
12.3. Групповые модели	342
12.3.1. Основные типы групповых моделей	342
12.3.2. Метод группового усреднения	349
12.4. Line-by-line модели	349
12.4.1. Расчет параметров атомных линий	351
12.4.2. Расчет коэффициентов поглощения в молекулярных линиях	355
Глава 13. Модели нелокального усреднения	358
13.1. Квазидиффузионный метод Гольдина	359
13.1.1. Уравнения метода квазидиффузии в случае одномерной плоской геометрии	359
13.1.2. Уравнения метода квазидиффузии в случае двумерной геометрии	362
13.1.3. Поточковый вариант метода квазидиффузии	364
13.2. Многогрупповой квазидиффузионный метод	366
13.3. Интегральное квазидиффузионное приближение	368
13.4. Метод усреднения уравнения переноса Анфимова и Шари ...	370
13.5. Метод усредненных уравнений переноса Немчинова	374
13.6. Метод усредненных парциальных характеристик	378
13.7. Метод нелокальных интегральных характеристик для больших градиентов температуры и химического состава	383
13.8. Метод эффективных сечений	386
13.9. Метод эффективных полумоментных характеристик	390
13.10. Метод эффективных квадромоментных характеристик	392
Глава 14. Модели полос. Статистические модели	394
14.1. Общие понятия	395

14.2. Статистический подход к расчету переноса теплового излучения в спектральных линиях	400
14.3. Усреднение параметров спектральных линий в неоднородных объемах сплошной среды. Приближение Кертиса – Годсона	404
14.4. Эквивалентная ширина и средняя поглощательная способность групп атомных линий в модельном представлении	412
14.5. Эквивалентная ширина и поглощательная способность полос вращательных линий при электронно-колебательно-вращательных переходах	416
14.6. Применение статистических моделей к расчету переноса селективного излучения в плоских слоях низкотемпературной плазмы	420
14.7. Математическая технология обработки информации по атомным линиям для расчета температурных зависимостей групповых функций	427
14.8. Перенос излучения в объемах произвольной геометрии с учетом спектральных линий	428
14.9. Макростатистическая модель для описания теплообмена излучением с учетом спектра колебательных полос	432
14.9.1. Формулировка статистических модели молекулярных линий применительно к одной линии	434
14.9.2. Формулировка макростатистической модели для однородного оптического пути	440
14.9.3. Формулировка макростатистической модели для неоднородного оптического пути	442
14.9.4. Расчет переноса излучения методом полумоментов совместно с макростатистической моделью	446
14.9.5. Результаты расчетов интегральных радиационных потоков в плоских неоднородных слоях газов, содержащих молекулы H_2O и CO_2	452
14.10. Расчет имитационными методами Монте-Карло переноса излучения с учетом вращательных линий молекулярного спектра	463

14.10.1. LBL-метод	466
14.10.2. Гибридный метод статистического моделирования	467
14.10.3. Метод усредненных коэффициентов линейчатого поглощения	475
14.10.4. LBL-метод с малым числом моделируемых траекторий	476
14.10.5. Тестовые расчеты	478
14.10.6. Результаты расчетов спектральной направленной излучательной способности	483
14.11. Пространственная модель излучения струй продуктов сгорания	492
Список литературы	514
Предметный указатель	538

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория переноса теплового излучения своими корнями уходит в начало 20-го века, когда в эпоху революционных открытий в теории атома, начала интенсивно развиваться теоретическая астрофизика.

Уже в первой половине прошлого века было известно, что большинство задач теории переноса излучения сводится к решению интегро-дифференциальных и интегральных уравнений и, в наиболее простых случаях, к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных (как правило, эллиптического типа). Математически задача оказалась чрезвычайно сложной и основные усилия математиков, физиков и астрофизиков первой половины прошлого века были сосредоточены на создании методов их решения.

Теоретической основой проблемы переноса излучения является интегро-дифференциальное *уравнение переноса излучения*, которое формулируется относительно спектральной интенсивности излучения – скалярной функции пространственных и угловых переменных, частоты электромагнитного излучения и времени. Два наиболее известных способа вывода уравнения переноса излучения как феноменологического закона сохранения электромагнитной энергии и как уравнения Больцмана для фотонного газа, непосредственно связаны с корпускулярно-волновым дуализмом трактовки физической природы теплового излучения. Анализ области применимости уравнения переноса дано в специальной литературе (Апресян Л.А. и др., 1983; Гудмен Дж., 1988; Исимару А., 1981; Сэмпсон Д., 1969; Адзерихо К.С., 1975; Оцистик М.Н., 1976). Принципиально важным результатом явилось установление связи феноменологических коэффициентов погло-

щения и рассеяния, входящих в это уравнение, с квантовыми понятиями, основанными на квантовых коэффициентах Эйнштейна.

В середине прошлого века совместными усилиями физиков и математиков было показано, что уравнение переноса нейтронов в ядерных реакторах является тем же самым уравнением, но с особой ролью поведения энергии нейтронов при столкновении с элементами среды. Такие уравнения были выведены в работах (Галанин А.Д., 1957; Murray R.L., 1957; Weinberg A.M. et al., 1958). Книги, давно ставшие классическими для специалистов по переносу излучения (Марчук Г.И., 1961; Дэвисон Б., 1960; Соболев В.В., 1967), не только подвели итог развитию теории переноса излучения первой половины двадцатого века, но и во многом определили направления дальнейших исследований.

Параллельно с использованием в астрофизике и физике ядерных реакторов теория переноса излучения получила развитие применительно к задачам атмосферной оптики (Гуди Р., 1966; Краснопольский В.А., 1987), физики атмосферы, водоемов и льда (Кондратьев К.Я., 1977; Маров М.Я. и др., 1987; Хргиан А.Х., 1986; Бояринов П.М. и др., 1991; Красс М.С. и др., 1990), теплообмена и теплоэнергетики (Блох А.Г., 1984; Васильев А.П. и др., 1967; Исаев С.А. и др., 1979; Жуков М.Ф. и др., 1987).

Особое место теория переноса излучения занимает в комплексе наук, основополагающих для аэрокосмической техники. Излучение струй продуктов сгорания любых типов двигателей, теплообмен в энергетических устройствах, тепловая защита межпланетных и возвращаемых на Землю космических аппаратов – это лишь малый перечень задач, остающихся до настоящего времени одними из главных в проблеме создания образцов новой техники.

Необходимо отметить еще одну принципиальную особенность современной теории переноса теплового излучения. Это тесная связь с интенсивно развивающейся компьютерной техникой и разнообразными информационно-компьютерными технологиями. Основные проблемы сегодняшнего дня – это решение многомерных задач переноса селективного теплового излучения с

произвольным соотношением элементарных процессов испускания, поглощения и рассеяния.

На содержание данной книги наложили отпечаток научные и педагогические пристрастия автора, а именно многолетняя работа в области физической механики и аэрокосмической техники, а также опыт преподавания в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана и в Московском физико-техническом институте. Поэтому рассмотрение многих фундаментальных вопросов теории переноса излучения, как правило, завершается изложением способов решения практических задач. По мнению автора, это должно представлять наибольший интерес для широкого круга научных сотрудников и инженеров, работающих в области теплообмена излучением, физической механики и физики низкотемпературной плазмы, а также для студентов и аспирантов физико-технических специальностей университетов.

Данная книга является далеко не первой по теории переноса излучения, как среди отечественных, так и, в особенности, среди зарубежных изданий (см. список литературы). Однако читатель найдет в ней ряд новых методов и подходов к расчетно-теоретическому решению задач теплообмена излучением, получивших распространение в практике исследований.

Автор выражает глубокую благодарность академикам Д.М. Климову, Г.Г. Черному и чл.-корр. РАН Ю.В. Полежаеву за многолетнюю поддержку работ в области физической механики и теплообмена излучением.

С благодарностью автор вспоминает совместную работу с А.П. Будником, В.Я. Гольдиным, В.В. Горским, В.А. Гореловым, В.Н. Елисеевым, А.Ю. Киреевым, С.А. Лосевым, В.М. Николаевым, Ю.А. Пластининым, Ю.П. Райзером, В.А. Товстоногом, Б.А. Хмелининым и С.В. Резником.

Автор выражает признательность сотрудникам издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана: директору Т.И. Попенченко и Г.А. Ниловой, внесшим большой вклад в создании этой книги. Особенно, автор благодарит Т.А. Суржикову, выполнившую компьютерную верстку и макетирование книги.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

1.1. Спектральная интенсивность излучения и основные усредненные характеристики теплового излучения

Основу определения всех характеристик теории переноса излучения составляет фундаментальное понятие спектральной интенсивности излучения.

Спектральная интенсивность излучения – количество энергии теплового излучения, проходящее в единицу времени через единичную площадку, которая расположена перпендикулярно направлению распространения излучения Ω , внутри единичного телесного угла с осью Ω , в единичном интервале частот, включающем частоту ν

$$J_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega, t) = \lim_{\Delta F, \Delta \Omega, \Delta \nu, \Delta t} \frac{\Delta E_{\nu}}{\Delta F \cdot \cos \theta \cdot \Delta \Omega \cdot \Delta \nu \cdot \Delta t}, \quad (1.1)$$

где ΔE_{ν} – количество энергии теплового излучения, переносимого в спектральном диапазоне $\Delta \nu$ (количество спектральной электромагнитной энергии); ΔF – элементарная площадка с вектором нормали \mathbf{n} ; $\cos \theta = (\mathbf{n} \cdot \Omega)$; $\Delta \Omega$ – элементарный телесный угол с осью Ω ; $\Delta \nu$ – элементарный спектральный диапазон; Δt – элементарный отрезок времени.

Термин «элементарный» используется здесь с целью подчеркнуть, что в пределах элементарной площадки, телесного угла, спектрального диапазона и отрезка времени – характеристики излучения изменяются пренебрежимо мало, что допускает возможность вычисления предела в (1.1).

В данном определении спектральной интенсивности излучения понятие энергии теплового излучения введено феноменологически. Физическая природа теплового излучения, как явления распространения квантов электромагнитного излучения, была установлена классиками классической и квантовой физики на стыке XIX и XX веков. Она подробно обсуждается в современных курсах общей физики (Сивухин Д.В., 1985; Савельев И.В., 1973; Тамм И.Е., 1966; Матвеев А.Н., 1985; Фейнман Р. и др., 1972). Известно, что явление распространения теплового излучения правильно описываются в рамках волновой физической теории. Однако для изучения взаимодействия теплового излучения и вещества необходимы корпускулярные (квантовые) представления. Поэтому полная теория переноса теплового излучения является корпускулярно-волновой. Это находит свое отражение в альтернативных формулировках спектральной интенсивности излучения.

Связь спектральной интенсивности излучения с характеристиками волновой теории устанавливается посредством электромагнитной теории для плоской волны, характеризующейся векторами спектральной напряженности магнитного \mathbf{H}_v и электрического \mathbf{E}_v полей. Введено понятие вектора Умова – Пойнтинга

$$\mathbf{S}_v = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_v \times \mathbf{H}_v],^*$$
(1.2)

который определяет количество спектральной энергии, проходящей в единицу времени через единичную площадку в направлении, перпендикулярном векторам \mathbf{E}_v и \mathbf{H}_v (в соответствии с правилом правой руки). Поэтому

$$J_v(\mathbf{r}, \Omega, t) = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{S_v}{\Delta\Omega} .$$
(1.3)

Соотношения (1.2) и (1.3) связывают спектральную интенсивность излучения с уравнениями Максвелла электромагнитной теории.

* В Гауссовой системе единиц.

Связь спектральной интенсивности излучения с характеристиками корпускулярной теории устанавливается посредством функции распределения фотонного газа $f_v(\mathbf{r}, \Omega)$, которая определяется из того, что величина

$$f_v(\mathbf{r}, \Omega, t) dv d\Omega dV \quad (1.4)$$

есть число фотонов, в момент времени t внутри телесного угла $d\Omega$ с осью Ω в объеме dV с координатой \mathbf{r} в интервале частот dv , включающем частоту ν . Каждый фотон обладает энергией $h\nu$ и скоростью c , поэтому

$$J_v(\mathbf{r}, \Omega, t) = h\nu c f_v(\mathbf{r}, \Omega, t). \quad (1.5)$$

Соотношения (1.4) и (1.5) связывают спектральную интенсивность излучения с уравнением Больцмана для фотонного газа. Установление связи спектральной интенсивности излучения с количеством энергии, переносимой фронтом электромагнитной волны, с одной стороны, и с функцией распределения фотонного газа, с другой стороны, конечно, ни в коей мере не решает проблему корпускулярно-волнового дуализма, а лишь позволяет сопоставить теорию переноса теплового излучения с другими фундаментальными теориями в тех случаях, когда один из подходов становится более адекватным. Поскольку главное уравнение теории переноса теплового излучения (далее – уравнение переноса излучения или просто уравнение переноса) формулируется, как правило, именно для спектральной интенсивности излучения (см. главу 3), то неудивительно, что для ряда решаемых задач остро встает вопрос о справедливости этого уравнения (см., например, Адзери-хо, К.С., 1972; Зигель Р. и др., 1975).

Как следует из определения (1.1), спектральная интенсивность излучения есть скалярная функция трех пространственных переменных (\mathbf{r}), двух угловых переменных (Ω) и времени (t). Усреднение или интегрирование этой функции по некоторым из перечисленных переменных приводит к появлению в теории переноса теплового излучения ряда интегралов, имеющих наглядное физическое толкование и использование которых часто значи-

тельно упрощает решение практически важных задач. Рассмотрим некоторые из этих интегралов.

Спектральная объемная плотность энергии излучения – это количество лучистой (электромагнитной) энергии, заключенное в единице объема в единичном спектральном интервале частот

$$U_v(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{\Omega=4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega. \quad (1.6)$$

Вектор плотности спектрального потока излучения определяется интегралом

$$\mathbf{W}_v(\mathbf{r}, t) = \int_{\Omega=4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega, t) \Omega d\Omega. \quad (1.7)$$

Плотность полного спектрального потока излучения в направлении \mathbf{n} – это количество лучистой (электромагнитной) энергии, распространяющейся во всех направлениях в пределах полного сферического телесного угла в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению \mathbf{n} в единичном интервале частот

$$W_{v,n}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W}_v(\mathbf{r}, t)) = \int_{\Omega=4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega, t) (\mathbf{n} \cdot \Omega) d\Omega. \quad (1.8)$$

Плотность одностороннего спектрального потока излучения в направлении \mathbf{n} – это количество лучистой (электромагнитной) энергии, которая распространяется в направлениях, характеризующихся знаком постоянством скалярного произведения $(\mathbf{n} \cdot \Omega)$, и проходит в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению \mathbf{n} , в единичном интервале частот

$$W_{v,n}^+(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W}_v(\mathbf{r}, t))_{(\mathbf{n} \cdot \Omega) \geq 0} = \int_{(\mathbf{n} \cdot \Omega) \geq 0} J_v(\mathbf{r}, \Omega, t) (\mathbf{n} \cdot \Omega) d\Omega, \quad (1.9)$$

$$W_{v,n}^-(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W}_v(\mathbf{r}, t))_{(\mathbf{n} \cdot \Omega) \leq 0} = \int_{(\mathbf{n} \cdot \Omega) \leq 0} J_v(\mathbf{r}, \Omega, t) (\mathbf{n} \cdot \Omega) d\Omega. \quad (1.10)$$

Давление излучения – это результирующая величина импульса, действующего на единичную площадку произвольной поверхности. Давление излучения определяется тензором давления, компоненты которого

$$P_{v,i,j}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{\Omega=4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega, t) \Omega_i \cdot \Omega_j d\Omega, \quad (1.11)$$

где Ω_i, Ω_j – единичные векторы, задающие направление распространения излучения и выделенной элементарной площадки. В случае изотропного излучения

$$P_v^R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{3c} \int_{\Omega=4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega = \frac{1}{3} U_v(\mathbf{r}, t). \quad (1.12)$$

Другие характеристики переноса излучения, характеризующие, в частности, поляризацию излучения, представлены в работах (Адзерихо К.С., 1975; Оцисик М.Н., 1976; Блох А.Г. и др., 1991).

1.2. Феноменологические коэффициенты теории переноса теплового излучения

Для того чтобы описать процесс распространения теплового излучения в среде, необходимо ввести в теорию ряд функций, характеризующих взаимодействие излучения с веществом. Простейшим способом введения таких функций является феноменологическое определение коэффициентов переноса излучения, не избавляющим, однако, от необходимости квантового рассмотрения процессов этого взаимодействия.

Рассмотрим феноменологические определения ряда коэффициентов теории переноса излучения.

Спектральный объемный коэффициент поглощения излучения $k_v(\mathbf{r})$ – это доля падающего на элементарный объем излучения, поглощенная веществом на единице длины пути распространения излучения внутри этого объема.

Величина

$$\kappa_v(\mathbf{r}) J_v(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega$$

задает количество поглощенного веществом падающего излучения

$$J_v(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega$$

в единицу времени, в единичном объеме, в единичном интервале частот в пределах телесного угла $d\Omega$ с осью Ω .

Величина

$$\kappa_v(\mathbf{r}) \int_{\Omega=4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega \quad (1.13)$$

задает количество поглощенного веществом излучения, падающего на единичный объем со всех направлений в единицу времени, в единичном интервале частот.

Спектральный объемный коэффициент рассеяния излучения $\sigma_v(\mathbf{r})$ – это доля падающего на элементарный объем излучения в пределах телесного угла $d\Omega'$ с осью Ω' , рассеянная веществом во всех направлениях на единице длины пути распространения излучения.

Величина

$$\sigma_v(\mathbf{r}) J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) d\Omega' \quad (1.14)$$

задает количество рассеянного веществом во всех направлениях излучения, падающего на единичный объем в пределах телесного угла $d\Omega'$ с осью Ω' , в единицу времени, в единичном спектральном диапазоне.

Спектральный объемный коэффициент ослабления излучения $\beta_v(\mathbf{r})$ определяется как сумма спектральных объемных коэффициентов поглощения и рассеяния:

$$\beta_v(\mathbf{r}) = \kappa_v(\mathbf{r}) + \sigma_v(\mathbf{r}) . \quad (1.15)$$

Вероятность выживания кванта или альbedo однократного рассеяния задает долю рассеяния в ослаблении среды:

$$\tilde{\omega}_v(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_v(\mathbf{r})}{\kappa_v(\mathbf{r}) + \sigma_v(\mathbf{r})} = \frac{\sigma_v(\mathbf{r})}{\beta_v(\mathbf{r})}. \quad (1.16)$$

Спектральная индикатриса рассеяния $\gamma_v(\mathbf{r}, \Omega', \Omega)$ – это функция, характеризующая вероятность рассеяния по разным направлениям, такая, что величина

$$\frac{1}{4\pi} \gamma(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) d\Omega \quad (1.17)$$

определяет вероятность того, что излучение, падающее в направлении Ω' , будет рассеяно в пределах телесного угла $d\Omega$ с осью Ω .

Отсюда следует условие нормировки индикатрисы рассеяния

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} \gamma(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) d\Omega = 1, \quad (1.18)$$

которое утверждает, что с вероятностью, равной единице, падающее излучение будет рассеяно в телесном угле 4π .

С учетом выражений (1.14) и (1.17) определяется количество излучения

$$\sigma_v(\mathbf{r}) J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) d\Omega' \frac{1}{4\pi} \gamma(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) d\Omega,$$

рассеянного в пределах телесного угла $d\Omega$ с осью Ω , в единицу времени, в единичном спектральном диапазоне, при падении на единичный объем среды излучения

$$J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) d\Omega'$$

в пределах телесного угла $d\Omega'$ с осью Ω' .

Количество излучения, рассеянного в единицу времени, в единичном спектральном диапазоне в пределах телесного угла $d\Omega$ с осью Ω при падении на единичный объем излучения со всех направлений, определяется выражением

$$\frac{1}{4\pi} \sigma_v(\mathbf{r}) d\Omega \int_{\Omega'=4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) \gamma(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) d\Omega'.$$

Среда, взаимодействующая с излучением, не только поглощает или рассеивает его, но и испускает спектральное тепловое излучение, что определяет необходимость введения в теорию *собственной спектральной излучательной способности единицы объема* $J_v^{em}(\mathbf{r}, \Omega, t)$ – излучения, испускаемого единицей объема, в единицу времени, в единичном спектральном диапазоне, в единичном телесном угле, осью которого является Ω .

Собственная спектральная излучательная способность единицы объема считается изотропной функцией $J_v^{em}(\mathbf{r}, t)$ и часто называется также *спектральным объемным коэффициентом излучения*.

Построение теории переноса теплового излучения в линейном приближении, когда пренебрегают зависимостью коэффициентов переноса от интенсивности излучения, позволяет утверждать, что спектральное излучение, испускаемое единицей объема, в единицу времени, в единичном спектральном диапазоне, в единичном телесном угле, осью которого является направление Ω , состоит из собственного излучения и рассеянного излучения

$$J_v^{em}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \sigma_v(\mathbf{r}) \int_{\Omega'=4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) \gamma(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) d\Omega', \quad (1.19)$$

причем анизотропия спектрального излучения, испускаемого единичным объемом, обусловлена процессами рассеяния излучения.

1.3. Радиационные характеристики поверхностей

Значительная часть задач теории переноса теплового излучения связана с проблемой обмена энергией между излучающими, поглощающими и рассеивающими (отражающими) поверхностями, а также между средой и ограничивающими ее поверхностями. Исключительно важна также математическая проблема формулировки граничных условий для уравнения переноса излучения. Также как и для объема среды, взаимодействие электромагнитного излучения с поверхностью можно характеризовать как феноменологическими, так и квантовыми коэффициентами и функциями.

Рассмотрим определение наиболее важных феноменологических коэффициентов.

Спектральная индикатриса отражения

$$R_v(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) = \frac{dJ_v(\mathbf{r}, \Omega, t)}{J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) \cos\theta' d\Omega'} \quad (1.20)$$

определяет долю излучения $J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) \cos\theta' d\Omega'$, падающего под углом θ' к нормали единичной площадки, принадлежащей поверхности, в пределах телесного угла $d\Omega'$ с осью Ω' , отраженную в направлении Ω в единицу времени, в единичном спектральном диапазоне. В теории переноса теплового излучения именно спектральная индикатриса отражения характеризует оптические (электромагнитные) свойства поверхностей. Остальные функции определяются с ее использованием.

Спектральная интенсивность излучения $J_v(\mathbf{r}, \Omega, t)$, отраженного в заданном направлении Ω от единичной площадки, в единицу времени, в единичном телесном угле, определяется выражением

$$J_v(\mathbf{r}, \Omega, t) = \int_{\Omega'=2\pi} R_v(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) \cos\theta' d\Omega' \quad (1.21)$$

Спектральная направленно-полусферическая отражательная способность

$$\begin{aligned} \rho_v(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow 2\pi) &= \frac{\int_{\Omega=2\pi} dJ_v(\mathbf{r}, \Omega, t) \cos\theta d\Omega}{J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) \cos\theta' d\Omega'} = \\ &= \int_{\Omega=2\pi} R_v(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) \cos\theta d\Omega, \quad (1.22) \end{aligned}$$

где θ – угол между направлением отраженного луча и нормалью к единичной площадке. Эта величина определяет отношение энергии излучения, отраженного во всех направлениях, к величине энергии, падающей на поверхность в направлении Ω' .

Спектральная полусферически-направленная отражательная способность

$$\rho_v(\mathbf{r}; 2\pi \rightarrow \Omega) = \frac{\int_{\Omega'=2\pi} R_v(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) \cos\theta' d\Omega'}{\frac{1}{\pi} \int_{\Omega'=2\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) \cos\theta' d\Omega'} \quad (1.23)$$

определяет отношение энергии излучения отраженного в направлении Ω к энергии, падающей на поверхность во всех направлениях.

Спектральная полусферическая отражательная способность

$$\rho_v(\mathbf{r}) = \frac{\int_{\Omega'=2\pi} \rho_v(\mathbf{r}; \Omega' \rightarrow 2\pi) J_v(\mathbf{r}, \Omega') \cos\theta' d\Omega'}{\int_{\Omega'=2\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega') \cos\theta' d\Omega'} \quad (1.24)$$

определяет отношение отраженной энергии к падающей энергии.

Особый практический интерес представляют три частных случая, которые наиболее часто используются в практике формулировки граничных условий для задач переноса излучения.

Поверхность называется *диффузно-отражающей*, если интенсивность отраженного излучения одинакова по всем углам отражения в пределах полусферы и не зависит от угла падения.

Поверхность называется *зеркально-отражающей*, если падающий и отражающий лучи симметричны по отношению к нормали в точке падения, а телесный угол, в котором распространяется отраженное излучение, равен телесному углу, в пределах которого распространялось падающее излучение.

Поверхность называется *непрозрачной*, если она только поглощает и отражает излучение, но не пропускает его. Для непрозрачной поверхности вводится также несколько феноменологических характеристик.

Спектральная направленно-полусферическая поглощательная способность

$$\alpha_v(\mathbf{r}; \Omega') = \frac{dq_v}{J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) \cos\theta' d\Omega'} \quad (1.25)$$

где dq_v – количество энергии излучения, поглощенного единицей площадки поверхности в единицу времени, в единичном спектральном диапазоне; $J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) \cos\theta' d\Omega'$ – количество энергии излучения, падающего на единицу площадки поверхности с нормалью \mathbf{n} в единицу времени, в единичном спектральном диапазоне, в пределах телесного угла $d\Omega'$ с осью Ω' , расположенной под углом θ' к нормали \mathbf{n} .

Очевидно, что для непрозрачной поверхности

$$dq_v = J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) \cos\theta' d\Omega' - \rho_v(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow 2\pi) J_v(\mathbf{r}, \Omega', t) \cos\theta' d\Omega',$$

поэтому

$$\alpha_v(\mathbf{r}; \Omega') = 1 - \rho_v(\mathbf{r}; \Omega' \rightarrow 2\pi). \quad (1.26)$$

По аналогии со спектральной полусферической отражательной способностью (1.24) определяется *спектральная полусферическая поглощательная способность*

$$\alpha_v(\mathbf{r}) = \frac{\int_{\Omega'=2\pi} \alpha_v(\mathbf{r}; \Omega') J_v(\mathbf{r}, \Omega') \cos\theta' d\Omega'}{\int_{\Omega'=2\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega') \cos\theta' d\Omega'}. \quad (1.27)$$

Для непрозрачной поверхности

$$\alpha_v(\mathbf{r}) = 1 - \rho_v(\mathbf{r}). \quad (1.28)$$

Так как при любой температуре поверхности всегда может быть определена соответствующая этой температуре интенсивность излучения абсолютно черного тела, которая, к тому же, является максимально возможной, представляется очень удобным ввести нормировку излучательных способностей поверхностей.

Спектральной степенью черноты поверхности называется отношение спектральной плотности потока энергии, испускаемого данной поверхностью, к плотности потока энергии, испускаемого абсолютно черным телом при той же температуре.

Спектральная направленная степень черноты – это отношение спектральной интенсивности излучения, испускаемого по-

верхностью при температуре T в направлении Ω при частоте ν , к спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела $J_{b,\nu}[T(\mathbf{r})]$

$$\epsilon_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{J_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega)}{J_{b,\nu}[T(\mathbf{r})]}. \quad (1.29)$$

По закону Кирхгофа для непрозрачной поверхности (см. п.2.6) спектральная излучательная способность равна спектральной поглощательной способности, поэтому

$$\epsilon_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega) = \alpha_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega) = 1 - \rho_{\nu}(\mathbf{r}, 2\pi \rightarrow \Omega). \quad (1.30)$$

В большинстве практически важных случаев используется *спектральная полусферическая степень черноты*, которая определяется по формуле

$$\begin{aligned} \epsilon_{\nu}(\mathbf{r}) &= \frac{\int_{\Omega=2\pi} J_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega) \cos\theta d\Omega}{\int_{\Omega=2\pi} J_{b,\nu}[T(\mathbf{r})] \cos\theta d\Omega} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega=2\pi} \frac{J_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega)}{J_{b,\nu}[T(\mathbf{r})]} \cos\theta d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega=2\pi} \epsilon_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega) \cos\theta d\Omega. \end{aligned} \quad (1.31)$$

По закону Кирхгофа для непрозрачной поверхности

$$\epsilon_{\nu}(\mathbf{r}) = \alpha_{\nu}(\mathbf{r}) = 1 - \rho_{\nu}(\mathbf{r}). \quad (1.32)$$

В общем случае испускающей, отражающей и пропускающей излучение поверхности интенсивность излучения, распространяющегося от этой поверхности, состоит из трех составных частей: испущенного, отраженного и пропущенного (например, от внутреннего источника) излучения. Если решается задача о распространении излучения в объеме, ограниченном такой поверхностью, то пропущенное излучение добавляют к собственному излучению, полагая поверхность как бы непрозрачной. В этом случае *спектральная интенсивность эффективного излучения* (ϵ_{ν}) элемента непрозрачной поверхности в направлении Ω определяется по формуле

$$J_{v, \text{эи}}(\mathbf{r}, \Omega) = J_{v, \text{си}}(\mathbf{r}, \Omega) + J_{v, \text{ои}}(\mathbf{r}, \Omega) = \epsilon_v(\mathbf{r}, \Omega) J_{b, v}[T(\mathbf{r})] + \int_{\Omega'=2\pi} R_v(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) J_v(\mathbf{r}, \Omega') \cos \theta' d\Omega', \quad (1.33)$$

где $J_{v, \text{си}}(\mathbf{r}, \Omega)$ – спектральная интенсивность собственного излучения поверхности; $J_{v, \text{ои}}(\mathbf{r}, \Omega)$ – спектральная интенсивность отраженного излучения поверхности.

Интегрируя спектральную интенсивность эффективного излучения по всем направлениям, определяют *плотность спектрального потока эффективного излучения в направлении \mathbf{n} единицы площади поверхности*

$$W_{v, n, \text{эи}}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega=2\pi} J_{v, \text{эи}}(\mathbf{r}, \Omega) \cos \theta d\Omega, \quad (1.34)$$

где θ – угол между направлениями Ω и \mathbf{n} .

С учетом энергии излучения падающей на поверхность, *плотность спектрального потока результирующего излучения* данной поверхности определяется как энергия результирующего излучения, распространяющегося в полусфере, характеризуемой нормалью \mathbf{n} , отнесенная к единице площади поверхности, к единице спектрального диапазона и к единице времени

$$W_{v, n}(\mathbf{r}) = W_{v, n}^+(\mathbf{r}) - W_{v, n}^-(\mathbf{r}), \quad (1.35)$$

где

$$W_{v, n}^+(\mathbf{r}) = W_{v, n, \text{эи}}(\mathbf{r}),$$

$$W_{v, n}^-(\mathbf{r}) = \int_{\Omega'=2\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega') \cos \theta' d\Omega'.$$

Представленные формулы (1.20) – (1.35) позволяют решать задачи переноса излучения в объемах, ограниченных поверхностями с практически произвольными оптическими свойствами. Однако на практике, как правило, используют два типа поверхностей: зеркальную или диффузную (Оцисик М.Н., 1976).

1.4. Спектральные, групповые и интегральные характеристики теории переноса теплового излучения

Все характеристики переноса теплового излучения, определенные выше, относятся к единичному спектральному диапазону и называются *спектральными* характеристиками.

В качестве аргументов спектральной зависимости коэффициентов и функций в теории теплового излучения используются:

- *частота колебаний* ν – число полных колебаний электромагнитных волн за единицу времени. Измеряется в с^{-1} .
- *длина волны* λ – расстояние, на которое смещается поверхность одинаковой фазы волны за одно полное колебание, двигаясь со скоростью распространения электромагнитных волн в среде. Измеряется в ($\text{мкм} = 10^{-6} \text{ м}$), ($\text{Å} = 10^{-8} \text{ см}$) или ($\text{нм} = 10^{-9} \text{ м}$).
- *волновое число* ω – величина, обратная длине волны, то есть показывающая, сколько длин волн укладывается на единице длины. Измеряется в см^{-1} .
- *циклическая частота* $\omega_0 = 2\pi\nu$. Измеряется в рад/с.

Так как скорость света в вакууме c_0 и в диэлектрической среде c со спектральным показателем преломления n , различна, при установлении связи между единицами измерения спектральной зависимости необходимо конкретизировать условия распространения излучения.

При решении задач переноса теплового излучения в механике сплошной среды для целей перехода от одних единиц измерения к другим используется предположение о независимости показателя преломления n от частоты излучения, тогда связь между единицами измерения выражаются следующими соотношениями

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c_0}{n\lambda}, \quad d\nu = -\frac{c_0}{n\lambda^2} d\lambda,$$

$$\nu = c\omega = \frac{c_0}{n}\omega, \quad d\nu = \frac{c_0}{n} d\omega, \quad d\omega = -\frac{1}{\lambda^2} d\lambda.$$

Представленные дифференциальные соотношения между спектральными переменными следует использовать во всех слу-

чаях перехода от одних единиц измерения функций радиационного переноса к другим. Любое преобразование единиц измерения должно удовлетворять закону сохранения энергии для элементарного спектрального диапазона

$$J_\nu d\nu = -J_\lambda d\lambda, \quad J_\nu d\nu = J_\omega d\omega,$$

где $J_\nu, J_\lambda, J_\omega$ – спектральные интенсивности излучения, отнесенные к единичному диапазону частот, длин волн и волновых чисел.

Интегральные характеристики теплового излучения определяются по формуле

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu, \quad (1.36)$$

где F_ν – любая спектральная функция, введенная выше, а пределы интегрирования обычно заменяются границами спектрального диапазона, в котором интегрируется уравнение переноса.

Интегральные характеристики теории переноса теплового излучения в спектральных группах определяются по формуле

$$F_{\Delta\nu} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} F_\nu d\nu, \quad (1.37)$$

где F_ν – любая спектральная функция; ν_1, ν_2 – наименьшая и наибольшая границы спектрального диапазона $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$. В теории переноса теплового излучения часто используется термин *спектральная группа*, являющийся синонимом понятия *спектральный диапазон*.

Усредненные по спектральным группам (диапазнам) характеристики теории переноса теплового излучения называются *групповыми функциями*. Они рассчитываются по формуле

$$\bar{F}_{\Delta\nu} = \frac{F_{\Delta\nu}}{\Delta\nu}.$$

Традиционно весь спектральный диапазон, рассматриваемый в теории переноса теплового излучения, разделяется на три под-

диапазона: ультрафиолетовый, видимый и инфракрасный. Условные границы этих поддиапазонов даны в табл. 1.1.

Таблица 1.1

**Физическая классификация по диапазонам длин волн
теплового излучения**

Излучение	$\Delta\lambda$, мкм	$\Delta\lambda$, нм	$\Delta\lambda$, Å	$\Delta\omega$, см ⁻¹	$\Delta\nu$, с ⁻¹
Инфракрасное (ИК)	$3.0 \times 10^2 \div 7.6 \times 10^{-1}$	$3.0 \times 10^5 \div 7.6 \times 10^2$	$3.0 \times 10^6 \div 7.6 \times 10^3$	$3.3 \times 10^1 \div 1.32 \times 10^4$	$10^{12} \div 3.95 \times 10^{14}$
Видимое	$7.6 \times 10^{-1} \div 4.0 \times 10^{-1}$	$7.6 \times 10^2 \div 4.0 \times 10^2$	$7.6 \times 10^3 \div 4.0 \times 10^3$	$1.32 \times 10^4 \div 2.5 \times 10^4$	$3.95 \times 10^{14} \div 7.5 \times 10^{14}$
Ультрафиолетовое (УФ)	$4.0 \times 10^{-1} \div 3.0 \times 10^{-3}$	$4.0 \times 10^2 \div 3.0 \times 10^0$	$4.0 \times 10^3 \div 3.0 \times 10^1$	$2.5 \times 10^4 \div 3.3 \times 10^6$	$7.5 \times 10^{14} \div 10^{17}$

Следует иметь в виду, что границы спектральных областей в табл. 1.1 указаны приближенно. При этом весь диапазон теплового излучения составляет лишь малую часть шкалы электромагнитных волн, представляющих практический интерес в различных приближениях. Указанная шкала приведена в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Шкала электромагнитных волн

Область спектра	ν , с ⁻¹	ω , см ⁻¹	λ , мкм
Радиочастотная: длинноволновая	$10^3 \div 10^7$	$3.3 \times 10^{-8} \div 3.3 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{11} \div 3.3 \times 10^7$
коротковолновая	$10^7 \div 10^9$	$3.3 \times 10^{-4} \div 3.3 \times 10^{-2}$	$3 \times 10^7 \div 3.3 \times 10^5$
микроволновая	$10^9 \div 10^{12}$	$3.3 \times 10^{-2} \div 3.3 \times 10^1$	$3 \times 10^5 \div 3.3 \times 10^2$
Теплового излучения: инфракрасная	$10^{12} \div 3.95 \times 10^{14}$	$3.3 \times 10^1 \div 1.32 \times 10^4$	$3.0 \times 10^2 \div 7.6 \times 10^{-1}$
видимая	$3.95 \times 10^{14} \div 7.5 \times 10^{14}$	$1.32 \times 10^4 \div 2.5 \times 10^4$	$7.6 \times 10^{-1} \div 4.0 \times 10^{-1}$
ультрафиолетовая	$7.5 \times 10^{14} \div 10^{17}$	$2.5 \times 10^4 \div 3.3 \times 10^6$	$4.0 \times 10^{-1} \div 3.0 \times 10^{-3}$
Рентгеновская	$10^7 \div 10^{20}$	$3.3 \times 10^6 \div 3.3 \times 10^9$	$3.0 \times 10^{-3} \div 3.0 \times 10^{-6}$
Гамма-излучения	$> 10^{20}$	$> 3.3 \times 10^9$	$< 3.0 \times 10^{-6}$

Еще раз подчеркнем, что излагаемая ниже теория переноса теплового излучения имеет под собой физическое обоснование для спектрального диапазона теплового излучения.

ГЛАВА 2

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

2.1. Равновесное тепловое излучение

Феноменологическая теория переноса теплового излучения базируется на ряде фундаментальных законов, представленных в данном разделе. Определим основные фундаментальные понятия теории теплового излучения. Физическое обоснование приводимых утверждений дано в ряде фундаментальных трудов (Планк М., 1975; Шпольский Э.В., 1974; Спроул Р., 1974; Фриш С.Э., 1963) и в курсах общей физики.

Излучение, находящееся в некоторой области пространства в равновесии с окружающими телами, называется *равновесным*. *Равновесным* называется такое *состояние области*, адиабатически изолированной от окружающей среды, при котором объемная плотность энергии для любой точки области не меняется со временем, а термодинамические параметры, определяющие состояние любых двух точек, равны между собой. Заметим, что область может содержать среду, взаимодействующую с излучением.

При термодинамическом равновесии внутри области отсутствует результирующий теплообмен между любыми ее элементами.

При термодинамическом равновесии тел их *температуры* T одинаковы. Поэтому и излучение, находясь в равновесии с другими телами, имеет температуру T этих тел.

Равновесное тепловое излучение изотропно.

2.2. Принцип детального равновесия

Принцип детального равновесия формулируется следующим образом: каждому микропроцессу, протекающему в некотором направлении изменения термодинамических параметров в макроскопической системе, с равной степенью вероятности соответствует микропроцесс, идущий в обратном направлении.

2.3. Абсолютно черное тело. Закон Планка

Абсолютно черным называется тело, обладающее свойством полностью поглощать все падающее на него излучение любой частоты, не отражая и не пропуская его через себя.

Тело, находящееся в тепловом равновесии, испускает столько же излучения, сколько поглощает, следовательно, абсолютно черное тело при температуре T испускает максимальное количество энергии излучения на любой частоте.

Спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре T в вакууме определяется формулой (законом) Планка (рис. 2.1)

$$J_{b,\nu}^0(T) = \frac{2h\nu^3}{c_0^2 [\exp(h\nu/kT) - 1]} = \frac{1.472 \times 10^{-47} \nu^3}{\exp(4.8 \times 10^{11} \nu/T) - 1}, \quad (2.1)$$

где $J_{b,\nu}^0(T)$ – в эрг/(см²·ср); T – в К; ν – в с⁻¹;

$$J_{b,\lambda_0}^0(T) = \frac{2hc_0^2}{\lambda_0^5 [\exp(hc_0/\lambda_0 kT) - 1]} = \frac{119.25 \times 10^9}{\lambda_0^5 [\exp(1.44 \times 10^4/\lambda_0 T) - 1]},$$

где $J_{b,\lambda_0}^0(T)$ – в эрг/(см²·с·мкм·ср); T – в К; λ_0 – в мкм;

$$J_{b,\omega_0}^0(T) = \frac{2hc_0^2 \omega_0^3}{\exp(hc_0 \omega_0/kT) - 1} = \frac{119.25 \times 10^{-7} \omega_0^3}{\exp(1.44 \omega_0/T) - 1},$$

где $J_{b,\omega_0}^0(T)$ – в эрг·см/(см²·с·ср); T – в К; ω_0 – в см⁻¹.

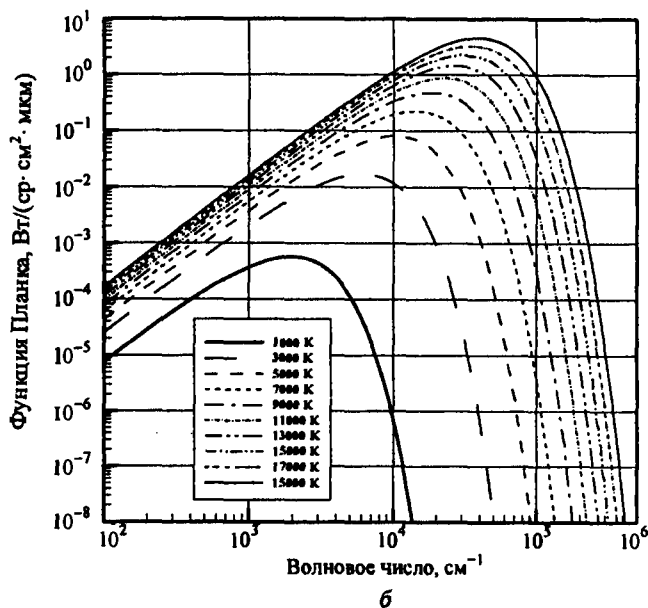
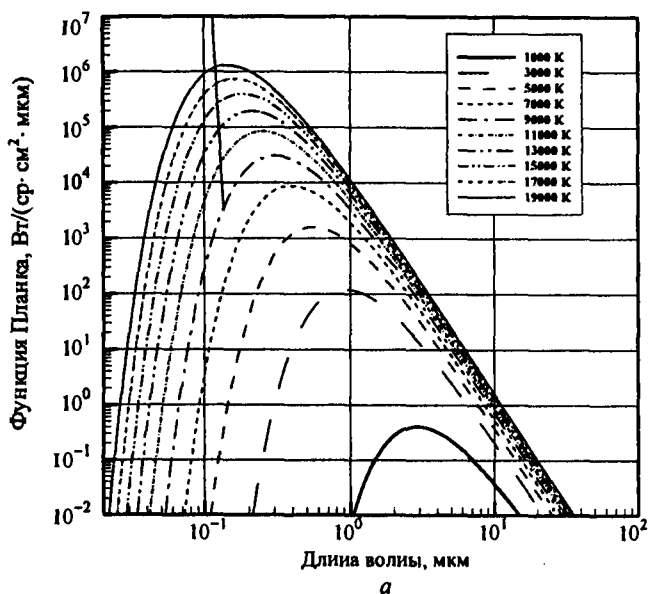


Рис. 2.1. Спектральная зависимость функции Планка от длины волны (а) и волнового числа (б) при разных температурах в типичной области теплового излучения

Интегральной интенсивностью излучения абсолютно черного тела называется интенсивность излучения, испускаемого абсолютно черным телом на всех частотах

$$J_b^0(T) = \int_0^{\infty} J_{b,v}^0(T) dv = \frac{\bar{\sigma} T^4}{\pi}, \quad (2.2)$$

где $\bar{\sigma} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c_0^2 h^3} = 5.6699 \times 10^{-5} \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{К}^4) =$
 $= 5.6699 \times 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4) =$
 $= 4.96 \times 10^{-8} \text{ ккал}/(\text{ч} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^4).$

Спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре T в диэлектрической среде с показателем преломления n определяется с учетом того, что скорость света в диэлектрической среде c связана со скоростью света в вакууме c_0 соотношением $c = c_0/n$, где n – показатель преломления диэлектрической среды (или просто показатель преломления), поэтому

$$J_{b,v}(T) = n^2 J_{b,v}^0(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}, \quad (2.3)$$

$$J_{b,\lambda}(T) = \frac{2hc_0^2}{n^2 \lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc_0}{n\lambda kT}\right) - 1 \right]} = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \right]},$$

$$J_{b,\omega}(T) = \frac{2hc_0^2 \omega^3}{n^2 \left[\exp\left(\frac{hc_0 \omega}{nkT}\right) - 1 \right]} = \frac{2hc^2 \omega^3}{\exp\left(\frac{hc\omega}{kT}\right) - 1}.$$

Следует иметь в виду, что в общем случае произвольных сред показатель преломления может зависеть от частоты и быть комплексной величиной. Применительно к теории теплообмена излучением этот вопрос подробно обсуждается Р. Зигелем и Дж. Хауэллом (1975).

Интегральная интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре T в диэлектрической среде с показателем преломления n определяется по интенсивности излучения абсолютно черного тела в вакууме при той же температуре

$$J_b(T) = n^2 J_b^0(T). \quad (2.4)$$

Поверхностная плотность спектрального потока излучения абсолютно черного тела

$$W_{b,v}(T) = \int_{\substack{\Omega=2\pi \\ (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \geq 0}} J_{b,v}(T) (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}) d\Omega = \pi J_{b,v}(T). \quad (2.5)$$

где \mathbf{n} – вектор нормали к элементарной площадке на поверхности абсолютно черного тела.

По аналогии для других единиц спектральной зависимости

$$W_{b,\lambda}(T) = \pi J_{b,\lambda}(T); \quad W_{b,\omega}(T) = \pi J_{b,\omega}(T).$$

Поверхностная плотность интегрального потока излучения абсолютно черного тела находится интегрированием по всему спектральному диапазону:

$$W_b^*(T) = \int_{\nu=0}^{\infty} W_{b,\nu}(T) d\nu = n^2 \sigma T^4. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) является математическим выражением закона Стефана – Больцмана.

2.4. Функции излучения абсолютно черного тела

Для удобства расчетов теплообмена излучением без привлечения компьютеров удобно использовать некоторые интегралы от функции Планка по частоте излучения, которые обычно представляются в табулированном виде (Зигель Р., Хауэлл Дж., 1975; Оци-сик М.Н., 1976). На практике используются две из них: функции излучения первого и второго рода.

Функция излучения первого рода $f_{0-\lambda}(T)$ определяется как доля интегральной интенсивности излучения абсолютно черного тела в интервале длин волн от 0 до λ :

$$f_{0-\lambda}(T) = \frac{\int_0^{\lambda} J_{b,\lambda'}(T) d\lambda'}{J_b(T)} = \frac{\int_0^{\lambda} W_{b,\lambda'}(T) d\lambda'}{W_b(T)} = \frac{W_{b,0-\lambda}(T)}{n^2 \bar{\sigma} T^4}, \quad (2.7)$$

где $W_{b,0-\lambda}(T) = \int_0^{\lambda} W_{b,\lambda'}(T) d\lambda'$ и предполагается, что показатель преломления n не зависит от частоты.

Функция излучения второго рода $f_{0-\lambda}^*(T)$ определяется по формуле

$$f_{0-\lambda}^*(T) = \int_0^{\lambda} \frac{\partial J_{b,\lambda'}(T)}{\partial J_b(T)} d\lambda' = \int_0^{\lambda} \frac{\partial W_{b,\lambda'}(T)}{\partial W_b(T)} d\lambda'. \quad (2.8)$$

Связь между функциями излучения первого и второго рода выражается зависимостью

$$f_{0-\lambda}^*(T) = f_{0-\lambda}(T) + \frac{\lambda T}{4} \frac{\partial f_{0-\lambda}(T)}{\partial (\lambda T)}.$$

Функции излучения (2.7) и (2.8) применяются для быстрого расчета интегральных характеристик переноса излучением путем замены интегралов на суммы. Примеры этого представлены в ряде книг (Зигель Р. и др., 1975; Оцисик М.Н., 1976).

2.5. Следствия из закона Планка

Формулировка закона Планка в виде (2.1), (2.3) позволяет получить ряд важных следствий из него в виде законов, которые исторически были установлены ранее закона Планка. К ним относятся законы смещения Вина, Рэлея – Джинса, Вина. Исторические аспекты установления закона излучения абсолютно черного

тела с наибольшей полнотой и достоверностью можно проследить по трудам Планка (Планк М., 1975; Кляус Е.М., Франкфурт У.Н., 1980).

Закон смещения Вина. Положение максимума спектральной энергии излучения, испускаемой абсолютно черным телом (или, что одно и то же: спектрального потока излучения, испускаемого поверхностью абсолютно черного тела, $(W_{b,\lambda})_{\max}$), определяется законом смещения Вина

$$(n\lambda T)_{(W_{b,\lambda})_{\max}} = 2897.6, \text{ мкм}\cdot\text{К}. \quad (2.9)$$

Максимальная спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела при заданной температуре равна

$$(J_{b,\lambda})_{\max} = 4.083 \times 10^{-9} T^5, \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{мкм} \cdot \text{ср}). \quad (2.10)$$

Закон Рэлея – Джинса. При $\lambda_0 T \gg hc_0/k$ из формулы Планка получается предельное выражение для спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела в вакууме (так называемая *длинноволновая аппроксимация функции Планка*)

$$J_{b,\lambda_0}^0(T) = \frac{2c_0 k T}{\lambda_0^4} = \frac{8.28 \times 10^6 T}{\lambda_0^4}, \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{мкм} \cdot \text{ср}). \quad (2.11)$$

Закон Вина. При $\lambda_0 T \ll hc_0/k$ из формулы Планка получается предельное выражение (так называемая *коротковолновая аппроксимация функции Планка*)

$$J_{b,\lambda_0}^0(T) = \frac{2hc_0^2}{\lambda_0^5 \exp\left(\frac{hc_0}{\lambda_0 k T}\right)} = \frac{119.25 \times 10^9}{\lambda_0^5 \exp\left(\frac{1.44 \times 10^4}{\lambda_0 T}\right)}, \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{мкм} \cdot \text{ср}). \quad (2.12)$$

В пирометрии широко используется следующая форма закона Вина, которая получается отнесением функции Планка к температуре излучающего тела в пятой степени:

$$\frac{J_{b,\lambda_0}^0(T)}{T^5} = \frac{2hc_0^2}{(\lambda_0 T)^5 \exp\left(\frac{hc_0}{\lambda_0 kT}\right)}. \quad (2.13)$$

Представление о длинноволновой и коротковолновой аппроксимациях функции Планка дает рис. 2.2.

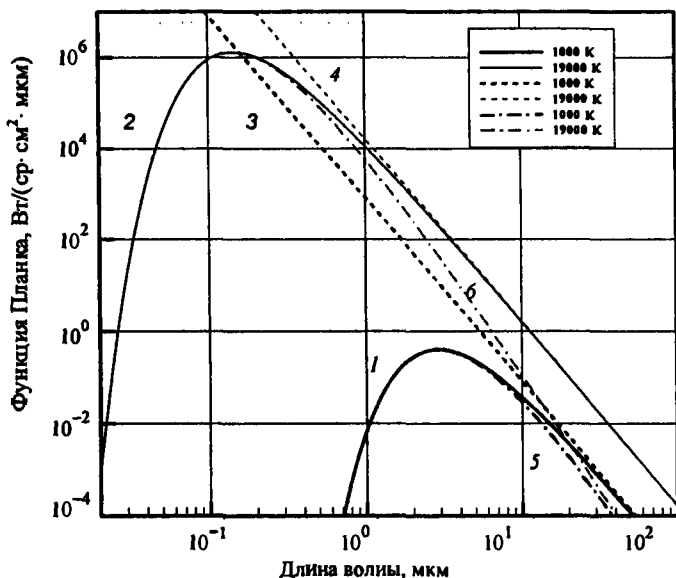


Рис. 2.2. Сравнение спектральной зависимости функции Планка (1, 2), функции Рэлея-Джинса (3, 4) и Вина (5, 6) для двух температур абсолютно черного тела

2.6. Закон Кирхгофа

Этот закон является столь же основополагающим для теории переноса теплового излучения, как и закон Планка, поскольку, если последний определяет предельно большую энергию, которая может быть испущена любым телом при фиксированной температуре и длине волны, то закон Кирхгофа определяет связь процессов испускания и поглощения. Закон Кирхгофа формулируется в следующем виде.

В условиях термодинамического равновесия отношение плотности спектрального (интегрального) потока испускаемого излучения к спектральной (интегральной) полусферической поглощательной способности тела является одинаковым для всех тел и равным спектральной (интегральной) плотности потока излучения абсолютно черного тела при той же температуре:

$$\frac{W_{\nu}(T)}{\alpha_{\nu}} = \pi J_{b,\nu}(T). \quad (2.14)$$

Следствия из закона Кирхгофа. Следствия из закона Кирхгофа формулируются для условий, когда внутри изолированной изотермической оболочки заключены различные тела. Согласно закону Кирхгофа при термодинамическом равновесии:

- 1) излучение в каждой отдельной однородной среде является однородным, изотропным и неполяризованным;
- 2) спектральная и интегральная направленная поглощательная способность поверхности равна спектральной и интегральной направленной степени черноты

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega) &= \varepsilon_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega), \\ \alpha(\mathbf{r}, \Omega) &= \varepsilon(\mathbf{r}, \Omega); \end{aligned} \quad (2.15)$$

- 3) спектральная и интегральная полусферическая поглощательная способность поверхности равна спектральной и интегральной полусферической степени черноты

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu}(\mathbf{r}) &= \varepsilon_{\nu}(\mathbf{r}), \\ \alpha(\mathbf{r}) &= \varepsilon(\mathbf{r}); \end{aligned} \quad (2.16)$$

- 4) собственная спектральная излучательная способность единицы объема (спектральный объемный коэффициент излучения) равна

$$J_{\nu}^{em}(\mathbf{r}) = \kappa_{\nu}(\mathbf{r}) J_{b,\nu}[T(\mathbf{r})], \quad (2.17)$$

где $\kappa_{\nu}(\mathbf{r})$ – спектральный объемный коэффициент поглощения. Феноменологическое определение спектрального объемного коэффициента поглощения дано в п. 1.2;

- 5) если J_ν – интенсивность излучения в произвольной точке однородной среды с показателем преломления n_ν , то величина J_ν/n_ν^2 одинакова для всех рассматриваемых сред.

2.7. Закон Ламберта

Интенсивность излучения единичной площадки на поверхности абсолютно черного тела в каком-либо направлении Ω пропорциональна косинусу угла между этим направлением и нормалью к поверхности \mathbf{n}

$$J_{b,\nu}(\mathbf{r}, \Omega) = J_{b,\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \Omega). \quad (2.18)$$

Подчеркнем, что закон Ламберта формулируется для энергии излучения, испускаемого в данном направлении единичной площадкой, расположенной на поверхности тела (а не ее проекцией). Поэтому определение (2.18) не вступает в противоречие с определением интенсивности излучения абсолютно черного тела (см. (2.1)) как функции, не зависящей от направления.

2.8. Закон Бугера

Интенсивность спектрального излучения вдоль некоторого направления Ω экспоненциально уменьшается при распространении излучения в поглощающей среде, а показатель экспоненты равен интегралу от текущего объемного коэффициента ослабления по длине пути, пройденного излучением.

Это закон Бугера, математическое выражение которого имеет вид

$$J_\nu(s) = J_\nu(s=0) \exp \left[- \int_{s=0}^s \beta_\nu(s') ds' \right], \quad (2.19)$$

где s – физическая координата вдоль луча с направляющим вектором Ω ; $J_\nu(s=0)$ – спектральная интенсивность излучения, падающего на элементарную площадку с координатой $s=0$ в направлении Ω .

Спектральной оптической толщиной отрезка луча s называют интеграл

$$\tau_\nu = \int_{s=0}^s \beta_\nu(s') ds'. \quad (2.20)$$

В теории переноса излучения используются понятия спектральных оптических толщин по отношению к отдельным процессам:

$$\tau_{\nu,a} = \int_{s=0}^s \kappa_\nu(s') ds' \quad \text{— спектральная оптическая толщина по поглощению;}$$

$$\tau_{\nu,s} = \int_{s=0}^s \sigma_\nu(s') ds' \quad \text{— спектральная оптическая толщина по рассеянию.}$$

Примечание. В различных литературных источниках закон Бугера иногда называют законом Ламберта, законом Бугера–Ламберта, законом Бера.

2.9. Термодинамика равновесного теплового излучения

Равновесное тепловое излучение может быть описано в терминах классической равновесной термодинамики (Базаров И.П., 1983; Планк М., 1975; Кляус Е.М. и др., 1980).

Для того чтобы воспользоваться выводами термодинамики, необходимо дать формулировку термического и калорического уравнений состояния теплового излучения, что, как известно, сделать с использованием самой термодинамики невозможно (Исаев С.И., 2003; Базаров И.П., 1983). Напомним, что термическое уравнение состояния идеального газа было установлено в термодинамике на основе эмпирических законов Бойля–Мариотта и Гей-Люссака. Указанные закономерности обобщены законом Клайперона (1834 г.), объединение которого с законом Авогадро дано Д.И. Менделеевым в 1874 г.

Термическое уравнение состояния теплового излучения базируется на опытных данных П.Н. Лебедева (1901 г.) и на теоре-

тическом предсказании А. Бартоли (1876 г.) о существовании светового давления, которое он сделал на основе второго начала термодинамики. Подчеркнем, что указанные экспериментальные и теоретические данные не позволяют предсказать зависимость давления излучения от его температуры, а лишь утверждают существование давления теплового излучения. Такую зависимость можно определить, привлекая или электродинамическое или корпускулярное представление о природе распространения излучения. Например, феноменологическое введение основных понятий теории переноса теплового излучения (фактически базирующееся на корпускулярной модели) дает (см. п. 1.1)

$$P^R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{3} U(\mathbf{r}, t), \quad (2.21)$$

где $U(\mathbf{r}, t)$ – интегральная по спектру объемная плотность энергии излучения; $P^R(\mathbf{r}, t)$ – давление излучения.

В условиях термодинамического равновесия можно записать следующую связь между полной энергией теплового излучения в объеме V и объемной плотностью энергии:

$$\bar{U}(V, T) = U(T) \cdot V, \quad (2.22)$$

где $U(T)$ – объемная плотность энергии излучения $U(\mathbf{r}, t)$, которая зависит только от температуры (в равновесии температура термодинамической системы не зависит от координат и времени).

Применим к равновесному излучению термодинамическое соотношение, связывающее термическое и калорическое уравнения состояния (Базаров И.П., 1983)

$$T \left(\frac{\partial P^R}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial V} \right)_T + P^R. \quad (2.23)$$

Подставляя сюда (2.21) и (2.22), получаем

$$T \frac{dU}{dT} = 4U$$

или
$$U = \bar{\sigma} T^4, \quad (2.24)$$

что является законом Стефана – Больцмана. Постоянная интегрирования $\bar{\sigma}$ называется константой Стефана – Больцмана. Первоначально эта постоянная была определена на основе анализа экспериментальных данных. Позднее ее удалось рассчитать (см., например, формулу (2.2)).

Закон Стефана – Больцмана позволяет дать формулировку термического и калорического уравнений состояния равновесного теплового излучения

$$P^R = \frac{1}{3} \bar{\sigma} T^4, \quad (2.25)$$

$$\bar{U} = \bar{\sigma} T^4 V. \quad (2.26)$$

Воспользуемся дифференциальной записью первого начала термодинамики применительно к тепловому излучению:

$$T dS = d\bar{U} + P^R dV. \quad (2.27)$$

Отсюда с учетом (2.25) и (2.26) получаем уравнение для определения энтропии теплового излучения

$$dS = \frac{4}{3} \bar{\sigma} d(VT^3) \quad (2.28)$$

или с учетом третьего начала термодинамики ($S = 0$ при $T = 0$)

$$S = \frac{4}{3} \bar{\sigma} VT^3. \quad (2.29)$$

В адиабатическом процессе ($S = \text{const}$) для теплового излучения получаем

$$VT^3 = \text{const} \quad (2.30)$$

или
$$P^4 V^{4/3} = \text{const}. \quad (2.31)$$

Опираясь на соотношение (2.25), можно утверждать, что изобарный процесс является одновременно изотермическим, поэтому объемная теплоемкость теплового излучения при постоян-

ном давлении равна бесконечности. Можно определить объемную теплоемкость теплового излучения при постоянном объеме, т.е.

$$c_V = 4\bar{\sigma}T^3. \quad (2.32)$$

Феноменологический подход классической термодинамики позволяет получить ряд практически важных выводов для теории переноса теплового излучения. Пусть величина $U_\nu(r, t) dv$ задает количество энергии излучения в спектральном диапазоне dv в окрестности ν в единице объема. Если на единицу площади поверхностного слоя среды падает энергия излучения $W_{\nu, n} dv$ в спектральном диапазоне dv , то можно предположить, что в общем случае часть этой энергии отразится ($W_{\nu, r} dv$), часть поглотится ($W_{\nu, \alpha} dv$), а часть пройдет сквозь поверхностный слой ($W_{\nu, \tau} dv$). Тогда закон сохранения энергии дает

$$W_{\nu, r} dv + W_{\nu, \alpha} dv + W_{\nu, \tau} dv = W_{\nu, n} dv$$

или
$$\rho_\nu + \alpha_\nu + \tau_\nu = 1, \quad (2.33)$$

где
$$\rho_\nu = \frac{W_{\nu, r}}{W_{\nu, n}}, \quad \alpha_\nu = \frac{W_{\nu, \alpha}}{W_{\nu, n}}, \quad \tau_\nu = \frac{W_{\nu, \tau}}{W_{\nu, n}} \quad (2.34)$$

соответственно спектральные коэффициенты *отражения*, *поглощения* и *пропускания* теплового излучения.

Очевидно, что введенные таким образом первые два спектральных коэффициента, характеризующие взаимодействие излучения с поверхностью, аналогичны спектральной полусферической отражательной и поглощательной способностям, определенным в п. 1.3.

Если для любой частоты электромагнитного излучения $\alpha_\nu = 1$, а, следовательно, из (2.33) $\rho_\nu = \tau_\nu = 0$, то такая поверхность называется *абсолютно черной*. Если для любой частоты $\rho_\nu = 1$, то поверхность называется *зеркальной* или *белой*, а при $\tau_\nu = 1$ — *абсолютно прозрачной*.

Приведенные здесь некоторые следствия термодинамики не исчерпывают основных ее выводов относительно теплового излучения. Более подробно этот вопрос изложен в книге (Базаров И.П., 1983).

2.10. Приближение локального термодинамического равновесия

Классическая термодинамика постулирует условия полного термодинамического равновесия (Базаров И.П., 1983; Ландау Л.Д. и др., 1976), которые, как правило, нарушаются, если решаются задачи переноса теплового излучения. Основными причинами этого нарушения являются неоднородные распределения термодинамических параметров в исследуемых объемах и не замкнутость этих объемов. Однако, если пространственные масштабы достаточно велики, а физические процессы, приводящие к установлению термодинамического равновесия в любом элементарном физическом объеме интенсивны, то равновесие может сохраняться локально. В этом случае говорят о *локальном термодинамическом равновесии* (ЛТР).

Среди указанных физических процессов следует назвать, прежде всего, столкновительные процессы между тяжелыми частицами (атомами, молекулами и их ионами) и свободными электронами. В результате этих столкновений происходит обмен энергией и импульсом между сталкивающимися частицами, а также рождение и исчезновение новых частиц. В результате указанного обмена в любом элементарном физическом объеме устанавливается максвелловское распределение по скоростям всех частиц и больцмановское распределение по внутренним энергетическим состояниям частиц, которые характеризуются единой температурой. Радиационные процессы чаще всего являются возмущающим фактором, приводящим к отклонению от указанного равновесия.

Условия справедливости ЛТР в газах и плазме подробно обсуждаются в работах (Биберман Л.М. и др., 1982; Грим Г., 1969; Фортов В.Е. и др., 1984).

При решении задач астрофизики, физики ударных волн, аэрофизики космических аппаратов достаточно часто наблюдается отклонение не только от условий полного, но и локального термодинамического равновесия. Излучение, испускаемое атомами и молекулами с небольцмановским заселением возбужденных энергетических уровней, называется *неравновесным*.

ГЛАВА 3

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА СЕЛЕКТИВНОГО ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

3.1. Уравнение переноса теплового излучения. Общие и частные формулировки

Уравнение переноса селективного теплового излучения формулируется для спектральной интенсивности излучения $J_\nu(s, \Omega, t)$, распространяющегося вдоль произвольного луча s , имеющего единичный вектор Ω . В данном разделе уравнение переноса излучения приводится сразу в наиболее общей форме. Феноменологический вывод этого уравнения дан в п.3.7.

Пусть из некоторой точки пространства с радиус-вектором \mathbf{r} испускается тепловое излучение (см. рис.3.1). Тогда спектральная интенсивность излучения может быть найдена из решения следующего уравнения переноса

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial J_\nu(s, \Omega, t)}{\partial t} + \frac{\partial J_\nu(s, \Omega, t)}{\partial s} + \\ & + [\kappa_\nu(s, t) + \sigma_\nu(s, t)] J_\nu(s, \Omega, t) = J_\nu^{em}(s, t) + \frac{1}{4\pi} \sigma_\nu(s, t) \times \\ & \times \int_{\nu'=0}^{\infty} \int_{\Omega'=4\pi} \gamma(s; \Omega', \Omega; \nu', \nu) J_{\nu'}(s, \Omega', t) d\Omega' d\nu', \end{aligned} \quad (3.1)$$

где t – время; c – скорость света; $J_\nu(s, \Omega, t)$ – спектральная интенсивность излучения; ν – частота излучения; s – физическая координата вдоль луча; Ω – единичный вектор направлений; $\kappa_\nu(s, t)$ – спектральный объемный коэффициент поглощения; $\sigma_\nu(s, t)$ –

спектральный объемный коэффициент рассеяния; $J_v^{em}(s, t)$ – спектральная излучательная способность единицы объема; $\gamma(s; \Omega', \Omega; \nu', \nu)$ – спектральная индикатриса рассеяния по направлениям и частоте излучения; Ω' – единичный вектор, характеризующий направление распространения теплового излучения, падающего на элементарный физический объем с координатой s и рассеиваемого им с вероятностью $\gamma(s; \Omega', \Omega; \nu', \nu)$.

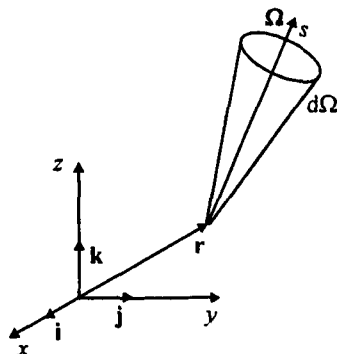


Рис. 3.1. К определению понятия спектральной интенсивности излучения

В приближении локального термодинамического равновесия

$$J_v^{em}(s, t) = \kappa_v(s, t) J_{b, \nu} [T(s, t)]. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) описывает нестационарный процесс распространения теплового излучения в рассеивающей по направлениям и частоте излучения среде. Подавляющее большинство задач теории теплообмена излучением решается в приближении установившегося во времени процесса переноса (*квазистационарное приближение*). Это означает, что характерный временной масштаб решаемых задач t^* много больше времени распространения электромагнитного излучения на характерном пространственном масштабе L^* : $t^* \gg L^*/c$. Фактически это означает, что используется приближение мгновенности переноса электромагнитной энергии в исследуемом объеме. В квазистационарном приближении первым слагаемым в левой части (3.1) пренебрегают, а время t в списке

аргументов функций и коэффициентов означает изменение спектральной интенсивности излучения вследствие изменения во времени свойств среды. В ряде физических задач нельзя использовать приближение квазистационарности: астрофизика и космология (Теория звездных спектров, 1966), взаимодействие ультракоротких импульсов излучения с веществом (Хора Х., 1986), релятивистская радиационная газовая динамика (Имшенник В.С. и др., 1981) и т.п.

Еще одно упрощение, широко используемое в теории теплообмена излучением, связано с пренебрежением рассеяния излучения по частоте электромагнитного излучения. Это так называемое приближение *когерентного рассеяния*. В этом случае считается, что фотоны падающего на элементарный физический объем излучения рассеиваются на той же самой частоте электромагнитного излучения.

Стационарное уравнение переноса селективного излучения в приближении когерентного рассеяния формулируется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_\nu(s, \Omega)}{\partial s} + [\kappa_\nu(s) + \sigma_\nu(s)] J_\nu(s, \Omega) = \\ = J_\nu^{em}(s) + \frac{1}{4\pi} \sigma_\nu(s) \int_{\Omega'=4\pi} \gamma_\nu(s; \Omega', \Omega) J_\nu(s, \Omega') d\Omega', \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\gamma_\nu(s; \Omega', \Omega)$ – спектральная индикатриса рассеяния по направлениям.

Стационарное уравнение переноса селективного излучения в приближении нерассеивающей среды описывает распространение излучения только в излучающей и поглощающей среде

$$\frac{\partial J_\nu(s, \Omega)}{\partial s} + \kappa_\nu(s) J_\nu(s, \Omega) = J_\nu^{em}(s). \quad (3.4)$$

Стационарное уравнение переноса селективного излучения в нерассеивающей среде, находящейся в состоянии локального термодинамического равновесия получается из (3.4) с учетом (3.2)

$$\frac{\partial J_\nu(s, \Omega)}{\partial s} + \kappa_\nu(s) J_\nu(s, \Omega) = \kappa_\nu(s) J_{b,\nu}(s). \quad (3.5)$$

Спектральной функцией источника излучения называется функция следующего вида

$$S_{\nu}(s, \Omega) = \frac{1}{\kappa_{\nu}(s) + \sigma_{\nu}(s)} J_{\nu}^{em}(s) + \frac{1}{4\pi} \tilde{\omega}_{\nu}(s) \int_{\Omega'=4\pi} \gamma_{\nu}(s; \Omega', \Omega) J_{\nu}(s, \Omega') d\Omega'. \quad (3.6)$$

Данная функция получается делением уравнения переноса (3.3) на спектральный коэффициент ослабления $\beta_{\nu}(s)$ и позволяет его записать в следующей простой форме

$$\frac{\partial J_{\nu}(s, \Omega)}{\partial \tau_{\nu}} + J_{\nu}(s, \Omega) = S_{\nu}(s, \Omega), \quad (3.7)$$

где τ_{ν} – спектральная оптическая толщина.

Следует обратить внимание на то, что уравнение (3.4) имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, где Ω служит параметром. Однако для решения задачи теплообмена излучением в объеме даже самой простейшей геометрии (в плоском слое), это уравнение необходимо проинтегрировать по всему пространству угловых направлений Ω . Результатом такого интегрирования будет расчет основных спектральных характеристик теплообмена излучением. Соответствующие интегральные характеристики определяются интегрированием по спектру. Приведем наиболее часто используемые функции.

а). Объемная плотность энергии излучения

$$U_{\nu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{\Omega=4\pi} J_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega, \quad (3.8)$$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} d\nu \int_{\Omega=4\pi} J_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega. \quad (3.9)$$

Физический смысл величины $U_{\nu}(\mathbf{r})$ устанавливается следующим образом. Пусть в элементарном цилиндрическом объеме $dV = dF dt c$ в единицу времени находится $[J_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega)] dF d\Omega dt d\omega$

энергии. Поэтому удельная монохроматическая энергия для излучения, распространяющегося в направлении Ω внутри $d\Omega$ равна $c^{-1}J_v(\mathbf{r}, \Omega)d\Omega$. Интегрируя по телесному углу $d\Omega$, находим $U_v(\mathbf{r})$.

б). Вектор радиационного теплового потока

$$\mathbf{W}_v(\mathbf{r}) = \int_{\Omega=4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega) \Omega d\Omega, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dv \int_{\Omega=4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega) \Omega d\Omega. \quad (3.11)$$

Обычно используется спектральная плотность потока излучения $W_{v,n}$ в некотором фиксированном направлении \mathbf{n} , в качестве которого, как правило, выступают координатные линии используемых в расчетах систем координат. Величина

$$W_{v,n} = \mathbf{n} \mathbf{W}_v(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega) \mathbf{n} \Omega d\Omega$$

представляет собой плотность потока мощности монохроматической энергии через единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению \mathbf{n} .

в). Функция источников тепловыделения в среде

$$Q_{R,v} = \text{div} \mathbf{W}_v(\mathbf{r}) = 4\pi J_v^{em}(\mathbf{r}) - \kappa_v(\mathbf{r}) \int_{\Omega=4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega, \quad (3.12)$$

$$Q_R = \text{div} \mathbf{W}(\mathbf{r}) = 4\pi \int_0^\infty J_v^{em}(\mathbf{r}) dv - \int_0^\infty \kappa_v(\mathbf{r}) \int_{\Omega=4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega dv. \quad (3.13)$$

Формулы (3.12) и (3.13) получены как результат интегрирования по полному телесному углу уравнения переноса (3.3). Однако в ряде вычислительных алгоритмов используется формальное применение оператора дивергенции

$$Q_R = \text{div} \mathbf{W}(\mathbf{r}).$$

Заметим, что слагаемые в правой части (3.12) не содержат характеристик светорассеяния, поскольку акты рассеяния излу-

ния не приводят в явном виде к изменению внутренней энергии вещества. Конечно, через интенсивность $J_\nu(s, \Omega')$ такое влияние есть, поскольку падающая энергия формируется, в том числе и процессами рассеяния.

Когда в отдельных спектральных диапазонах или в полной спектральной области испускание существенно превосходит поглощение энергии (*оптически тонкая среда*), то выражение (3.12) становится особенно простым (так называемое *приближение объемного высвечивания*)

$$Q_{R,\nu} = 4\pi\kappa_\nu J_{b\nu}(T).$$

3.2. Формальное решение уравнения переноса

Запись уравнения переноса в форме (3.7) позволяет получить *формальное* решение уравнения переноса

$$J_\nu(s, \Omega) = J_\nu(s=0, \Omega) \exp\left[-\int_0^s \beta_\nu(s') ds'\right] + \int_0^s \beta_\nu(s') S_\nu(s', \Omega) \exp\left[-\int_{s'}^s \beta_\nu(s'') ds''\right] ds', \quad (3.14)$$

где $J_\nu(s=0, \Omega)$ – спектральная интенсивность излучения, падающего на границу $s=0$.

Данное решение называется *формальным*, поскольку спектральная функция источников излучения $S_\nu(s', \Omega)$ под интегралом в (3.14) содержит искомую интенсивность излучения $J_\nu(s, \Omega)$, а следовательно, формула (3.14) представляет собой интегральное уравнение.

Если среда нерассеивающая и находится в состоянии локального термодинамического равновесия, то формальное решение уравнения переноса излучения заметно упрощается:

$$J_\nu(s, \Omega) = J_\nu^0 \exp\left[-\int_0^s \kappa_\nu(s') ds'\right] +$$

$$+ \int_0^s \kappa_v(s') J_{b,v}(s') \exp \left[- \int_{s'}^s \kappa_v(s'') ds'' \right] ds', \quad (3.15)$$

или

$$J_v(\tau_v, \Omega) = J_v^0 \exp(-\tau_v) + \int_0^{\tau_v} J_{b,v}(\tau'_v) \exp[-(\tau_v - \tau'_v)] d\tau', \quad (3.16)$$

где $J_v^0 = J_v(s=0, \Omega)$, $\tau_v = \tau_v(s) = \int_0^s \kappa_v(s') ds'$.

Физический смысл слагаемых в формальном решении уравнения переноса (3.15) следующий:

- 1-е слагаемое характеризует экспоненциальное ослабление падающего на границу $s=0$ излучения вдоль луча Ω до точки s ;
- 2-е слагаемое характеризует вклад в функцию $J_v(s, \Omega)$ излучения, испущенного в точке s' и экспоненциально ослабленного на участке $[s', s]$.

Очевидно, что в данном случае можно говорить о точном решении задачи переноса излучения вдоль луча, поскольку спектральная интенсивность излучения определяется из (3.15) или (3.16) путем интегрирования известной функции координаты s . В случае однородного оптического луча (излучательная способность не зависит от координаты) эта задача имеет следующее аналитическое решение

$$J_v(\tau_v, \Omega) = J_v^0 \exp(-\tau_v) + J_{b,v} [1 - \exp(-\tau_v)]. \quad (3.17)$$

Рассмотрим две практически важные задачи, связанные с использованием аналитических формул расчета переноса излучения вдоль луча.

Задача 1. *Расчет полусферической излучательной способности нерассеивающей среды.* Эта задача формулируется следующим образом: определить спектральную плотность потока излучения на элементарной единичной площадке, расположенной

в основании полусферического однородного объема радиусом R . Расчетная схема задачи показана на рис. 3.2.

По определению плотности одностороннего спектрального радиационного теплового потока (1.9) и (1.10)

$$W_v = \int_{\Omega=2\pi} J_v(R, \Omega)(\Omega \mathbf{n}) d\Omega$$

и с учетом геометрии задачи, получаем

$$\begin{aligned} W_v(R) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} J_v(R, \varphi, \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^1 J_v(R, \mu) \mu d\mu = \pi J_{b_v} [1 - \exp(-\kappa_v R)]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

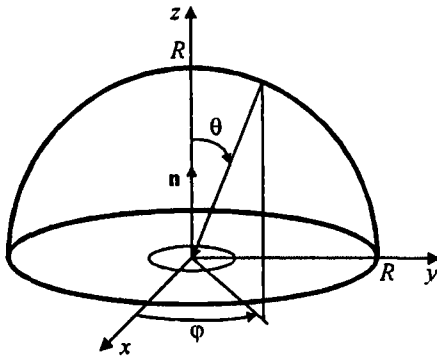


Рис. 3.2. К расчету полусферической излучательной способности

Отношение полученной плотности спектрального потока излучения к спектральной полусферической излучательной способности абсолютно черного тела называется *спектральной степенью черноты полусферического однородного объема радиусом R*

$$\varepsilon_v(R) = \frac{W_v(R)}{\pi J_{b_v}} = 1 - \exp(-\kappa_v R).$$

Аналогично определяется *интегральная степень черноты полусферического однородного объема*

$$\varepsilon(R) = \int_{\nu} \frac{W_{\nu}(R)}{\pi J_{b,\nu}} d\nu = \int_{\nu} [1 - \exp(-\kappa_{\nu} R)] d\nu.$$

Задача 2. Численное интегрирование уравнения переноса вдоль луча. Наиболее экономичные расчетные алгоритмы удается построить для решения уравнения переноса в интегральной форме, когда в качестве аргумента используется оптическая толщина (3.16). Для фиксированного направления Ω имеем

$$J_{\nu}(\tau_{\nu}) = J_{\nu,0} \exp(-\tau_{\nu}) + \int_0^{\tau_{\nu}} J_{b,\nu}(\tau'_{\nu}) \exp[-(\tau_{\nu} - \tau'_{\nu})] d\tau'_{\nu}. \quad (3.19)$$

Вычислению интеграла в (3.19) мешает сложный вид функции

$$J_{b,\nu}(\tau'_{\nu}) = J_{b,\nu} [T(s(\tau'_{\nu}))],$$

за исключением, конечно, случая постоянства температуры вдоль луча (3.17), который ввиду тривиальности рассматривать не будем. Наиболее очевидным и конструктивным представляется численное интегрирование на специально вводимой для этого разностной сетке $\varpi = \{s_j, j=1, 2, \dots, N\}$. Будем считать, что функции τ_{ν} и $J_{b,\nu}(\tau_{\nu})$ заданы в узлах этой сетки. Обозначим их соответственно (опустив для краткости индекс ν) τ_j и $J_{b,j}$. Тогда для вычисления интеграла можно использовать традиционные методы интегрирования (методы прямоугольников, трапеции, Симпсона и др.) (Калиткин Н.Н., 1978). Укажем на трудности, с которыми приходится при этом сталкиваться. Во-первых, сетка s_j не всегда построена настолько оптимально, что в полной мере отражает поведение функции источников $J_{b,\nu}(\tau_{\nu})$. При решении сложных сопряженных задач радиационного теплообмена часто сетка специально не перестраивается для решения задач переноса излучения. В то же время функция $J_{b,\nu}(\tau_{\nu})$ является чрезвычайно сильной функцией температуры, так что от узла к узлу она может значительно изменяться. Во-вторых, следует учесть, что луч для интегрирования может быть выбран так, что он не будет совпадать

ни с одной координатной линией, что в еще большей степени усложнит ситуацию вследствие необходимости интерполяции.

Из сказанного следуют два вывода. Первый – о необходимости предъявления высоких требований к разностной сетке для расчета переноса излучения. Второй – об осторожности использования традиционных методов интегрирования. Опыт численных расчетов показывает, что на грубых расчетных сетках предпочтительнее можно отдавать более простым методам интегрирования: методу трапеций или методу прямоугольников. В этих простейших случаях расчетные формулы имеют следующий вид.

1. Расчет по формуле трапеций:

$$\begin{aligned}
 J(\tau_N) &= J_0 \exp(-\tau_N) + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} J_b(\tau') \exp(\tau' - \tau_N) d\tau' = \\
 &= \exp(-\tau_N) \left\{ J_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \exp(\tau_k) \left[a_k (\exp(\tau_{k+1} - \tau_k) - 1) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + b_k (\exp(\tau_{k+1} - \tau_k)(\tau_{k+1} - 1) - (\tau_k - 1)) \right] \right\}, \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

где $a_k = (\tau_{k+1} J_{b,k} - \tau_k J_{b,k+1}) / (\tau_{k+1} - \tau_k)$,

$$b_k = (J_{b,k+1} - J_{b,k}) / (\tau_{k+1} - \tau_k).$$

Для пояснения алгоритма расчета по формуле (3.20) на рис. 3.3 представлена расчетная сетка

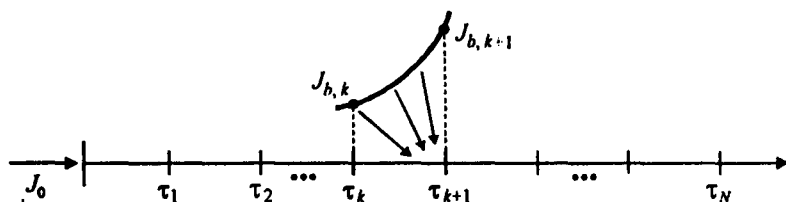


Рис. 3.3. Схема переноса излучения в пределах расчетной ячейки

2. Расчет по формуле прямоугольников:

$$\begin{aligned}
 J(\tau_N) &= J_0 \exp(-\tau_N) + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} J_b(\tau') \exp(\tau' - \tau_N) d\tau' = \\
 &= \exp(-\tau_N) \left\{ J_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{J}_{b,k} \exp(\tau_k) [(\exp(\tau_{k+1} - \tau_k) - 1)] \right\}, \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

где $\bar{J}_{b,k} \in [\min(J_{b,k}, J_{b,k+1}), \max(J_{b,k}, J_{b,k+1})]$.

Величина $\bar{J}_{b,k}$ может быть выбрана произвольно, например

$$\bar{J}_{b,k} = J_{b,k}, \quad (3.22, \text{а})$$

$$\bar{J}_{b,k} = J_{b,k+1}, \quad (3.22, \text{б})$$

$$\bar{J}_{b,k} = \frac{1}{2} (J_{b,k} + J_{b,k+1}). \quad (3.22, \text{в})$$

Однако при сильном изменении функции источников на интервале $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ ее выбор делать формально нельзя. Например, в случае, когда $\tau_{k+1} - \tau_k \gg 1$, расчет интенсивности к правой границе ячейки $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ (см. рис. 3.3) разумнее выполнять с $\bar{J}_{b,k} = J_{b,k+1}$, а расчет интенсивности к левой границе ячейки — с $\bar{J}_{b,k} = J_{b,k}$. Поэтому формула (3.22, в) является предпочтительной.

Расчет по формулам (3.20) и (3.21) даже при разумном выборе аппроксимации $J_{b,k}(\tau')$ не является экономичным. Количество экспонент, которые необходимо вычислить для расчета $J(\tau_N)$, равно $\sim N^2$. Существует алгоритм расчета интенсивности всего с $\sim N$ -кратным расчетом экспонент. Для этого сначала рассчитывают шкалу функций пропускания расчетных ячеек ($(N-1)$ экспонента)

$$T_{k,k+1} = \exp[-(\tau_{k+1} - \tau_k)]. \quad (3.23)$$

Вклад в интенсивность излучения на правой границе участка $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ (при расчете излучения вдоль луча от τ_1 до τ_N) выражается формулой

$$J_{k,k+1} = \bar{a}_k (1 - T_{k,k+1}) + \bar{b}_k [1 - T_{k,k+1} (\tau_{k+1} - \tau_k + 1)], \quad (3.24)$$

$$\text{где} \quad \tilde{a}_k = J_{b,k+1}, \quad \tilde{b}_k = -\frac{J_{b,k+1} - J_k}{\tau_{k+1} - \tau_k}.$$

Очевидно, что до точки τ_N дойдет лишь ослабленная доля излучения от участка $[\tau_k, \tau_{k+1}]$:

$$\begin{aligned} J(\tau_k, \tau_{k+1}) &= J_{k,k+1} \exp[-(\tau_N - \tau_{k+1})] = \\ &= J_{k,k+1} \exp\left[-\sum_{l=k+1}^{l=N-1} (\tau_{l+1} - \tau_l)\right] = J_{k,k+1} \prod_{l=k+1}^{N-1} T_{l,l+1} = J_{k,k+1} T_{k+1,N}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Использование формул (3.23)–(3.25) составляет основу экономичного алгоритма расчета переноса излучения вдоль луча. Начиная расчет с ячейки $[\tau_{N-1}, \tau_N]$ и продвигаясь в сторону уменьшения номера узлов сетки, достаточно рассчитать величину $J_{k,k+1}$ и умножить ее на суммарное пропускание слоя, которое формируется шаг за шагом умножением предшествующей величины пропускания (в первой ячейке $[\tau_{N-1}, \tau_N]$ она равна 1) на множитель $T_{k+1,k+2}$. Дойдя до первой точки луча, остается учесть внешнее излучение, умножив его интенсивность J_0 на сформированное суммарное пропускание слоя $T_{1,N}$.

Если при взятии интеграла применять метод прямоугольников, то изменится лишь выражение для $J_{k,k+1}$:

$$J_{k,k+1} = J_{b,k} (1 - T_{k,k+1}). \quad (3.26)$$

Изложенный экономичный алгоритм используется не только для вычисления интенсивности излучения вдоль луча, но и в других расчетных методах. Вместе с этим, не всегда возможно использование экономичного алгоритма. В его основе лежит принцип аддитивности функции оптической толщины, когда оптическая толщина всего отрезка $[s_1, s_N]$ равна сумме оптических толщин участков, составляющих отрезок. Этот принцип нарушается при анализе линейчатой структуры спектра (см. главу 11).

Возможен другой способ построения решения в точке τ_N . За основу берется уравнение (3.5). Предполагается, что температура (а значит, и функция источников $J_b(T)$) и коэффициент погло-

щения $\kappa(s)$ являются кусочно-постоянными функциями на интервалах (s_{k-1}, s_k) , $k = 2, \dots, N$. Тогда (3.5) в конечно-разностном виде примет вид

$$\frac{J_k - J_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} + \kappa_{k-1/2} \frac{J_{k-1} + J_k}{2} = \kappa_{k-1/2} J_{b,k-1/2}, \quad (3.27)$$

где $\kappa_{k-1/2}$, $J_{b,k-1/2}$ — некоторые значения функций κ и J_b внутри отрезка $[s_{k-1}, s_k]$. Согласно оценкам (Четверушкин Б.Н., 1985) схема (3.27) устойчива с локальной погрешностью аппроксимации, равной $O(\Delta s^2)$ на гладких решениях.

Отметим, что выбор $\kappa_{k-1/2} = 0.5(\kappa_{k-1} + \kappa_k)$ будет практически эквивалентен записи уравнения (3.5) относительно оптических толщин τ_k :

$$\frac{J_k - J_{k-1}}{\tau_k - \tau_{k-1}} + \frac{J_{k-1} + J_k}{2} = J_{b,k-1/2}, \quad (3.28)$$

так как

$$\tau_k - \tau_{k-1} = \int_{s_{k-1}}^{s_k} \kappa(s') ds',$$

а значения коэффициента известны только в граничных точках интервала. Поэтому наиболее разумной аппроксимацией для $\kappa(s)$ является линейная аппроксимация

$$\kappa(s) = \kappa_{k-1} + \frac{\kappa_k - \kappa_{k-1}}{s_k - s_{k-1}}(s - s_{k-1}),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \tau_k - \tau_{k-1} &= \int_{s_{k-1}}^{s_k} \left[\kappa_{k-1} + \frac{\kappa_k - \kappa_{k-1}}{s_k - s_{k-1}}(s - s_{k-1}) \right] ds = \\ &= 0.5(\kappa_{k-1} + \kappa_k)(s_k - s_{k-1}). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим оба вида аппроксимации (3.24), (3.25) и (3.28) в пределах одного отрезка $[s_{k-1}, s_k]$. Положим интенсивность излучения, падающего на его левую границу, равной нулю. Тогда, в соответствие с (3.28)

$$J_k^* = \frac{2\Delta\tau}{2 + \Delta\tau} J_{b,k-1/2}, \quad \Delta\tau = \int_{s_{k-1}}^s \kappa(s') ds' = \tau_k - \tau_{k-1}. \quad (3.29)$$

Значение интенсивности в точке s_k по первой из аппроксимаций задается формулой (3.24), где во всех индексах надо вычесть единицу

$$J_k^{**} = J_{b,k} [1 - \exp(-\Delta\tau)] - (J_{b,k} - J_{b,k-1}) [1 - \exp(-\Delta\tau)(\Delta\tau + 1)] \quad (3.30)$$

Значения интенсивностей J_k^* и J_k^{**} совпадают лишь при условии $\Delta\tau \ll 1$ и $J_{b,k-1/2} = J_{b,k-1}$, когда получается

$$J_k^{**} = J_k^* \approx \Delta\tau J_{b,k-1}. \quad (3.31)$$

Если же в качестве второго типа аппроксимации использовать соотношение (3.26) для кусочно-постоянной зависимости $\bar{J}_{b,k}$ внутри отрезка $[s_{k-1}, s_k]$, то получим

$$J_k^{***} = J_{b,k-1} [1 - \exp(-\Delta\tau)]. \quad (3.32)$$

Если положить $\Delta\tau \ll 1$, то

$$J_k \cong \Delta\tau J_{b,k-1}. \quad (3.33)$$

Таким образом, аппроксимации (3.24), (3.26) и (3.28) совпадают при малых оптических толщинах ячейки, если выбрать одинаковыми величины $J_{b,k-1/2}$ и $J_{b,k-1}$.

Если же условие $\Delta\tau \ll 1$ не выполняется, т.е. $\Delta\tau \geq 1$, то погрешности всех видов аппроксимации можно сравнить, положив $J_b(s) \equiv J_{b,k} = \text{const}$, тогда

$$J_k^* = \frac{2\Delta\tau}{2 + \Delta\tau} J_{b,k}, \quad (3.34)$$

$$J_k^{**} = J_{b,k} [1 - \exp(-\Delta\tau)] = J_k^{***}. \quad (3.35)$$

Точное решение уравнения переноса в этом простейшем случае имеет вид, совпадающий с (3.35). Значит, если $\Delta\tau \gg 1$, то

аппроксимация (3.34) может дать примерно двукратное завышение интенсивности. Поэтому использование аппроксимаций (3.24) и (3.26) считается более обоснованным. Укажем также на работу (Гольдин В.Я., 1960), в которой анализировался вопрос о типах аппроксимации функции источников для правильного расчета лучистых потоков и их дивергенций. В этой работе (см. также (Четверушкин Б.Н., 1985)) показано, что кусочно-линейная аппроксимация обеспечивает переход уравнения переноса к виду уравнения лучистой теплопроводности при $\Delta\tau \gg 1$.

Заметим, что в двух предельных случаях малых ($\Delta\tau \ll 1$) и больших ($\Delta\tau \gg 1$) оптических толщин уравнение переноса допускает простые решения, называемые приближениями оптически тонкого и оптически толстого слоев:

$$\begin{aligned} \text{при } \Delta\tau \ll 1: \quad J_v(\tau_v) &= J_{v,0} + \int_0^{\tau_v} J_{b,v}(\tau'_v) d\tau'_v, \\ \text{при } \Delta\tau \gg 1: \quad J_v(s) &= J_{b,v}(s). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Подробно указанные случаи предельных оптических толщин рассмотрены в главе 5.

3.3. Формулировка уравнения переноса излучения в различных одномерных геометриях

Рассмотрим запись уравнения переноса излучения в трех ортогональных системах координат: прямоугольной декартовой, сферической и цилиндрической. В данном разделе получим указанные уравнения для наиболее простых случаев изменения только одной пространственной переменной. После этого уравнение переноса излучения будет представлено в общем трехмерном случае (см. п.3.4).

3.3.1. Прямоугольная декартова система координат. Одномерный случай (бесконечный плоский слой)

Геометрия данного случая показана на рис. 3.4. Полагая, что рассматриваемый плоский слой бесконечен в направлении осей x

и y , что приводит к зависимости интенсивности спектрального излучения лишь от двух координат: z и $\omega_z = \cos \theta = \mu$, получим частную производную по направлению s в виде

$$\frac{\partial J_v}{\partial s} = \frac{\partial J_v}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial J_v}{\partial \mu} \frac{d\mu}{ds}.$$

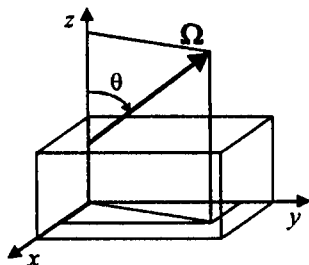


Рис. 3.4. Прямоугольная декартова система координат

Из рис. 3.4 очевидно, что

$$\frac{dz}{ds} = \cos \theta = \mu, \quad \frac{d\mu}{ds} = 0.$$

Тогда уравнение переноса излучения для бесконечного плоского слоя имеет вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial J_v(z, \mu)}{\partial z} + [\kappa_v(z) + \sigma_v(z)] J_v(z, \mu) = \\ = J_v^{em}(z) + \frac{1}{2} \sigma_v(z) \int_{-1}^1 \gamma_v(z; \mu', \mu) J_v(z, \mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.3.2. Сферическая система координат.

Одномерный случай (сферическая симметрия)

В этом случае спектральная интенсивность излучения зависит от двух переменных: r и $\mu = \cos \theta$ (рис. 3.5). Поэтому

$$\frac{\partial J_v(r, \mu)}{\partial s} = \frac{\partial J_v(r, \mu)}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial J_v(r, \mu)}{\partial \mu} \frac{d\mu}{ds}.$$

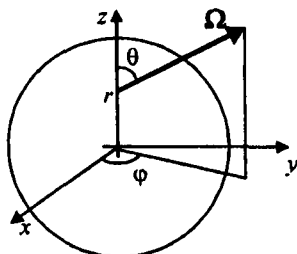


Рис. 3.5. Сферическая система координат

Из геометрических соображений следует, что

$$\frac{dr}{ds} = \cos \theta, \quad \sin \theta = -r \frac{d\theta}{ds}$$

или

$$\frac{dr}{ds} = \mu, \quad \frac{d\mu}{ds} = \frac{1 - \mu^2}{r}.$$

Поэтому уравнение переноса излучения в одномерной сферической системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial J_\nu(r, \mu)}{\partial r} + \frac{(1 - \mu^2)}{r} \frac{\partial J_\nu(r, \mu)}{\partial \mu} + [\kappa_\nu(r) + \sigma_\nu(r)] J_\nu(r, \mu) = \\ = J_\nu^{em}(r) + \frac{1}{2} \sigma_\nu(r) \int_{-1}^1 \gamma_\nu(r; \mu', \mu) J_\nu(r, \mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.3.3. Цилиндрическая система координат.

Одномерный случай (цилиндрическая симметрия)

В этом случае спектральная интенсивность излучения зависит от одной пространственной переменной r и двух угловых переменных θ и φ , показанных на рис. 3.6. Поэтому

$$\frac{\partial J_\nu(r, \varphi, \theta)}{\partial s} = \frac{\partial J_\nu(r, \varphi, \theta)}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial J_\nu(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial J_\nu(r, \varphi, \theta)}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{ds}.$$

Из геометрических соображений очевидно, что $d\varphi/ds = 0$.

Рассмотрим треугольник abc со сторонами $ab: -rd\theta$, $ac: ds \sin \varphi$, $bc: ds \sin \varphi \cos(\theta - d\theta) \approx ds \sin \varphi \cos \theta$. Здесь знак минус у $d\theta$ показывает, что при изменении физической координаты s на ds угол θ изменяется на величину $-d\theta$. Отсюда следует, что

$$\cos \theta = \frac{dr}{ds \sin \varphi}, \quad \sin \theta = -\frac{rd\theta}{ds \sin \varphi}$$

и

$$\frac{dr}{ds} = \sin \varphi \cos \theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{r} \sin \theta \sin \varphi.$$

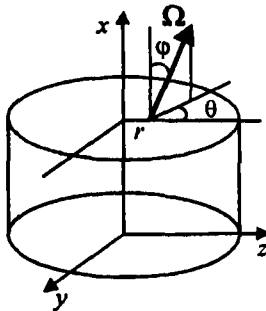


Рис. 3.6. Цилиндрическая система координат

Уравнение переноса теплового излучения в одномерной цилиндрической геометрии имеет вид

$$\begin{aligned} \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial J_v(r, \theta, \varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial J_v(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} + \\ + [\kappa_v(r) + \sigma_v(r)] J_v(r, \theta, \varphi) = \\ = J_v^{em}(r) + \frac{1}{4\pi} \sigma_v(r) \int_{\Omega'=4\pi} \gamma_v(\mathbf{r}; \Omega', \Omega) J_v(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega'. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Заметим, что в случае цилиндрической геометрии интеграл по направлениям Ω' не может быть упрощен по аналогии со случаями плоской и сферической геометрий.

3.4. Уравнения переноса излучения в трехмерном случае

Существует несколько форм записи уравнения переноса в трехмерном случае. Здесь представлен вид, принятый в работах (Гринспен Х. (ред.) и др., 1972; Pomraning G.C., 1973).

3.4.1. Прямоугольная декартова система координат

Интенсивность спектрального излучения зависит от переменных $J_\nu = J_\nu(x, y, z; \Omega) = J_\nu(x, y, z; \varphi, \theta)$, и уравнение переноса формулируется в виде

$$\begin{aligned} \omega_x \frac{\partial J_\nu}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial J_\nu}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial J_\nu}{\partial z} + [\kappa_\nu(x, y, z) + \sigma_\nu(x, y, z)] J_\nu = \\ = J_\nu^{em}(x, y, z) + \frac{1}{4\pi} \sigma_\nu(x, y, z) \times \\ \times \int_{\Omega'=4\pi} \gamma_\nu(x, y, z; \Omega', \Omega) J_\nu(x, y, z; \Omega') d\Omega', \end{aligned} \quad (3.40)$$

где направляющие косинусы $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ рассчитываются по формулам (рис. 3.7) $\omega_x = \sin \theta \cos \varphi$, $\omega_y = \sin \theta \sin \varphi$, $\omega_z = \cos \theta$.

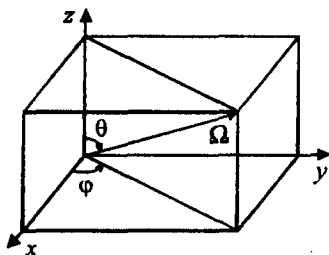


Рис. 3.7. Трехмерная прямоугольная декартова система координат

3.4.2. Сферическая система координат

Уравнения переноса излучения формулируется для спектральной интенсивности излучения $J_\nu = J_\nu(r, \Phi, \Theta, \varphi, \theta)$ в виде

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial J_\nu}{\partial r} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial J_\nu}{\partial \Theta} + \frac{\xi}{r \sin \Theta} \frac{\partial J_\nu}{\partial \Phi} + \frac{(1-\mu^2)}{r} \frac{\partial J_\nu}{\partial \mu} - \frac{\xi \cos \Theta}{r} \frac{\partial J_\nu}{\partial \varphi} + \\ + [\kappa_\nu(r, \Phi, \Theta) + \sigma_\nu(r, \Phi, \Theta)] J_\nu = J_\nu^{em}(r, \Phi, \Theta) + \\ + \frac{1}{4\pi} \sigma_\nu(r, \Phi, \Theta) \int_{\Omega'=4\pi} \gamma_\nu(r, \Phi, \Theta; \Omega', \Omega) J_\nu(r, \Phi, \Theta; \Omega') d\Omega', \end{aligned} \quad (3.41)$$

где направляющие косинусы вектора Ω определяются по формулам (рис. 3.8) $\mu = \cos \theta$, $\eta = \sin \theta \cos \varphi$, $\xi = \sin \theta \sin \varphi$.

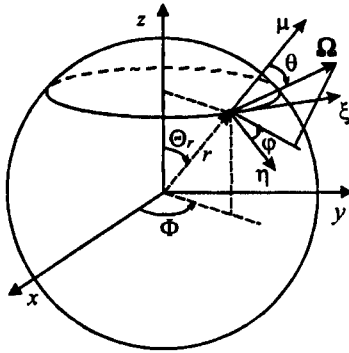


Рис. 3.8. Трехмерная сферическая система координат

3.4.3. Цилиндрическая система координат

Уравнения переноса излучения формулируется для спектральной интенсивности излучения $J_v = J_v(r, z, \Theta, \varphi, \theta)$ в виде

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial J_v}{\partial r} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial J_v}{\partial \Theta} + \xi \frac{\partial J_v}{\partial z} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial J_v}{\partial \varphi} + \\ & + [\kappa_v(r, z, \Theta) + \sigma_v(r, z, \Theta)] J_v = J_v^{em}(r, z, \Theta) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \sigma_v(r, z, \Theta) \int_{\Omega'=4\pi} \gamma_v(r, z, \Theta; \Omega', \Omega) J_v(r, z, \Theta; \Omega') d\Omega', \quad (3.42) \end{aligned}$$

где направляющие косинусы вектора Ω определяются по формулам (рис. 3.9) $\xi = \cos \theta$, $\mu = \sin \theta \cos \varphi$, $\eta = \sin \theta \sin \varphi$.

Большой практический интерес представляет формулировка уравнения переноса излучения в осесимметричной цилиндрической системе координат. В этом случае зависимость от угла Θ исчезает, и уравнение переноса излучения принимает вид

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial J_v}{\partial r} + \xi \frac{\partial J_v}{\partial z} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial J_v}{\partial \varphi} + [\kappa_v(r, z) + \sigma_v(r, z)] J_v = J_v^{em}(r, z) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \sigma_v(r, z) \int_{\Omega'=4\pi} \gamma_v(r, z; \Omega', \Omega) J_v(r, z; \Omega') d\Omega', \quad (3.43) \end{aligned}$$

где $J_v = J_v(r, z, \varphi, \theta)$.

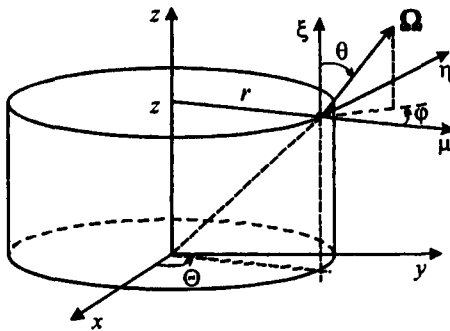


Рис. 3.9. Трехмерная цилиндрическая геометрия

3.5. Интегральная форма уравнения переноса излучения для произвольной геометрии

Интегральные уравнения теории переноса были впервые исследованы в работах (Hilbert D., 1912, 1913) при решении задач о переносе излучения в фотосферах звезд. Этот тип уравнений широко используется при решении задач теплоэнергетики, астрофизики, физики плазмы, физики ядерных реакторов и атмосферной оптики.

Получим уравнения для стационарного случая переноса теплового излучения. Уравнение переноса излучения (3.3) представим в следующем виде:

$$\Omega \nabla J_v(\mathbf{r}, \Omega) + \beta_v(\mathbf{r}) J_v(\mathbf{r}, \Omega) = Q_v(\mathbf{r}, \Omega), \quad (3.44)$$

где

$$Q_v(\mathbf{r}, \Omega) = J_v^{em}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sigma_v(\mathbf{r}) \int_{\Omega'=4\pi} \gamma_v(\mathbf{r}; \Omega', \Omega) J_v(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega'. \quad (3.45)$$

Граничные условия для решения уравнения (3.44) задаются в виде

$$J_v(\mathbf{r}_0, \Omega) = \Gamma_v(\mathbf{r}_0, \Omega), (\mathbf{n} \cdot \Omega) < 0, \quad (3.46)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности, ограничивающей объем, внутри которого распространяется излучение; \mathbf{r}_0 – радиус-вектор точки поверхности.

Рассмотрим процесс распространения излучения из некоторой точки a внутри (или на границе объема) в направлении Ω . Если s – физическое расстояние от точки a , то вместо (3.44) можно записать (воспользовавшись определением производной по направлению) следующее уравнение:

$$-\frac{\partial J_v(\mathbf{r}-s\Omega, \Omega)}{\partial s} + \beta_v(\mathbf{r}-s\Omega, \Omega) J_v(\mathbf{r}-s\Omega, \Omega) = Q_v(\mathbf{r}-s\Omega, \Omega). \quad (3.47)$$

Уравнение (3.47) является дифференциальным уравнением первого порядка, поэтому

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial s} \left\{ J_v(\mathbf{r}-s\Omega, \Omega) \exp \left[-\int_{s_a}^s \beta_v(\mathbf{r}-s''\Omega) ds'' \right] \right\} = \\ = Q_v(\mathbf{r}-s\Omega, \Omega) \exp \left[-\int_{s_a}^s \beta_v(\mathbf{r}-s''\Omega) ds'' \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Интегрируя (3.48), получаем

$$\begin{aligned} J_v(\mathbf{r}-s\Omega, \Omega) \exp \left[-\int_{s_a}^s \beta_v(\mathbf{r}-s''\Omega) ds'' \right] - J_v(\mathbf{r}-s_a\Omega, \Omega) = \\ = \int_s^{s_a} Q_v(\mathbf{r}-s'\Omega, \Omega) \exp \left[-\int_{s_a}^{s'} \beta_v(\mathbf{r}-s''\Omega) ds'' \right] ds', \end{aligned} \quad (3.49)$$

где $J_v(\mathbf{r}-s_a\Omega, \Omega)$ – постоянная интегрирования.

Поделив уравнение (3.49) на экспоненту, получим

$$\begin{aligned} J_v(\mathbf{r}-s\Omega, \Omega) = J_v(\mathbf{r}-s_a\Omega, \Omega) \exp \left[-\int_s^{s_a} \beta_v(\mathbf{r}-s''\Omega) ds'' \right] + \\ + \int_s^{s_a} Q_v(\mathbf{r}-s'\Omega, \Omega) \exp \left[\int_s^{s'} \beta_v(\mathbf{r}-s''\Omega) ds'' \right] ds'. \end{aligned} \quad (3.50)$$

В уравнении (3.50) величина s используется как параметр. Положив $s = 0$, определим зависимость спектральной интенсивности в точке \mathbf{r} :

$$J_v(\mathbf{r}, \Omega) = J_v(\mathbf{r} - s_a \Omega, \Omega) \exp \left[- \int_0^{s_a} \beta_v(\mathbf{r} - s'' \Omega) ds'' \right] + \int_0^{s_a} Q_v(\mathbf{r} - s' \Omega, \Omega) \exp \left[- \int_0^{s'} \beta_v(\mathbf{r} - s'' \Omega) ds'' \right] ds'. \quad (3.51)$$

Для определения постоянной интегрирования $J_v(\mathbf{r} - s_a \Omega, \Omega)$ положим $(\mathbf{r} - s_a \Omega, \Omega) = \mathbf{r}_0$, т.е. сопоставим искомую постоянную граничному значению интенсивности

$$J_v(\mathbf{r} - s_a \Omega, \Omega) \Big|_{s_a = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \Gamma_v(\mathbf{r}_0, \Omega). \quad (3.52)$$

С учетом (3.52) уравнение (3.51) приобретает вид

$$J_v(\mathbf{r}, \Omega) = \Gamma_v(\mathbf{r}_0, \Omega) \exp \left[- \int_0^{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \beta_v(\mathbf{r} - s'' \Omega) ds'' \right] + \int_0^{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} Q_v(\mathbf{r} - s' \Omega, \Omega) \exp \left[- \int_0^{s'} \beta_v(\mathbf{r} - s'' \Omega) ds'' \right] ds'. \quad (3.53)$$

Уравнение (3.53) называется *интегральным уравнением переноса теплового излучения*. В частном случае отсутствие рассеяния излучения, $\sigma_v = 0$, из (3.53) получается так называемое *формальное решение уравнения переноса излучения*

$$J_v(\mathbf{r}, \Omega) = \Gamma_v(\mathbf{r}_0, \Omega) \exp \left[- \int_0^{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \kappa_v(\mathbf{r} - s'' \Omega) ds'' \right] + \int_0^{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} J_v^{em}(\mathbf{r}) \exp \left[- \int_0^{s'} \kappa_v(\mathbf{r} - s'' \Omega) ds'' \right] ds'. \quad (3.54)$$

Сравнивая (3.54) с (3.15), несложно убедиться в их тождественности в условиях ЛТР.

3.6. Интегральная форма уравнения переноса излучения для плоского слоя применительно к задачам физики звездных фотосфер. Задача Милна

Проблема расчета переноса излучения в плоском неоднородном светорассеивающем слое была сформулирована в работе (Milne E.A., 1921) применительно к задаче определения излучательной способности звездных фотосфер.

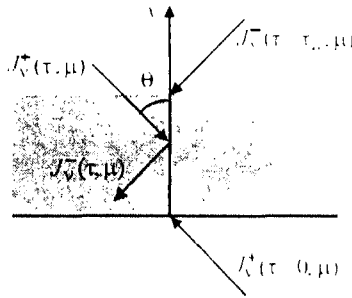


Рис. 3.10. К постановке задачи Милна

Для изотропного рассеяния уравнение переноса излучения в одномерной плоской геометрии (рис. 3.10) имеет вид (индекс спектральной зависимости опущен)

$$\mu \frac{dJ(\tau, \mu)}{d\tau} + J(\tau, \mu) = J_{\text{em}}^{\text{int}}(\tau) + \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 J(\tau, \mu') d\mu', \quad (3.55)$$

где $\tau = \int_0^x \beta(x') dx'$, $\mu = \cos\theta$, $\omega = \frac{\sigma(x)}{\kappa(x) + \sigma(x)}$,

$J_{\text{em}}^{\text{int}}(\tau)$ – интенсивность собственного излучения среды.

Граничные условия для уравнения (3.55) формулируются в виде

$$\tau = 0, \quad \mu > 0: J(0, \mu) = J_0^+ F_0(\mu); \quad (3.56)$$

$$\tau = \tau_H, \quad \mu < 0: J(\tau_H, \mu) = J_H^- F_H(\mu). \quad (3.57)$$

Для сформулированной задачи несложно определить величину интенсивности излучения, обусловленного внешними источниками, приходящего в любую точку τ .

$$J^{\text{ext}}(\tau) = \frac{\omega}{2} J_0^+ \int_0^1 F_0(\mu) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) d\mu + \frac{\omega}{2} J_H^- \int_{-1}^0 F_H(\mu) \exp\left(-\frac{\tau_H - \tau}{\mu}\right) d\mu. \quad (3.58)$$

Вводится эффективная функция источников излучения:

$$J_{\text{em}}(\tau) = J_{\text{em}}^{\text{int}}(\tau) + J^{\text{ext}}(\tau) + \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 J(\tau, \mu') d\mu'. \quad (3.59)$$

Тогда в новой формулировке уравнение переноса излучения имеет вид

$$\mu \frac{dJ(\tau, \mu)}{d\tau} + J(\tau, \mu) = J_{\text{em}}(\tau) \quad (3.60)$$

с граничными условиями

$$\tau = 0, \quad \mu > 0: J(0, \mu) = 0, \quad (3.61)$$

$$\tau = \tau_H, \quad \mu < 0: J(\tau_H, \mu) = 0. \quad (3.62)$$

Формальное решение уравнения (3.60) выглядит следующим образом

$$J(\tau, \mu) = \int_0^\tau J_{\text{em}}(\tau') \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\mu}\right) \frac{d\tau'}{\mu}, \quad \mu > 0, \quad (3.63)$$

$$J(\tau, \mu) = - \int_\tau^{\tau_H} J_{\text{em}}(\tau') \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\mu}\right) \frac{d\tau'}{\mu}, \quad \mu < 0. \quad (3.64)$$

Подставляя (3.63) и (3.64) в (3.59) находим интегральное уравнение для эффективной функции источников

$$J_{em}(\tau) = \frac{\omega}{2} \left[\int_0^{\tau} \int_0^1 J_{em}(\tau') \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\mu}\right) \mu^{-1} d\mu d\tau - \int_{\tau}^{\tau_H} \int_{-1}^1 J_{em}(\tau') \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\mu}\right) \mu^{-1} d\mu \right] + J_{em}^{int}(\tau) + J^{ext}(\tau). \quad (3.65)$$

Уравнение (3.65) можно представить в более компактной форме:

$$J_{em}(\tau) = \frac{\omega}{2} \int_0^{\tau_H} E_1(|\tau-\tau'|) J_{em}(\tau') d\tau' + J_{em}^{int}(\tau) + J^{ext}(\tau), \quad (3.66)$$

где E_1 – интегроэкспоненциальная функция первого порядка.

При $J_{em}^{int}(\tau) = 0$, $\tau_H \rightarrow \infty$, $\omega = 1$ получается частный вид уравнения (3.66):

$$J_{em}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} J_{em}(\tau') E_1(|\tau-\tau'|) d\tau' + J^{ext}(\tau). \quad (3.67)$$

Уравнение (3.67), называемое *уравнением Милна* – одно из основополагающих уравнений теории переноса излучения, играющее чрезвычайно важную роль в ее развитии.

Интегральное уравнение переноса применительно к неравновесной плазме независимо сформулировано в работах (Биберман Л.М., 1947, 1949; Holstein Т., 1947). Методы решения интегральных уравнений переноса излучения анализируются в работе (Марчук Г.И., 1961; Соболев В.В., 1972).

3.7. Феноменологический вывод уравнения переноса излучения

В настоящем разделе рассмотрен простейший феноменологический вывод уравнения лучистого переноса (3.1) в приближении когерентного рассеяния. Указанный вывод состоит в установлении баланса лучистой энергии, пронизывающей некоторый элементарный физический объем среды. Уравнение формулирует-

ся относительно спектральной интенсивности излучения $J_\nu = J_\nu(s, \Omega, t)$ в точке пространства с координатами s .

Рассмотрим распространение энергии излучения в пределах элементарного телесного угла $d\Omega$ с осью Ω , совпадающей с направлением координаты s . Выделим элементарный физический объем в форме усеченного конуса с осью s и площадью поперечного сечения dF (рис. 3.11). С точностью до бесконечно малых величин ds усеченный конус представим в виде цилиндра с площадью основания $dF = s^2 d\Omega$.

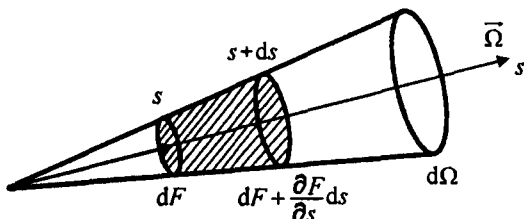


Рис. 3.11. К феноменологическому выводу уравнения переноса излучения

Пользуясь определением спектральной интенсивности излучения, найдем, что величина

$$\begin{aligned} Q_\nu dF d\Omega dv dt ds &= \\ &= [J_\nu(s + ds, \Omega, t) - J_\nu(s, \Omega, t)] dF d\Omega dv dt ds = \\ &= \frac{dJ_\nu(s, \Omega, t)}{ds} dF d\Omega dv dt = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial J_\nu}{\partial t} + \frac{\partial J_\nu}{\partial s} \right) dF d\Omega dv dt \quad (3.68) \end{aligned}$$

есть изменение лучистой энергии в элементарном физическом объеме за время dt . Постулируется, что это изменение происходит вследствие поглощения или испускания излучения, а также из-за его рассеяния. Причем рассеяние излучения может приводить как к потерям, так и восполнению энергии контрольного элементарного физического объема.

Энергетический баланс объема запишем в интегральном виде

$$Q_\nu = -Q_\nu^a - Q_\nu^{sc-} + Q_\nu^e + Q_\nu^{sc+}, \quad (3.69)$$

где Q_v^a , Q_v^{sc-} характеризуют убыль энергии за счет поглощения излучения и рассеяния в направлениях, не совпадающих с Ω ; Q_v^e , Q_v^{sc+} задают источники энергии, обусловленные испусканием и светорассеянием в направлении Ω .

Введенные в п. 1.2 феноменологические коэффициенты переноса позволяют описать слагаемые в (3.69).

Коэффициент поглощения $\kappa_v(s)$ определен как величина, равная доле падающего излучения, поглощенного веществом на единице длины пути, поэтому $Q_v^a = \kappa_v(s) J_v(s, \Omega, t)$.

Мощность собственного излучения среды, отнесенная к единице объема, единице телесного угла и единичному интервалу волновых чисел, определяется спектральным объемным коэффициентом излучения (см. п. 1.2), который является искомым слагаемым Q_v^e . В условиях локального термодинамического равновесия справедлив закон Кирхгофа, связывающий испускание с поглощением

$$Q_v^e = \kappa_v(s) J_{bv}(T) .$$

Ослабление излучения за счет светорассеяния описывается коэффициентом рассеяния $\sigma_v(s)$ (1.14), который определяется как доля падающего излучения, рассеянного веществом во всех направлениях. Та часть излучения, которая рассеивается в направлении Ω , не должна входить в стоки энергии, поэтому она учитывается отдельно. Таким образом, $Q_v^{sc-} = \sigma_v(s) J_v(s, \Omega, t)$.

Для описания источников энергии, обусловленных рассеянием излучения, падающего на элементарный объем со всевозможных направлений, необходимо вводить интегральное слагаемое

$$Q_v^{sc+} = \frac{\sigma_v(s)}{4\pi} \int_{4\pi} \gamma_v(\Omega', \Omega) J_v(s, \Omega', t) d\Omega' , \quad (3.70)$$

где $\gamma_v(\Omega', \Omega)$ – спектральная индикатриса рассеяния.

Величина $\gamma_v(\Omega', \Omega) d\Omega/4\pi$ является вероятностью того, что излучение, падающее в направлении Ω' , будет рассеяно в телесный угол $d\Omega$ с направлением Ω . Значит, если в некоторой точке элементарного физического объема рассеивается доля

$\sigma_v(s) J_v(s, \Omega', t) d\Omega'$ излучения, падающего в телесном угле $d\Omega'$, то в направлении Ω будет рассеяно количество энергии, равное

$$\frac{\gamma_v(\Omega', \Omega) d\Omega \sigma_v(s) J_v(s, \Omega', t) d\Omega'}{4\pi}$$

Интегрирование по всему телесному углу направлений Ω' и отнесение к $d\Omega$ дает искомую формулу (3.70). Здесь, как уже отмечалось в п. 3.1, предполагается, что рассеяние происходит только по направлениям, а энергетическое взаимодействие фотонов с рассеивающим центром, приводящее к изменению частоты излучения, отсутствует (приближение *когерентного рассеяния*).

Подставляя полученные соотношения в (3.68), получаем искомое уравнение переноса

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial J_v(s, \Omega, t)}{\partial t} + \frac{\partial J_v(s, \Omega, t)}{\partial s} + \\ + \kappa_v(s) J_v(s, \Omega, t) + \sigma_v(s) J_v(s, \Omega, t) = \kappa_v(s) J_{b,v}[T(s)] + \\ + \frac{\sigma_v(s)}{4\pi} \int_{4\pi} \gamma_v(\Omega', \Omega) J_v(s, \Omega', t) d\Omega'. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Пренебрегая нестационарностью процесса переноса лучистой энергии, в дальнейшем первое слагаемое в левой части (3.71) опустим.

Несмотря на то что интегро-дифференциальное уравнение (3.71) имеет ясный физический смысл, оно является чрезвычайно сложным для решения. Это уравнение обычно решают либо численными методами, либо вводят упрощающие допущения относительно закономерностей изменения феноменологических коэффициентов переноса $\kappa_v(s)$, $\sigma_v(s)$, $\gamma_v(\Omega', \Omega)$. Широко используют следующие приближения:

- изотропно рассеивающей среды — $\gamma_v(\Omega', \Omega) = 1$
- дельта-рассеивающей среды — $\gamma_v(\Omega', \Omega) = \delta(\Omega', \Omega)$
- нерассеивающей среды — $\sigma_v(s) = 0$

непоглощающей среды	–	$\kappa_v(s) = 0$
неизлучающей среды	–	$J_{bv}(T) = 0$.

3.8. Граничные условия, формулируемые для уравнения переноса излучения

Для решения уравнения переноса селективного излучения требуется сформулировать граничные условия. Различные виды граничных условий применительно к задачам динамики излучающего газа рассмотрены в работах (Адрианов В.Н., 1972; Адзериго К.С., 1975; Бай Ши-и, 1968; Оцисик М.Н., 1976; Четверушкин Б.Н., 1985). Остановимся лишь на наиболее распространенных случаях граничных условий.

Встречаются два основных типа моделей поверхностей, ограничивающих объем, внутри которого рассматривается перенос лучистой энергии. Первый вид поверхности – свободная поверхность, не вносящая каких-либо возмущений в процесс распространения энергии излучением (например, в задачах об излучении струй продуктов сгорания). Второй вид поверхности – это граница раздела фаз с относительным показателем преломления, не равным единице. Поверхность второго вида может испускать излучение, отражать и частично пропускать его.

Необходимости в определении вида граничных поверхностей нет только в одном случае, когда средняя длина свободного пробега квантов излучения пренебрежимо мала по сравнению с характерным размером (случай оптически толстой среды). В этом случае граничное условие для излучения вообще можно не формулировать, а воспользоваться приближением лучистой теплопроводности. Однако, в последнем случае необходимо формулировать граничное условие для температуры.

На свободной границе задается спектральная интенсивность излучения, падающего на объем извне. Частным случаем граничных условий является отсутствие падающего на объем излучения. Пусть dA – элемент свободной поверхности S с внешней нормалью \mathbf{n} (рис. 3.12). Граничное условие формулируется относитель-

но спектральной интенсивности внешнего излучения, т.е. в виде заданной функции J_v^0 угловых и пространственных переменных

$$J_v^-(s, \mathbf{n}) = J_v^0(s, \varphi, \theta), \quad (\Omega, \mathbf{n}) < 0, \quad (3.72)$$

где φ, θ – азимутальный и широтный углы в системе координат, связанной с \mathbf{n} . Верхний индекс минус у интенсивности излучения напоминает о том, что излучение, входящее в объем, заполняет нижнюю полусферу направлений относительно вектора \mathbf{n} .

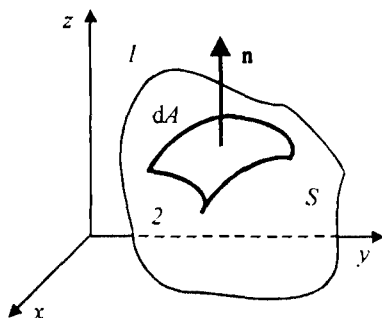


Рис. 3.12. К формулировке граничных условий на границе раздела двух сред

Частные виды граничного условия (3.72):

- 1) $J_v^0(s, \varphi, \theta) = 0$ – поток излучения от внешних источников отсутствует (со стороны среды 1 в направлении среды 2);
- 2) $J_v^0(s, \varphi, \theta) = \overline{J_v^0} \delta(\theta - \theta_0)$ – плоскопараллельный поток излучения;
- 3) $J_v^0(s, \varphi, \theta) = \overline{J_v^0}$ – диффузный поток излучения.

При решении задач динамики излучающего газа в бесконечной среде с асимптотическим стремлением температуры от исследуемого объекта к бесконечности ($T \rightarrow T_\infty$) следует задавать интенсивность фонового излучения в форме $J_v^0(s, \varphi, \theta) = J_{bv}(T_\infty)$.

Граничные поверхности, вносящие возмущения в процесс распространения излучения, подразделяют на гладкие и шероховатые. В первом случае выполняются законы Френеля и Снелла (Борн М. и др., 1973), при этом отраженные и преломленные лучи

лежат в одной плоскости с падающим и характеризуются одними значениями углов падения и отражения. Во втором случае отраженные и преломленные лучи могут лежать в различных плоскостях и характеризуются множеством широтных и азимутальных углов.

Рассмотрим обобщенный вид граничного условия, не детализируя специфические особенности поверхностей. Считается, что интенсивность излучения, отходящего от границы раздела сред 1 и 2, может состоять из трех составляющих (рис. 3.13):

$$\begin{aligned}
 J_v^+(s, \varphi, \theta) &= \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{\pi/2}^{\pi} J_v^-(s, \varphi', \theta') R_v(s; \varphi', \theta'; \varphi, \theta) \sin\theta' \cos\theta' d\theta' + \\
 &+ (1 - \delta_n) \epsilon_v(s, \varphi, \theta) J_{b_v}(T_w) + \\
 &+ \delta_n \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi/2} J_v^0(s, \varphi', \theta') P_v(s; \varphi', \theta'; \varphi, \theta) \sin\theta' \cos\theta' d\theta' = \\
 &= J_v^{\text{отр}} + (1 - \delta_n) J_v^{\text{учп}} + \delta_n J_v^{\text{прон}}.
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

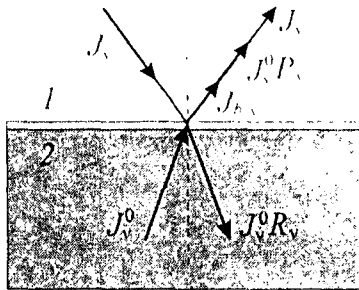


Рис. 3.13. Обобщенные граничные условия

Функции $R_v(s; \varphi', \theta'; \varphi, \theta)$ и $P_v(s; \varphi', \theta'; \varphi, \theta)$ называются *индикатрисами отражения и пропускания*, а $\epsilon_v(s, \varphi, \theta)$ – *спектральной направленной степенью черноты*. Три слагаемых в (3.73) задают спектральную интенсивность отраженного излучения $J_v^{\text{отр}}$, испущенного поверхностью с температурой T_w излуче-

ния $J_v^{\text{исп}}$, а также спектральную интенсивность пропущенного излучения $J_v^{\text{проп}}$. Спектральная индикатриса отражения R_v и спектральная направленная степень черноты ϵ_v были определены в п. 1.3.

При записи формулы (3.73) предполагалось, что реализуется только одна из двух взаимно исключающих ситуаций. Либо граница является непрозрачной для излучения ($\delta_n = 0$), либо прозрачной ($\delta_n = 1$). Очевидно, что использование такой гипотезы не является принципиальным моментом теории, а отражает лишь специфику решаемых задач. Поэтому если в силу конкретной ситуации необходимо учесть как пропускание, так и испускание, то в (3.73) можно исключить множители δ_n и $(1 - \delta_n)$.

Из определения характеристик $R_v(s; \varphi', \theta'; \varphi, \theta)$, $\epsilon_v(s, \varphi, \theta)$, $P_v(s; \varphi', \theta'; \varphi, \theta)$ ясно, что вся специфика граничных поверхностей заключена в соответствующих функциональных зависимостях. Как уже отмечалось, в работах по теории переноса теплового излучения рассматривается ограниченное число моделей поверхностей. Число этих моделей становится совсем малым при решении задач динамики излучающего газа и плазмы. В самом деле, в таких задачах редко проявляется тонкая специфика взаимодействия излучения с поверхностями. Кроме этого, следует учесть большую сложность определения оптических характеристик поверхностей при высоких температурах. Поэтому функции R_v , ϵ_v , P_v упрощают. Обычно предполагают отсутствие их зависимости от φ . В приближении гладкой, зеркально отражающей поверхности

$$R_v = \frac{\delta(\theta' - \theta) r_v(s, \theta')}{2\pi}, \quad P_v = \frac{\delta(\theta' - \theta) q_v(s, \theta', \theta)}{2\pi}, \quad (3.74)$$

$$\epsilon_v = h_v(s, \theta).$$

Зависимости от угла $r_v(s, \theta', \theta)$ и $q_v(s, \theta', \theta)$ имеют простой аналитический вид и следуют из законов зеркального отражения Френеля и Снелла. В приближении диффузной поверхности $R_v = r_v(s)/\pi$, $P_v = q_v(s)/\pi$, $H_v = h_v(s)$. В функции $r_v(s)$, $q_v(s)$, $\epsilon_v(s)$ не входят угловые переменные. Это означает, что

при диффузном отражении, пропускании и испускании энергия распределяется равномерно по всем направлениям.

Представленные граничные условия сформулированы относительно спектральной интенсивности излучения. Однако большое число расчетных методов теории переноса теплового излучения формулируется относительно интегралов от интенсивности излучения по угловым переменным. В этом случае граничные условия вида (3.73) должны быть также предварительно проинтегрированы в соответствующих диапазонах изменения угловых переменных. К сожалению, не всегда переход от интенсивности излучения к усредненным по угловым переменным функциям приводит к точным граничным условиям. Подробно указанные проблемы обсуждаются, например, в главах 5, 6 и 9.

Имеется еще одна проблема формулировки граничных условий на границах раздела сред. Речь идет о задании спектральных оптических свойств реальных поверхностей. Сведения о спектральных излучательных и отражательных способностях различных материалов, в том числе и полупрозрачных, т.е. частично пропускающих излучение, можно почерпнуть из книг (Блох А.Г., 1984; Блох А.Г. и др., 1991; Клименко А.В. и др., 2001; Петров В.А. и др., 1985). При необходимости выбора специальных материалов для спектральных оптических приборов с целью подбора спектральных диапазонов пропускания излучения следует обратиться к специализированным каталогам, которые можно отыскать в специальной литературе и Интернете.

ГЛАВА 4

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАДИАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Феноменологическое введение квантовых понятий в теорию переноса излучения

Основным противоречием теории радиационного переноса является то, что она базируется как на классических феноменологических, так и на квантово-механических и квантово-электродинамических представлениях о характере взаимодействия излучения с частицами вещества.

Основное уравнение теории – уравнение переноса (3.1) является феноменологическим. Оно выражает в интегральном виде баланс энергии излучения в элементарном физическом объеме. Феноменологическими являются и коэффициенты, входящие в это уравнение.

Если при описании поля спектрального излучения все спектральные коэффициенты в уравнении переноса ($\kappa_\nu(s)$, $\sigma_\nu(s)$, $\gamma_\nu(s; \Omega', \Omega)$, $J_\nu^{\text{em}}(s)$) являются известными функциями координат пространства, или используемые допущения о термодинамической модели среды таковы, что указанные коэффициенты могут быть вычислены в любой наперед заданной точке пространства по известным термодинамическим параметрам среды, то задача переноса излучения может быть решена без привлечения каких-либо дополнительных знаний о физических закономерностях процесса. Например, в модели локального термодинамического равновесия эти функции можно предварительно рассчитать и представить в виде таблиц, входными параметрами которых является любая па-

ра термодинамических параметров (давление и температура, плотность и температура и т.п.).

В общем случае для определения указанных коэффициентов в уравнении переноса необходимо привлекать квантово-механические понятия о взаимодействии излучения с веществом и теории квантовых переходов в частицах среды.

Переход от одного уровня описания к другому производится посредством введения феноменологических квантовых коэффициентов Эйнштейна.

4.1.1. Коэффициенты Эйнштейна

Предполагается, что среда состоит из частиц (атомов, молекул, ионов), каждая из которых может находиться в различных энергетических состояниях. Переход между энергетическими состояниями сопровождается поглощением или испусканием квантов электромагнитного излучения.

Рассматривается изолированная частица, имеющая энергетические состояния E_H и E_B ($E_H < E_B$). Эйнштейном определены три феноменологических коэффициента, характеризующих элементарные радиационные процессы с участием этих энергетических состояний:

A_{BH} – вероятность спонтанного радиационного перехода из верхнего квантового состояния в нижнее, s^{-1} . Это так называемый *коэффициент Эйнштейна спонтанного излучения*;

$sB_{BH}U(\nu_{BH})$ – вероятность радиационного перехода из верхнего квантового состояния (E_B) в нижнее (E_H) под действием излучения с объемной плотностью $U(\nu_{BH})$ на частоте $\nu_{BH} = (E_B - E_H)/h$, s^{-1} . Это так называемая *вероятность вынужденного излучения*;

$sB_{HB}U(\nu_{HB})$ – вероятность радиационного перехода из нижнего квантового состояния (E_H) в верхнее (E_B) под действием излучения с объемной плотностью $U(\nu_{HB})$ на частоте $\nu_{HB} = \nu_{BH} = (E_B - E_H)/h$, s^{-1} . Это так называемая *вероятность вынужденного поглощения*.

Здесь $U(\nu)$ – объемная плотность спектральной лучистой энергии, эрг·с/см³; $B_{\text{вн}}(\nu_{\text{вн}})$, $B_{\text{нв}}(\nu_{\text{нв}})$ – коэффициенты Эйнштейна вынужденного излучения (испускания) и вынужденного поглощения соответственно, см²/эрг·с.

4.1.2. Связь между коэффициентами Эйнштейна

Между коэффициентами Эйнштейна установлена следующая связь

$$g_{\text{н}} B_{\text{нв}} \equiv g_{\text{в}} B_{\text{вн}}, \quad (4.1)$$

$$A_{\text{вн}} = \frac{2h\nu_{\text{вн}}^3}{c_0^2} B_{\text{вн}}, \quad (4.2)$$

где $g_{\text{н}}$, $g_{\text{в}}$ – статистические веса нижнего и верхнего энергетических уровней. Соотношение (4.1) и (4.2) являются следствием термодинамического равновесия в двухуровневой квантовой системе (Фриш С.Э., 1963; Блохинцев Д.И., 1976; Давыдов А.С., 1973; Фок В.А., 1976; Шпольский Э.В., 1974).

4.1.3. Скорости элементарных радиационных процессов

Скорость квантовых переходов из нижнего состояния в верхнее определяется по формуле

$$\left(\frac{dn_{\text{н}}}{dt} \right)_{\text{н} \rightarrow \text{в}} = B_{\text{нв}} n_{\text{н}} c U(\nu_{\text{нв}}) = B_{\text{нв}} n_{\text{н}} \int_{\Omega=4\pi} J_{\nu=\nu_{\text{нв}}}(\Omega) d\Omega, \quad (4.3)$$

где $n_{\text{н}}$ – число частиц в 1 см³ на нижнем энергетическом уровне.

Скорость квантовых переходов из верхнего состояния в нижнее определяется по формуле

$$\begin{aligned} \left(\frac{dn_{\text{в}}}{dt} \right)_{\text{в} \rightarrow \text{н}} &= 4\pi n_{\text{в}} A_{\text{вн}} + c B_{\text{вн}} n_{\text{в}} U(\nu_{\text{вн}}) = \\ &= 4\pi n_{\text{в}} A_{\text{вн}} + B_{\text{вн}} n_{\text{в}} \int_{\Omega=4\pi} J_{\nu=\nu_{\text{вн}}}(\Omega) d\Omega, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $n_{\text{в}}$ – число частиц в 1 см³ на верхнем энергетическом уровне.

В условиях радиационного равновесия

$$\left(\frac{dn_{\text{H}}}{dt}\right)_{\text{H} \rightarrow \text{B}} = \left(\frac{dn_{\text{B}}}{dt}\right)_{\text{B} \rightarrow \text{H}} \quad (4.5)$$

выполняется следующее соотношение детального баланса

$$cB_{\text{HB}}n_{\text{H}}U(\nu_{\text{HB}}) = 4\pi n_{\text{B}}A_{\text{BH}} + cB_{\text{BH}}n_{\text{B}}U(\nu_{\text{BH}}), \quad (4.6)$$

$$\nu_{\text{HB}} = \nu_{\text{BH}}.$$

Скорости квантовых переходов из нижнего энергетического состояния в верхнее (4.3) и из верхнего состояния в нижнее (4.4) сформулированы для случая квантовых переходов между дискретными энергетическими состояниями. Однако из-за возмущений, вызываемых окружающими атомами и ионами, а также из-за конечности времени жизни частицы на верхнем возбужденном уровне существует некоторый разброс частот, в пределах которого возможен квантовый переход. Спектральная линия, соответствующая квантовому переходу, не является бесконечно тонкой (дельта-функцией частоты излучения). Распределение вероятности поглощения (испускания) в пределах линии описывается спектральной функцией профиля поглощения (испускания) $f(\nu)$. В общем случае она различная для поглощения и испускания.

Если в пределах спектральной линии частотная зависимость поля излучения $J_{\nu}(\Omega)$ изменяется сильно, то вместо (4.3) и (4.4) необходимо использовать

$$\left(\frac{dn_{\text{H}}}{dt}\right)_{\text{H} \rightarrow \text{B}} = \int_0^{\infty} f(\nu) B_{\text{HB}}n_{\text{H}}cU(\nu) d\nu, \quad (4.7)$$

$$\left(\frac{dn_{\text{B}}}{dt}\right)_{\text{B} \rightarrow \text{H}} = \int_0^{\infty} f(\nu) \left[4\pi n_{\text{B}}A_{\text{BH}} + B_{\text{BH}}n_{\text{B}} \int_{\Omega=4\pi} J_{\nu}(\Omega) d\Omega \right] d\nu. \quad (4.8)$$

В предположении о слабом изменении спектральной зависимости интенсивности излучения в пределах спектральной линии $\Delta\nu$ и при использовании условия нормировки

$$\int_{\Delta\nu} f(\nu) d\nu \approx \int_0^{\infty} f(\nu) d\nu = 1 \quad (4.9)$$

получаются формулы (4.3) и (4.4).

4.1.4. Связь феноменологических коэффициентов поглощения и излучения с коэффициентами Эйнштейна

Связь между феноменологическим спектральным коэффициентом объемного поглощения и коэффициентом Эйнштейна вынужденного поглощения $B_{\text{НВ}}$ устанавливается из соотношения, выражающего темп убывания спектральной энергии из падающей на единичный объем лучистой энергии со всех направлений

$$\kappa_{\nu} \int_{\Omega=4\pi} J_{\nu}(\Omega) d\Omega = n_{\text{Н}} c B_{\text{НВ}} U(\nu) h\nu f_{\text{НВ}}(\nu) \quad (4.10)$$

или
$$\kappa_{\nu} = n_{\text{Н}} h\nu B_{\text{НВ}} f_{\text{НВ}}(\nu), \quad (4.11)$$

где $f_{\text{НВ}}(\nu)$ – спектральная функция профиля поглощения, определяющая долю частиц $n_{\text{Н}}^*$, способных поглощать энергию на частоте ν :

$$f_{\text{НВ}}(\nu) = n_{\text{Н}}^* / n_{\text{Н}}. \quad (4.12)$$

Спектральная функция профиля поглощения удовлетворяет следующему очевидному условию нормировки:

$$\int_0^{\infty} f_{\text{НВ}}(\nu) d\nu = 1. \quad (4.13)$$

Собственная спектральная излучательная способность единицы объема (спектральный объемный коэффициент излучения) связана с коэффициентами Эйнштейна спонтанного и вынужденного излучения следующим образом:

$$J_{\nu}^{\text{ем}} = n_{\text{В}} h\nu f_{\text{ВН}}(\nu) \left[A_{\text{ВН}} + B_{\text{ВН}} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} J_{\nu}(\Omega) d\Omega \right], \quad (4.14)$$

где $f_{\text{вн}}(\nu)$ – спектральная функция профиля излучения, определяющая долю частиц $n_{\text{в}}^*$, способных испускать энергию на частоте ν :

$$f_{\text{вн}}(\nu) = \frac{n_{\text{в}}^*}{n_{\text{в}}}. \quad (4.15)$$

Спектральная функция профиля испускания удовлетворяет следующему очевидному условию нормировки:

$$\int_0^{\infty} f_{\text{вн}}(\nu) d\nu = 1. \quad (4.16)$$

В условиях термодинамического равновесия

$$J_{\nu}(\Omega) = J_{\text{в},\nu}(T),$$

$$n_{\text{в}} = n_{\text{н}} \frac{g_{\text{в}}}{g_{\text{н}}} \exp\left(-\frac{h\nu_{\text{вн}}}{kT}\right), \quad f_{\text{вн}}(\nu) = f_{\text{нв}}(\nu),$$

поэтому $J_{\nu}^{\text{эм}} = n_{\text{н}} f_{\text{нв}}(\nu) h\nu B_{\text{нв}} J_{\text{в},\nu} = \kappa_{\nu} J_{\text{в},\nu}. \quad (4.17)$

Здесь при формулировке связи феноменологических коэффициентов переноса с коэффициентами Эйнштейна предполагалось, что все поглощение и все испускание излучения на данной частоте обусловлено только квантовыми переходами внутри частиц одного сорта, число которых в нижнем и верхнем энергетических состояниях в единице объема равно соответственно $n_{\text{н}}$ и $n_{\text{в}}$.

Соотношения (4.11) и (4.14) служат для определения феноменологических спектральных дифференциальных сечений поглощения и испускания соответственно

$$\sigma_{\nu,a} = \frac{\kappa_{\nu}}{n_{\text{н}}} = h\nu B_{\text{нв}} f_{\text{нв}}(\nu), \quad (4.18)$$

$$\sigma_{\nu,e} = \frac{J_{\nu}^{\text{эм}}}{n_{\text{в}}} = h\nu f_{\text{вн}}(\nu) \left[A_{\text{вн}} + B_{\text{вн}} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} J_{\nu}(\Omega) d\Omega \right]. \quad (4.19)$$

Феноменологическое спектральное дифференциальное сечение поглощения $\sigma_{v,a}$ определяется как спектральный коэффициент поглощения в расчете на одну частицу, находящуюся на нижнем энергетическом уровне.

Феноменологическое спектральное дифференциальное сечение излучения $\sigma_{v,e}$ определяется как спектральный коэффициент излучения в расчете на одну частицу, находящуюся на верхнем энергетическом уровне.

Феноменологические объемные спектральные коэффициенты поглощения и излучения для частиц k -го сорта определяются по формулам

$$\kappa_{v,k} = \sum_{a=1}^{N_a^k} \sum_{i=1}^{N_i^k} n_{k,i} (\sigma_{v,a})_i^k, \quad (4.20)$$

$$J_{v,k}^{em} = \sum_{e=1}^{N_e^k} \sum_{i=1}^{N_i^k} n_{k,i} (\sigma_{v,e})_i^k, \quad (4.21)$$

где N_a^k – число элементарных процессов поглощения, протекающих с участием частиц k -го сорта; N_i^k – число энергетических состояний у частиц k -го сорта, находясь на которых частица может принять участие в квантовом радиационном переходе a -го типа; i – индекс энергетического уровня;

$(\sigma_{v,a})_i^k = h\nu (B_{нв,a})_i^k [f_{нв,a}(\nu)]_i^k$ – спектральное дифференциальное сечение поглощения квантового перехода a -го типа с i -го энергетического уровня для частиц k -го сорта;

$(\sigma_{v,e})_i^k = h\nu \left[(A_{вн,e})_i^k + (B_{вн,e})_i^k \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} J_\nu(\Omega) d\Omega \right] \cdot [f_{вн,e}(\nu)]_i^k$ –

спектральное дифференциальное сечение излучения для квантового перехода e -го типа с i -го энергетического уровня для частиц k -го сорта;

$(A_{вн,e})_i^k, (B_{вн,e})_i^k$ – коэффициенты Эйнштейна для квантового перехода e -го типа с i -го энергетического уровня для частиц k -го сорта;

$(B_{\text{нв},a})_i^k$ – коэффициент Эйнштейна для квантового перехода a -го типа с i -го энергетического уровня для частиц k -го сорта;

$[f_{\text{нв},a}(v)]_i^k, [f_{\text{вн},e}(v)]_i^k$ – спектральные функции профиля поглощения и излучения для a -го (e -го) квантового перехода с i -го энергетического уровня для частиц k -го сорта.

Феноменологические объемные спектральные коэффициенты поглощения и излучения для смеси частиц, каждая из которых может принимать участие в радиационных процессах посредством разных квантовых переходов, определяются с использованием принципа аддитивности

$$\kappa_v = \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_{v,k} = \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{a=1}^{N_a^k} \sum_{i=1}^{N_i^k} n_{k,i} (\sigma_{v,a})_i^k, \quad (4.22)$$

$$J_v^{em} = \sum_{k=1}^{N_k} J_{v,k}^{em} = \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{e=1}^{N_e^k} \sum_{i=1}^{N_i^k} n_{k,i} (\sigma_{v,e})_i^k, \quad (4.23)$$

где N_k – число сортов частиц, принимающих участие в элементарных радиационных процессах.

Феноменологическое спектральное полное сечение поглощения (или просто спектральное сечение поглощения) радиационного процесса a -го типа для частицы k -го сорта определяется по формуле

$$(\kappa_{v,a})_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{N_i^k} n_{k,i} (\sigma_{v,a})_i^k. \quad (4.24)$$

Феноменологическое спектральное полное сечение излучения (или просто спектральное сечение излучения) для частицы k -го сорта определяется по формуле

$$(\kappa_{v,e})_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{N_i^k} n_{k,i} (\sigma_{v,e})_i^k. \quad (4.25)$$

Установленные соотношения между феноменологическими коэффициентами переноса излучения и коэффициентами Эйнштейна справедливы для любых типов квантовых переходов (связанно-связанных, связанно-свободных, свободно-связанных, свободно-свободных).

4.1.5. Приближение полного перераспределения по частотам

В приближении полного перераспределения по частотам, справедливого при термодинамическом равновесии, спектральные функции профилей поглощения и излучения тождественно равны

$$f_{\text{НВ}}(\nu) \equiv f_{\text{ВН}}(\nu). \quad (4.26)$$

4.1.6. Спектральный объемный коэффициент поглощения с поправкой на вынужденное излучение

С учетом коэффициентов Эйнштейна $A_{\text{ВН}}, B_{\text{ВН}}, B_{\text{НВ}}$ уравнение переноса излучения может быть записано в общем случае неравновесных радиационных процессов в следующем виде (без учета процессов светорассеяния):

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{\nu}(s, \Omega, t)}{\partial s} + n_{\text{Н}} h \nu B_{\text{НВ}} f_{\text{НВ}}(\nu) J_{\nu}(s, \Omega, t) = \\ = n_{\text{В}} h \nu f_{\text{ВН}}(\nu) \left[A_{\text{ВН}} + B_{\text{ВН}} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} J_{\nu}(s, \Omega, t) d\Omega \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

В предположении об изотропности поля излучения для оценки интеграла в правой части, уравнение переноса формулируется в виде

$$\frac{\partial J_{\nu}(s, \Omega, t)}{\partial s} + \kappa'_{\nu}(s) J_{\nu}(s, \Omega, t) = J_{\nu}^{\text{em}}(s, t), \quad (4.28)$$

где
$$\kappa'_{\nu} = n_{\text{Н}} h \nu B_{\text{НВ}} f_{\text{НВ}}(\nu) \left(1 - \frac{n_{\text{В}} f_{\text{ВН}} g_{\text{Н}}}{n_{\text{Н}} f_{\text{НВ}} g_{\text{В}}} \right), \quad (4.29)$$

$$J_{\nu}^{\text{em}}(s, t) = n_{\text{в}} h\nu f_{\text{вн}}(\nu) A_{\text{вн}}. \quad (4.30)$$

Коэффициент κ'_{ν} называется *спектральным объемным коэффициентом поглощения с поправкой на вынужденное излучение*.

В условиях термодинамического равновесия

$$n_{\text{в}} = n_{\text{н}} \frac{g_{\text{в}}}{g_{\text{н}}} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right), \quad (4.31)$$

поэтому спектральный объемный коэффициент поглощения с поправкой на вынужденное излучение (4.29) имеет следующий вид:

$$\kappa'_{\nu} = n_{\text{н}} h\nu B_{\text{нв}} f_{\text{нв}}(\nu) \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]. \quad (4.32)$$

4.1.7. Спектральная функция источников в линии

Спектральная функция источников в линии определяется по формуле (в отсутствии рассеяния)

$$S_{\nu}(s, t) = \frac{J_{\nu}^{\text{em}}(s, t)}{\kappa'_{\nu}} = \left(\frac{2h\nu^3}{c_0^2}\right) \left/ \left(\frac{g_{\text{в}} n_{\text{н}} f_{\text{нв}}}{g_{\text{н}} n_{\text{в}} f_{\text{вн}}} - 1\right)\right. \quad (4.33)$$

В приближении полного перераспределения по частотам, в соответствии с тождеством (4.26)

$$S_{\nu}(s, t) = \left(\frac{2h\nu^3}{c_0^2}\right) \left/ \left(\frac{g_{\text{в}} n_{\text{н}}}{g_{\text{н}} n_{\text{в}}} - 1\right)\right. \quad (4.34)$$

В приближении термодинамического равновесия спектральная функция источников в линии совпадает со спектральной интенсивностью излучения абсолютно черного тела

$$S_{\nu}(s, t) = J_{b, \nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c_0^2 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}. \quad (4.35)$$

4.2. Общие сведения о способах расчета вероятностей квантовых переходов

Между вероятностями квантовых переходов (коэффициентов Эйнштейна) существует связь вида (4.1), (4.2). Поэтому для расчета той или иной вероятности обычно выбирают наиболее простой способ расчета какого-либо из коэффициентов, а затем используют формулы (4.1), (4.2).

Существуют три последовательно усложняющихся уровня сложности расчета вероятностей квантовых переходов.

1-й уровень. Квантовый переход рассматривается в приближении классического атома и классического электромагнитного поля. Электрон в атоме считается затухающим гармоническим осциллятором, возбуждаемым электромагнитным полем. Для вероятности квантового перехода в поглощении получается формула, в которую асимптотически переходит любая другая формула, полученная при меньшем числе допущений. Числовые значения, рассчитываемые по данной формуле, имеют правильную размерность и для сильных линий оказываются достаточно точными.

2-й уровень. Квантовый переход рассматривается в приближении квантово-механического атома и классического электромагнитного поля. Это приближение дает правильные выражения для вероятностей вынужденного поглощения и вынужденного излучения ($B_{\text{нв}}, B_{\text{вн}}$). Величина вероятности спонтанного излучения ($A_{\text{вн}}$) в этой теории не появляется, поэтому ее вычисляют с использованием формул (4.1), (4.2).

3-й уровень. Квантовый переход рассматривается в модели квантово-механический атом и квантованное электромагнитное поле. Эта теория является полной, и она дает правильные результаты для всех вероятностей квантовых переходов.

В работах по физической механике и теплообмену излучением для расчетов вероятностей квантовых переходов используются теории 1-го и 2-го уровней. Полное изложение теории 3-го уровня дано в работах (Дирак П., 1964; Гайтлер В., 1956).

4.3. Иерархия моделей описания радиационных процессов

Попытка преодолеть основное противоречие теории радиационного переноса привела к тому, что в эту теорию было введено три уровня описания радиационных процессов.

1. **Квантово-механический** – для нахождения вероятностей квантовых радиационных переходов в отдельно взятых частицах. Именно этот уровень описания квантовых переходов между энергетическими состояниями частиц был представлен в виде трех подуровней, обсуждавшихся в п.4.2.
2. **Статистический** – для нахождения спектральных коэффициентов поглощения и испускания статистических ансамблей частиц.
3. **Феноменологический** – для нахождения полей радиационных характеристик в различных средах, для решения задач собственно радиационного переноса энергии.

Очевидно, что важным вопросом теории переноса излучения является проблема согласования указанных уровней описания процессов.

Для того чтобы перейти от квантово-механического уровня описания к статистическому необходимо привлечь ту или иную термодинамическую или квантово-статистическую *модель состояния среды*, т.е. учесть специфику протекания радиационных процессов в частицах, находящихся во взаимодействии с другими частицами и электромагнитными полями.

Для того чтобы перейти к еще более высокому уровню описания – феноменологическому, необходимо выбрать адекватный изучаемому процессу способ описания радиационного переноса (другими словами, метод решения уравнения переноса излучения) и подготовить соответствующую этому способу *оптическую модель среды* (об оптических моделях см. главу 11).

Каждому из перечисленных уровней описания поставлены в соответствие следующие модели радиационных процессов, которые реализуются в виде расчетных соотношений или компьютер-

ных кодов, используемых при решении задач переноса теплового излучения.

- **Модели 1-го уровня** описания (квантово-механические модели) – это *модели элементарных радиационных процессов*, позволяющие производить расчеты вероятностей элементарных радиационных процессов, т.е. радиационных процессов, сопровождающих переход изолированной частицы из одного энергетического состояния в другое. Здесь же могут рассчитываться сечения отдельных элементарных радиационных процессов для изолированной частицы.
- **Модели 2-го уровня** (статистические модели) – это *модели сечений и коэффициентов поглощения частиц*, принадлежащих статистическому ансамблю, распределение которых по энергетическим состояниям в данном ансамбле определено принятой моделью состояния среды. Следовательно, это модели сечений и коэффициентов, усредненных по распределению частиц по возбужденным энергетическим состояниям.

В условиях локального термодинамического равновесия в качестве такой функции распределения выбирается бoльцмановская функция заселенности энергетических состояний. В моделях 2-го уровня могут также учитываться эффекты, приводящие к отклонению от условий равновесия физико-химических процессов и идеальности среды.

- **Модели 3-го уровня** (феноменологические модели) – это *модели радиационного переноса* и соответствующие им *оптические модели среды*.

В научной и учебной литературе по радиационному переносу нет единообразия в определении понятия *сечения радиационного процесса*. Чаще всего под спектральным сечением поглощения радиационного процесса понимается спектральный объемный коэффициент поглощения, отнесенный к одной частице (т.е. поделенный на объемную концентрацию частиц). Размерность такого сечения поглощения равна см^2 . При этом подразумевается, что спектральный коэффициент получен с использованием предположения о бoльцмановской заселенности возбужденных состояний частиц в исследуемом ансамбле путем суммирования вкладов

элементарных радиационных процессов для всех уровней энергии, принимающих участие в данном радиационном процессе. В данной книге используется понятие сечений элементарных процессов, введенное в п. 4.1.4.

В рамках представленной трехуровневой классификации сечение поглощения, определенное таким образом, относится к моделям 2-го уровня – статистическим моделям. Однако если учесть определения, данные в п. 4.1.4, то сечения радиационного процесса могут быть отнесены одновременно и к классу моделей 1-го уровня. Имеются следующие обоснования для использования такой классификации:

- в отличие от коэффициентов поглощения (испускания) в расчетных соотношениях для определения сечений отсутствуют концентрации поглощающих (излучающих) частиц;
- возможно использование понятий сечений элементарных радиационных процессов, отнесенных как к двум уровням энергии, так и учитывающих вклад всех квантовых переходов.

Исходя из сказанного, далее будем придерживаться следующего соглашения:

1) для того чтобы различать понятия сечений, относящихся к элементарному радиационному процессу и к сумме по этим процессам, используются понятия *дифференциального* и *полного* сечений процесса соответственно, что имеет аналогию в классической теоретической механике и теории столкновения заряженных частиц (Ландау Л.Д. и др., 1974; Ольховский И.И., 1978; Смирнов Б.М., 1968).

2) теория расчета полных сечений радиационных процессов относится к моделям 1-го уровня описания, т.е. к моделям элементарных радиационных процессов. При описании моделей 2-го уровня указывается способ пересчета от сечений к коэффициентам поглощения (излучения).

Представленные уровни описания моделей элементарных радиационных процессов и соответствующие им модели радиационного переноса энергии оказываются весьма важными при выборе метода решения задачи о теплообмене излучением. Ниже эти модели рассмотрены более подробно.

4.3.1. Модели элементарных радиационных процессов

Моделирование элементарных радиационных процессов базируется на рассмотрении процессов поглощения и испускания излучения, как результата взаимодействия фотонов или квантованных электромагнитных волн с веществом (Фриш С.Э., 1963; Ельашевич М.А., 2001; Никифоров А.Ф. и др., 2000).

К элементарным радиационным процессам относятся:

1. Квантовые переходы между *дискретными* («*связанными*») энергетическими состояниями атомов, молекул и их ионов, сопровождаемые поглощением или испусканием квантов электромагнитного излучения (фотонов). Такие переходы называются *связанно-связанными* и обозначаются символом «*b-b*» (от английского термина «bound-bound» transition).

Коэффициенты поглощения или излучения при связанно-связанных переходах представляют собой функции с очень сильной зависимостью от энергии фотона. Этим переходам соответствуют *линейчатые спектры* испускания и поглощения. В одноатомном газе связанно-связанные переходы происходят между различными конфигурациями электронных орбит в поле ядра, обладающими разной энергией. В молекулярных газах связанно-связанные переходы могут сопровождаться изменением как электронных, так и вращательных и колебательных квантовых состояний молекулы. В соответствии с этим могут наблюдаться вращательные, колебательно-вращательные и электроно-колебательно-вращательные спектры поглощения и испускания.

Электронным переходам (точнее: электронно-колебательно-вращательным переходам, поскольку любой электронный переход всегда сопровождается колебательно-вращательными квантовыми переходами) соответствуют *электронные полосы* поглощения или испускания в ультрафиолетовой, видимой и инфракрасной областях спектра. Колебательно-вращательные и вращательные спектры молекул располагаются в инфракрасной и радиочастотной областях.

В задачах теплообмена излучением, физики низкотемпературной плазмы и аэрофизики наибольший интерес представляют

электронно-колебательные и колебательно-вращательные спектры молекул.

2. Квантовые переходы между *дискретными* («связанными») и *непрерывными* («свободными») энергетическими состояниями атомов, молекул и их ионов, сопровождаемые поглощением или испусканием квантов электромагнитного излучения (фотонов). Такие переходы называются *связанно-свободными* или *свободно-связанными* и обозначаются символами « $b-f$ » и « $f-b$ » соответственно («bound-free», «free-bound» transition).

Коэффициенты поглощения при связанно-свободном переходе и коэффициент излучения при свободно-связанном переходе представляют собой непрерывную функцию энергии фотона $h\nu$, ограниченную в области больших энергий. Такие спектры поглощения и испускания называются *сплошными*.

При связанно-свободных переходах в атомах, молекулах и ионах, происходит поглощение фотона, приводящее к *фотоионизации* или *фотодиссоциации* частиц вещества с образованием иона более высокой кратности и свободного электрона или продуктов деления молекулы на атомы или простые молекулы.

Процесс обратный фотоионизации называется *фоторекомбинацией* и состоит в присоединении электрона к иону с образованием иона меньшей кратности или нейтральной частицы, сопровождаемой испусканием фотона. Пороги связанно-свободных и свободно-связанных процессов наблюдаются в ультрафиолетовой, видимой и ближней инфракрасной областях спектра.

3. Квантовые переходы между *непрерывными* («свободными») энергетическими состояниями атомов, молекул и их ионов, сопровождаемые поглощением или испусканием квантов электромагнитного излучения (фотонов). Такие переходы называются *свободно-свободными* и обозначаются символами « $f-f$ » («free-free» transition).

Коэффициенты поглощения или излучения при свободно-свободных переходах представляют собой непрерывные функции энергии фотона $h\nu$. Такие спектры поглощения и испускания называются *сплошными*.

При свободно-свободных квантовых переходах происходит ускорение или торможение электронов в полях атомов, молекул и их ионов, сопровождаемое поглощением или испусканием фотонов. В частности, если при взаимодействии электрона с полем положительного иона или с нейтральной частицей, происходит его торможение, сопровождаемое испусканием фотона, то такое излучение называют *тормозным*. Ускорение электронов в полях частиц при поглощении фотонов называется *процессом излучения, обратным тормозному поглощению*.

В основе классификации компьютерных моделей элементарных радиационных процессов, которая используется для систематизации методов и компьютерных кодов, применяемых в теории радиационного переноса, лежит разделение этих процессов на связанно-связанные, связанно-свободные и свободно-свободные. В пределах каждой группы моделей вводится дополнительное разделение, отражающее специфику радиационных процессов в частицах разного типа, а так же уровень подробности описания характеристик процессов.

Пример классификации моделей элементарных радиационных процессов, обычно принимаемых в учет в теории переноса теплового излучения, представлен ниже. Отдельными пунктами данного классификатора представлены разделы «Модели волновых функций» и «Модели потенциалов взаимодействия ядер двухатомных молекул». Необходимость выделения раздела расчета волновых функций диктуется тем, что основу многих моделей элементарных радиационных процессов составляют именно модели расчета волновых функций соответствующих энергетических состояний. Причем, эффективность расчета последних, как правило, определяет эффективность всей модели элементарных радиационных процессов.

Молекулярные постоянные, по-разному определяемые в различных потенциалах межъядерного взаимодействия, также широко используются в моделях расчета характеристик элементарных радиационных процессов. Поэтому классификация описания наиболее часто используемых потенциалов межъядерного взаимодействия является необходимой.

Классификатор моделей элементарных радиационных процессов

1. Модели связанно-связанных ($b-b$) элементарных радиационных процессов
 - 1.1. Модели вероятностей связанно-связанных переходов в атомах и ионах
 - 1.2. Модели вероятностей связанно-связанных переходов в молекулах и молекулярных ионах
 - 1.2.1. Модели разделения различных типов переходов (электронных, колебательных и вращательных)
 - 1.2.2. Модели вероятностей электронных переходов
 - 1.2.3. Модели вероятностей колебательных переходов
 - 1.2.4. Модели вероятностей вращательных переходов
 - 1.2.5. Модели вероятностей, учитывающие взаимные влияния различных типов переходов
2. Модели связанно-свободных ($b-f$) и свободно-связанных ($f-b$) элементарных радиационных процессов
 - 2.1. Модели фотоионизации атомов и ионов с дискретных энергетических состояний
 - 2.1.1. Модели фотоионизации водородоподобных атомов и ионов
 - 2.1.2. Модели фотоионизации неводородоподобных атомов и ионов
 - 2.1.2.1. Модели фотоионизации с основных состояний
 - 2.1.2.2. Модели фотоионизации с возбужденных состояний
 - 2.1.3. Модели фотоотрыва от отрицательных ионов
 - 2.1.4. Модели фотоионизации молекул
 - 2.1.5. Модели фотодиссоциации молекул
3. Модели свободно-свободных переходов ($f-f$)
 - 3.1. Модели тормозного излучения (поглощения) электронов в полях нейтральных частиц
 - 3.2. Модели тормозного излучения (поглощения) в полях ионов
4. Модели неидентифицированных радиационных процессов
5. Модели элементарных радиационных процессов при участии конденсированной фазы газовых течений
6. Модели волновых функций дискретных и непрерывных энергетических состояний атомов, молекул и их ионов
7. Модели потенциалов взаимодействия ядер двухатомных молекул

4.3.2. Модели статистических радиационных процессов

Статистические модели радиационных процессов предназначены для расчета спектральных сечений и спектральных объемных коэффициентов поглощения и испускания атомов, молекул

и ионов, принадлежащих статистическому ансамблю частиц, т.е. как раз для расчета феноменологических коэффициентов поглощения, испускания и рассеяния, входящих в уравнение переноса излучения. Распределение частиц в ансамбле по возбужденным энергетическим состояниям определяется принятой в каждом конкретном случае термодинамической (статистической) моделью среды. В подавляющем большинстве случаев, представляющих интерес для практических приложений, используются модели, основанные на равновесном (больцмановском) энергетическом распределении частиц.

Пример классификации статистических моделей, используемых в теории радиационного переноса, представлен ниже. Основу классификации составляют признаки разделения по типу спектра поглощения и испускания (линейчатый и непрерывный).

Классификатор статистических моделей радиационного переноса

1. Модели спектральных сечений и коэффициентов поглощения (испускания) в линейчатом спектре
 - 1.1. Модели спектральных коэффициентов поглощения и испускания в атомных линиях
 - 1.2. Модели спектральных коэффициентов поглощения и испускания во вращательных линиях молекулярного спектра
2. Модели спектральных сечений и коэффициентов поглощения (испускания) в непрерывном спектре
 - 2.1. Модели спектральных сечений и коэффициентов поглощения (испускания) при связанно-свободных и свободно-связанных переходах
 - 2.2. Модели спектральных сечений и коэффициентов поглощения (испускания) при свободно-свободных переходах
 - 2.3. Комбинированные модели спектральных сечений и коэффициентов поглощения (испускания) при связанно-свободных (свободно-связанных) и свободно-свободных переходах
3. Модели учета неидеальности плазмы в расчетах спектральных коэффициентов поглощения в линейчатом и сплошном спектре
4. Модели спектральных сечений и коэффициентов поглощения (испускания) усредненных на спектральных участках по линейчатой структуре (физическое усреднение)
 - 4.1. Модели усредненных коэффициентов поглощения (испускания) в полосах двухатомных молекул

- 4.1.1. Модели усреднения по вращательной структуре
- 4.1.2. Модели усреднения по колебательной структуре
- 4.2. Модели усредненных коэффициентов поглощения (испускания) в полосах многоатомных молекул
 - 4.2.1. Модели усреднения по вращательной структуре
 - 4.2.2. Модели усреднения по колебательной структуре
- 5. Спектральные модели оптических коэффициентов конденсированной фазы газовых течений
 - 5.1. Модели расчета коэффициентов поглощения, рассеяния и ослабления
 - 5.1.1. Монодисперсные среды
 - 5.1.2. Полидисперсные среды
 - 5.2. Модели расчета индикатрис рассеяния
 - 5.2.1. Монодисперсные среды
 - 5.2.2. Полидисперсные среды

4.3.3. Феноменологические модели радиационного переноса

Конечной целью использования любой феноменологической модели радиационных процессов является определение полей радиационных характеристик в объемах и (или) на поверхностях, ограничивающих эти объемы.

Для решения этой задачи необходимо использовать два типа феноменологических моделей: оптическую модель среды, радиационную модель среды.

Оптической моделью среды называется феноменологическая модель коэффициентов поглощения, рассеяния и испускания, адекватная используемой форме уравнения переноса излучения и исследуемому физическому процессу.

Радиационной моделью среды называется совокупность термодинамической и оптической моделей, а также модели переноса излучения, обеспечивающих адекватное описание исследуемого физического процесса.

Моделью переноса излучения называется совокупность выбранной формы уравнения переноса и методов его интегрирования по частоте, пространственным переменным и направлениям распространения излучения.

Пример классификации феноменологических моделей радиационного переноса представлен ниже.

Классификатор феноменологических моделей радиационного переноса

1. Оптические модели среды

- 1.1. Модели спектральных сечений и коэффициентов поглощения (испускания) газов и плазмы сложного химического состава
- 1.2. Модели непрерывного спектра, основанные на аналитическом представлении спектральной зависимости
- 1.3. Модели линейчатого спектра, основанные на аналитическом представлении спектральной зависимости
 - 1.3.1. Регулярные и статистические модели спектра атомных линий
 - 1.3.2. Регулярные и статистические модели спектра молекулярных линий
- 1.4. Групповые модели коэффициентов поглощения (испускания)
 - 1.4.1. *Line-by-line* модели
 - 1.4.2. Многогрупповые модели (узкополосные модели)
 - 1.4.3. Малогрупповые модели (широкополосные модели)
- 1.5. Гибридные модели
 - 1.5.1. Атомные линии на фоне групповых моделей
 - 1.5.2. Статистические модели атомных линий на фоне групповых моделей
- 1.6. Модели интегральных коэффициентов поглощения
 - 1.6.1. Средние коэффициенты поглощения по Планку
 - 1.6.2. Средние коэффициенты поглощения по Росселанду
 - 1.6.3. Средние коэффициенты поглощения по Чандрасекхару
 - 1.6.4. Коэффициенты квазидиффузии
 - 1.6.5. Однонаправленные усредненные коэффициенты поглощения (в методах полумоментов и квадромоментов)
- 1.7. Модели степеней черноты
 - 1.7.1. Спектральные степени черноты
 - 1.7.2. Групповые степени черноты
 - 1.7.3. Интегральные степени черноты

2. Модели переноса излучения

- 2.1. Модели расчета усредненных и интегральных по спектру радиационных характеристик
 - 2.1.1. *Line-by-line* метод расчета
 - 2.1.2. Групповой метод расчета
 - 2.1.3. Статистические модели
 - 2.1.3.1. Статистические модели атомных линий

- 2.1.3.2. Статистические модели вращательных линий электронно-колебательных полос
- 2.1.3.3. Статистические модели вращательных линий колебательных полос многоатомных молекул
- 2.1.3.4. Макростатистическая модель колебательных полос многоатомных молекул
- 2.1.4. Модель Томаса – Пеннера
- 2.1.5. Метод эффективных сечений
- 2.1.6. Метод моментов Шмыглевского
- 2.1.7. Лебегово ускорение
- 2.1.8. Модели нелокального усреднения
- 2.2. Модели расчета усредненных по угловым переменным радиационных характеристик
 - 2.2.1. Методы сферических гармоник
 - 2.2.2. Методы дискретных ординат
 - 2.2.3. Методы моментов
 - 2.2.4. DP_n-методы
 - 2.2.4.1. Методы половинных сферических гармоник
 - 2.2.4.2. Методы полумоментов
 - 2.2.4.3. Методы квадромоментов
 - 2.2.5. Приближенные аналитические методы
- 2.3. Методы статистического моделирования (методы Монте-Карло)

В последующих главах все модели переноса излучения, перечисленные во втором разделе Классификатора феноменологических моделей радиационного переноса, будут рассмотрены подробно. Связь со всеми моделями других представленных классификаторов будет обсуждаться по мере необходимости в описании отдельных моделей. Модели элементарных и статистических радиационных процессов рассмотрены в книге (Суржиков С.Т., 2004 (в)).

ГЛАВА 5

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ПЕРЕНОСА СЕЛЕКТИВНОГО ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ЛТР

Решение уравнения переноса излучения в одной из форм, представленных в главе 3 подразумевает чаще всего определение векторного поля плотности спектрального и интегрального потока излучения, дивергенции этого поля, а также спектральной и интегральной объемной плотности энергии излучения. Реже требуется определить поле спектральной интенсивности излучения на некоторой поверхности или в некотором элементарном объеме. Как правило, задачи первого типа характерны для проблем теплообмена излучением, радиационной газо- и плазмодинамики. Задачи второго типа характерны для задач спектральной диагностики излучательной способности горячих газов и плазмы.

Задача нахождения поля вектора интегрального потока излучения и его дивергенции, а также интегральной объемной плотности энергии излучения даже в случае нерассеивающей среды, находящейся в условиях ЛТР (см. п. 2.10), когда уравнение переноса излучения имеет простейший вид

$$\frac{\partial J_v(s, \Omega)}{\partial s} + \kappa_v J_v(s, \Omega) = \kappa_v(s) J_{b,v}(s), \quad (5.1)$$

оказывается весьма трудоемкой, поскольку подразумевает необходимость интегрирования уравнения (5.1) в каждой спектральной точке по пространственной переменной s (первый этап решения задачи) и по угловым переменным, т.е. вдоль лучей s , имеющих разные направления Ω (второй этап). Найденное таким образом поле спектральной интенсивности излучения еще необ-

ходимо проинтегрировать по частоте излучения (третий этап). Очевидно, что при учете эффектов светорассеяния сложность решения задачи возрастает во много раз, поскольку вместо (5.1) необходимо решать интегро-дифференциальное уравнение (3.3).

В соответствии с тремя указанными этапами решения задачи различают группы методов, предназначенных для интегрирования по пространственным переменным (далее совокупность пространственных переменных обозначается радиус-вектором текущей точки пространства \mathbf{r} в лабораторной системе координат), угловым переменным (Ω) и частоте излучения (ν).

В принципе, каждый из этих трех этапов является независимым. По крайней мере, всегда можно указать не связанные между собой методы интегрирования по \mathbf{r} , Ω и ν . Однако в наиболее эффективных расчетных методиках существует взаимная обусловленность методов, т.е. совместимой является лишь определенная комбинация методов. Указанные методы рассматриваются в главе 12.

В большинстве расчетных методик в качестве базового метода выбирается метод интегрирования уравнения переноса селективного излучения по угловым переменным. Затем решается задача интегрирования по пространственным переменным и, наконец, найденные спектральные характеристики интегрируются по частоте. Однако существует группа методов, в которых перечисленные проблемы решаются особенно просто, — эти методы основаны на приближениях *предельных оптических толщин*.

5.1. Приближения предельных оптических толщин

Приближения *оптически тонкого* и *оптически толстого* слоев являются, пожалуй, наиболее часто используемыми приближениями теории радиационного переноса. Физический смысл этих приближений состоит в том, что в первом случае вероятность поглощения квантов электромагнитного излучения в исследуемом объеме очень мала, а во втором случае — очень велика. Это означает, что в случае справедливости приближения оптически тонкого слоя фотоны собственного излучения практически беспрепят-

ственно покидают объем, а фотоны внешнего излучения практически беспрепятственно пронизывают его. В случае справедливости приближения оптически толстого слоя, наоборот, фотоны собственного излучения поглощаются самой средой вблизи места своего рождения (в этом случае говорят о сильной *реабсорбции*, т.е. о поглощении средой испущенного ею излучения), а фотоны внешнего излучения поглощаются вблизи границы. Ниже дана математическая формулировка этих приближений. Необходимо подчеркнуть, что при решении задач радиационного переноса часто встречается ситуация, когда в одной спектральной области справедливо одно из приближений предельных оптических толщин, а в другой спектральной области – противоположное приближение.

5.1.1. Приближение оптически тонкого слоя

Пусть L – характерный размер исследуемой области. Тогда

$$\tau_{L,v} = \int_0^L \kappa_v(s') ds' \quad (5.2)$$

– спектральная оптическая толщина слоя длиной L .

В приближении оптически тонкого слоя полагают, что

$$\tau_{L,v} \ll 1. \quad (5.3)$$

Это позволяет существенно упростить все расчетные соотношения теории переноса излучения. Например, формальное решение уравнения переноса (3.15) упрощается до следующего соотношения:

$$J_v(\tau) = J_v^0 + \int_0^\tau J_{b,v}(\tau') d\tau', \quad (5.4)$$

поскольку для экспонент, входящих в (3.15) справедливо следующее разложение:

$$\exp(-\tau) \approx 1 - \tau + O(\tau^2), \quad (5.5)$$

Это означает, что в случае оптически тонкого слоя спектральная интенсивность излучения в любой точке пространства определяется суммой спектральной интенсивности излучения внешнего источника (J_v^0) и интеграла от интенсивности собственного излучения среды на отрезке луча s от границы излучающей области до рассматриваемой точки пространства.

Приближение оптически тонкого слоя значительно упрощает не только формальное решение уравнения переноса, но оказывается весьма полезным для многих других расчетных методов. Примеры использования этого приближения совместно с другими методами будут рассмотрены в главе 6.

5.1.2. Приближение оптически толстого слоя

В приближении оптически толстого слоя полагают, что

$$\tau_{L,v} \gg 1. \quad (5.6)$$

Это приближение хорошо известно, как *приближение Росселанда* (Rosseland S., 1936) или *диффузионное приближение*.

Последнее название проистекает из того, что в приближении оптически толстого слоя вектор плотности радиационного теплового потока (в условиях ЛТР) может быть представлен в виде

$$\mathbf{W} = -\lambda_R \nabla T, \quad (5.7)$$

где $\lambda_R = 16n^2 \bar{\sigma} T^3 / 3\kappa_R$ — коэффициент лучистой теплопроводности; κ_R — среднеросселандовский коэффициент поглощения; $\bar{\sigma}$ — постоянная Стефана — Больцмана (см. формулу (2.2)); n — показатель преломления.

При этом процесс распространения излучения можно уподобить диффузионному процессу, поскольку поглощение любого фотона вблизи места своего рождения приводит к дополнительному нагреву среды и, как следствие, увеличению вероятности испускания здесь нового фотона, который, однако, испускается в произвольном направлении, что как раз очень похоже на диффузионный процесс.

Вывод формул для радиационного потока (5.7), а также для коэффициентов лучистой теплопроводности и среднеросселандовского коэффициента поглощения приводится в п. 5.2.1 на примере решения задачи переноса излучения в плоском слое.

5.2. Методы интегрирования уравнения переноса по угловым переменным

Рассмотренные в пп. 5.1.1 и 5.1.2 приближения оптически тонкого и оптически толстого слоев позволяют упростить решение задачи переноса излучения в любой геометрии. Однако даже в указанных простейших случаях, в особенности, в приближении оптически тонкого слоя, остается проблема интегрирования уравнения переноса излучения по угловым и пространственным переменным. Для промежуточных оптических толщин условия (5.3) и (5.6) не выполняются, поэтому упрощения уравнения переноса не допускаются.

Укрупненная классификация методов учета угловой зависимости спектральной интенсивности излучения дана на рис. 5.1.

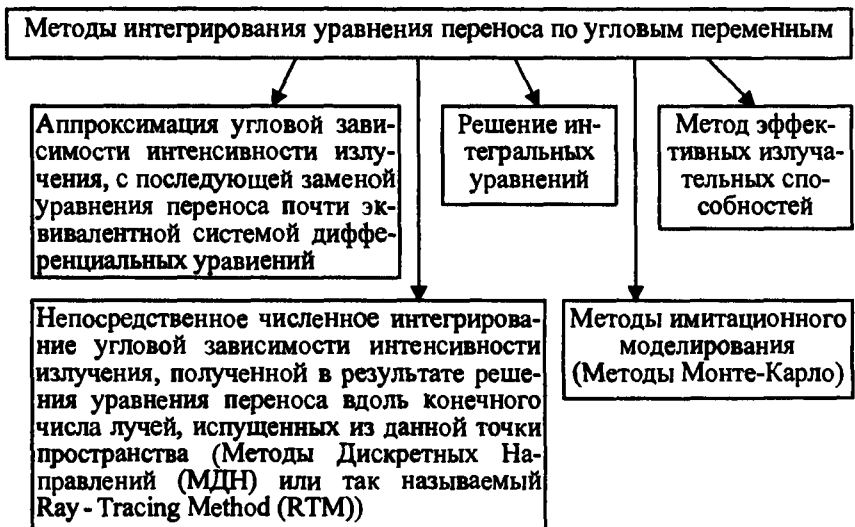


Рис. 5.1. Классификация методов интегрирования по угловым переменным

Как уже отмечалось выше, методы интегрирования по угловым и пространственным переменным, а также по частоте электромагнитного излучения тесно связаны между собой. Поэтому следует иметь в виду, что любой из методов этой классификации (рис. 5.1) не является завершенным методом теории переноса теплового излучения, а с неизбежностью должен быть дополнен одним из методов интегрирования по пространству и частоте электромагнитного излучения.

Среди методов интегрирования по угловым переменным, представленным на рис. 5.1, исторически наиболее развитыми оказались методы аппроксимации угловой зависимости спектральной интенсивности излучения. Это во многом связано с тем, что наиболее интенсивно теория переноса излучения развивалась применительно к задачам астрофизики (первая половина XX века) и к задачам физики ядерных реакторов (вторая половина XX века) в условиях отсутствия или слабого развития вычислительной техники. Появление в 50 – 60-х годах компьютеров начало постепенно изменять соотношение в пользу альтернативных методов решения уравнения переноса. Современная теория переноса теплового излучения во многом основана на использовании мощных компьютеров и ориентирована на решение задач переноса излучения в любой геометрии с подробным учетом спектральной зависимости оптических свойств среды. Однако методы, основанные на аппроксимации угловой зависимости, остаются весьма распространенными и широко используемыми. Исключительная важность этих методов для современной теории переноса теплового излучения, базирующейся на последних достижениях компьютерной физики, состоит не только в их высокой экономичности, но, в первую очередь, в возможности их использования в качестве тестовых и асимптотических решений.

Указанные методы развиты применительно к объемам простейших геометрий (плоский слой, сферические и цилиндрические объемы), однако наиболее развитой является теория переноса излучения в плоском слое. Это объясняется, с одной стороны, тем, что плоский слой является простейшей моделью излучающего и поглощающего объема, а с другой стороны, тем, что указанная модель является чаще других наиболее обоснованной физической моделью описания процесса переноса излучения.

Рассматриваемые далее методы интегрирования по угловым переменным применяются для отыскания спектральной интенсивности излучения и моментов этой функции по угловым переменным. С целью упрощения записи индекс спектральной зависимости далее опускается.

5.2.1. Модель плоского слоя

В данной модели излучающий и поглощающий объемы заменяются плоским слоем конечного размера (рис. 5.2) в направлении одной из пространственных переменных (x) и бесконечной протяженности в направлении двух других переменных (y, z).

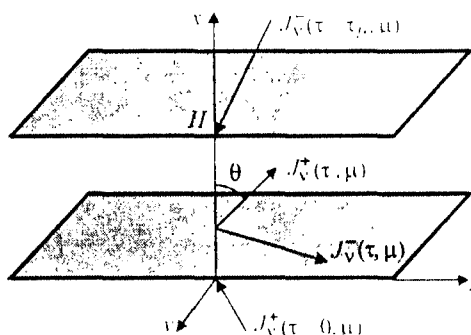


Рис. 5.2. Модель плоского слоя для расчета переноса излучения

Во многих исследованиях показано, что модель плоского слоя позволяет получить хорошую точность результатов практически во всех случаях, когда одна из пространственных переменных много меньше двух других. Исключение составляет небольшой круг специфических задач переноса излучения в волноводных оптических системах. Эта модель наиболее широко использовалась при решении задач астрофизики, физики ядерных реакторов, теплообмена излучением и радиационной газовой динамики.

Интенсивность излучения в модели плоского *нерассеивающего* слоя удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\mu \frac{\partial J_v(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J(\tau, \mu) = S(\tau, \mu), \quad (5.8)$$

$$\tau = 0, \quad 0 < \mu \leq 1: \quad J(\tau, \mu) = J^+(\tau = 0, \mu), \quad (5.9)$$

$$\tau = \tau_H, \quad -1 \leq \mu < 0: \quad J(\tau, \mu) = J^-(\tau = \tau_H, \mu), \quad (5.10)$$

где $S(\tau, \mu) = J_b [T(\tau)]$ – функция источников излучения (интенсивность излучения абсолютно черного тела); $\mu = \cos \theta$;

$$\tau = \int_0^x \kappa(x') dx' \text{ – оптическая толщина; } \tau_H = \int_0^{x=H} \kappa(x') dx'.$$

Следствием допущения о бесконечной протяженности и однородности слоя в направлениях y и z (фактически это эквивалентно условию осевой симметрии для произвольной оси x) является неравенство нулю только одной составляющей вектора плотности спектрального потока излучения

$$W_x = W(\tau) = 2\pi \int_{-1}^1 J(\tau, \mu) \mu d\mu. \quad (5.11)$$

Плотности односторонних спектральных потоков излучения определяется по формулам

$$W^+(\tau) = 2\pi \int_0^1 J^+(\tau, \mu) \mu d\mu, \quad (5.12)$$

$$W^-(\tau) = 2\pi \int_0^1 J^-(\tau, \mu) \mu d\mu, \quad (5.13)$$

где верхними индексами «+» и «-» обозначены спектральные интенсивности излучения, распространяющегося в положительном и отрицательном направлениях оси x соответственно (в верхнюю и нижнюю полусферы пространства угловых направлений). Разделение потока излучения на две составляющие удобно при учете внешнего по отношению к исследуемому объему излучения, т.е.

излучения, падающего на объем со стороны внешних источников. Очевидно, что в рамках рассматриваемой модели интенсивности падающего излучения $J^+(\tau=0, \mu)$ и $J^-(\tau=\tau_H, \mu)$ должны также удовлетворять условию осевой симметрии.

Интенсивность излучения в модели плоского *рассеивающего* слоя удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\mu \frac{\partial J(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J(\tau, \mu) = S(\tau, \mu), \quad (5.14)$$

$$\tau = 0, \quad 0 < \mu \leq 1: \quad J(\tau, \mu) = J^+(\tau = 0, \mu), \quad (5.15)$$

$$\tau = \tau_H, \quad -1 \leq \mu < 0: \quad J(\tau, \mu) = J^-(\tau = \tau_H, \mu), \quad (5.16)$$

где
$$S(\tau, \mu) = (1 - \tilde{\omega}) J_b [T(\tau)] + \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 \gamma(\mu, \mu') J(\tau, \mu') d\mu',$$

$S(\tau, \mu)$ – функция источников излучения;

$$\tau = \int_0^x [\kappa(x') + \sigma(x')] dx'; \quad \tau_H = \int_0^{x=H} [\kappa(x') + \sigma(x')] dx'.$$

Введение двух составляющих интенсивности излучения в плоском слое позволяет вместо краевой задачи (5.14)–(5.16) рассматривать две эквивалентные задачи:

$$\mu \frac{\partial J^+(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J^+(\tau, \mu) = S(\tau, \mu), \quad 0 < \mu \leq 1, \quad (5.17)$$

$$\tau = 0, \quad 0 < \mu \leq 1: \quad J(\tau, \mu) = J^+(\tau = 0, \mu), \quad (5.18)$$

и
$$\mu \frac{\partial J^-(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J^-(\tau, \mu) = S(\tau, \mu), \quad -1 \leq \mu < 0, \quad (5.19)$$

$$\tau = \tau_H, \quad -1 \leq \mu < 0: \quad J(\tau, \mu) = J^-(\tau = \tau_H, \mu). \quad (5.20)$$

Формальное решение краевых задач (5.17), (5.18) и (5.19), (5.20) имеет вид

$$\begin{aligned}
 J^+(\tau, \mu) &= J^+(\tau=0, \mu) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) + \int_0^{\tau} \frac{1}{\mu} S(\tau', \mu) \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\mu}\right) d\tau', \\
 J^-(\tau, \mu) &= J^-(\tau=\tau_H, -\mu) \exp\left(-\frac{\tau_H-\tau}{\mu}\right) + \\
 &+ \int_{\tau}^{\tau_H} \frac{1}{\mu} S(\tau', -\mu) \exp\left(-\frac{\tau'-\tau}{\mu}\right) d\tau'. \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

Формальное решение краевых задач (5.8)–(5.10) и (5.14)–(5.16) позволяет записать формулу для расчета спектральной объемной плотности энергии излучения и плотности спектрального потока излучения

$$W(\tau) = W^+(\tau) - W^-(\tau), \quad (5.22)$$

где выделены потоки излучения в верхнюю ($(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \geq 0$) и нижнюю ($(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega}) < 0$) полушеры:

$$\begin{aligned}
 U(\tau) &= \frac{2\pi}{c} \left[\int_0^1 J^+(\tau=0, \mu) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) d\mu + \right. \\
 &+ \left. \int_0^{\tau} \int_0^1 \frac{1}{\mu} S(\tau', \mu) \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\mu}\right) d\tau' d\mu \right] + \\
 &+ \int_0^1 J_v^-(\tau=\tau_H, -\mu) \exp\left(-\frac{\tau_H-\tau}{\mu}\right) d\mu + \\
 &+ \left. \int_0^{\tau_H} \int_{\tau}^1 \frac{1}{\mu} S(\tau', -\mu) \exp\left(-\frac{\tau'-\tau}{\mu}\right) d\tau' d\mu \right], \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W^+(\tau) &= 2\pi \left[\int_0^1 J^+(\tau=0, \mu) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) \mu d\mu + \right. \\
 &+ \left. \int_0^{\tau} \int_0^1 S(\tau', \mu) \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\mu}\right) d\tau' d\mu \right], \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

$$W^-(\tau) = 2\pi \left[\int_0^1 J^-(\tau = \tau_H, -\mu) \exp\left(-\frac{\tau_H - \tau}{\mu}\right) \mu d\mu + \int_0^{\tau_H} \int_{\tau}^{\tau_H} S(\tau', -\mu) \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\mu}\right) d\tau' d\mu \right]. \quad (5.25)$$

В следующих частных, но практически важных случаях данное расчетное соотношение упрощается:

1) изотропное рассеяние

$$U(\tau) = \frac{2\pi}{c} \left[\int_0^1 J^+(\tau = 0, \mu) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) d\mu + \int_0^{\tau} S(\tau') E_1(\tau - \tau') d\tau' \right] + \frac{2\pi}{c} \left[\int_0^1 J^-(\tau = \tau_H, -\mu) \exp\left(-\frac{\tau_H - \tau}{\mu}\right) d\mu + \int_{\tau}^{\tau_H} S(\tau') E_1(\tau' - \tau) d\tau' \right], \quad (5.26)$$

$$W(\tau) = 2\pi \left[\int_0^1 J^+(\tau = 0, \mu) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) \mu d\mu + \int_0^{\tau} S(\tau') E_2(\tau - \tau') d\tau' \right] - 2\pi \left[\int_0^1 J^-(\tau = \tau_H, -\mu) \exp\left(-\frac{\tau_H - \tau}{\mu}\right) \mu d\mu + \int_{\tau}^{\tau_H} S(\tau') E_2(\tau' - \tau) d\tau' \right]; \quad (5.27)$$

2) изотропное рассеяние и изотропная интенсивность внешнего излучения

$$U(\tau) = \frac{2\pi}{c} \left[J^+(\tau = 0) E_2(\tau) + \int_0^{\tau} S(\tau') E_1(\tau - \tau') d\tau' \right] + \frac{2\pi}{c} \left[J^-(\tau = \tau_H) E_2(\tau_H - \tau) + \int_{\tau}^{\tau_H} S(\tau') E_1(\tau' - \tau) d\tau' \right], \quad (5.28)$$

$$W(\tau) = 2\pi \left[J^+(\tau=0) E_3(\tau) + \int_0^\tau S(\tau') E_2(\tau-\tau') d\tau' \right] - \\ - 2\pi \left[J^-(\tau=\tau_H) E_3(\tau_H-\tau) + \int_\tau^{\tau_H} S(\tau') E_2(\tau'-\tau) d\tau' \right]; \quad (5.29)$$

3) нерассеивающая среда и изотропная интенсивность внешнего излучения

$$U(\tau) = \frac{2\pi}{c} \left[J^+(\tau=0) E_2(\tau) + \int_0^\tau J_b[T(\tau')] E_1(\tau-\tau') d\tau' \right] + \\ + \frac{2\pi}{c} \left[J^-(\tau=\tau_H) E_2(\tau_H-\tau) + \int_\tau^{\tau_H} J_b[T(\tau')] E_1(\tau'-\tau) d\tau' \right]; \quad (5.30)$$

$$W(\tau) = 2\pi \left[J^+(\tau=0) E_3(\tau) + \int_0^\tau J_b[T(\tau')] E_2(\tau-\tau') d\tau' \right] - \\ - 2\pi \left[J^-(\tau=\tau_H) E_3(\tau_H-\tau) + \int_\tau^{\tau_H} J_b[T(\tau')] E_2(\tau'-\tau) d\tau' \right]. \quad (5.31)$$

В формулах (5.26)–(5.31) введены интегро-экспоненциальные функции (Чандрасекхар С., 1953; Kourganoff V. et al., 1963)

$$E_n(x) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \mu^{n-2} d\mu, \quad (5.32)$$

связанные между собой рекуррентными соотношениями

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n} \left[\exp(-x) - x E_n(x) \right], \quad n \geq 1. \quad (5.33)$$

Используют также следующие эквивалентные представления интегро-экспоненциальных функций

$$E_n(x) = \int_1^\infty \exp(-xt) t^{-n} dt, \quad (5.34)$$

$$\text{или} \quad E_{n+1}(x) = -\frac{1}{n} \int_1^{\infty} \exp(-xt) \frac{d}{dt} (t^{-n}) dt, \quad (5.35)$$

а также ряд соотношений, следующих из (5.34) и (5.35):

$$E_n(0) = \int_0^{\infty} t^{-n} dt = \begin{cases} +\infty, & \text{при } n=1, \\ \frac{1}{n-1}, & \text{при } n>1; \end{cases} \quad (5.36)$$

$$\frac{dE_n(x)}{dx} = \begin{cases} -\frac{1}{x} \exp(-x), & \text{при } n=1, \\ -E_{n-1}(x), & \text{при } n>1. \end{cases} \quad (5.37)$$

Асимптотические значения интегро-экспоненциальных функций получаются из ее разложения в ряд

$$E_n(x) = -(-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} (\ln x + \psi_n) + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n-1}}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!(n-1-m)}, \quad (5.38)$$

$$\text{где} \quad \psi_n = \begin{cases} C, & \text{при } n=1, \\ C - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m}, & \text{при } n \geq 2, \end{cases} \quad (5.39)$$

$C=0.577216\dots$ – постоянная Эйлера.

В частности,

$$\begin{aligned} E_1(x=0) &= \infty, & E_2(x=0) &= 1, \\ E_3(x=0) &= 0.5, & E_n(x) &\approx \frac{1}{x} \exp(-x), \text{ при } x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.40)$$

На рис. 5.3. показаны интегро-экспоненциальные функции, наиболее широко применяемые в практике расчетов.

Подчеркнем, что из приведенных формул (5.23)–(5.31) расчет радиационных потоков может быть произведен непосредственно только для нерассеивающей среды, т.е. по формулам (5.30), (5.31). В остальных случаях подынтегральные выражения содер-

жат функцию источников излучения S , которая зависит от интенсивности излучения в каждой точке пространства, т.е. расчетные формулы (5.23) – (5.29) не являются замкнутыми, а требуют специальных методов решения.

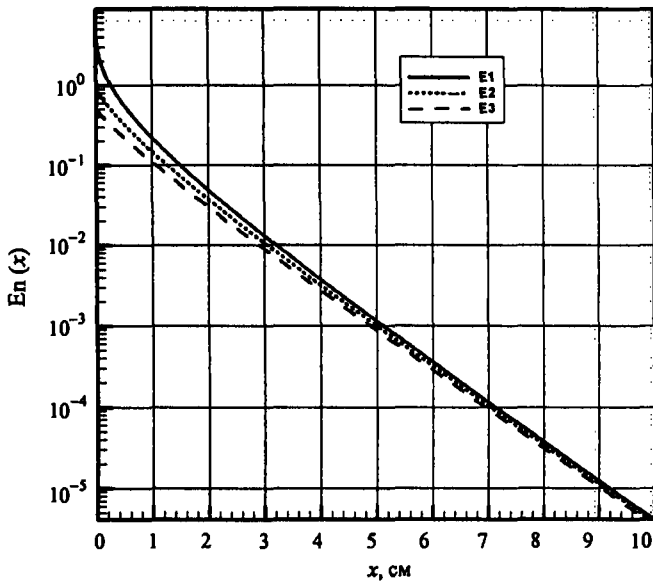


Рис. 5.3. Интегро-экспоненциальные функции E_1, E_2, E_3

Как уже отмечалось выше, для расчета мощности энерговыделения в среде Q_R , обусловленного радиационными процессами, необходимо определить дивергенцию вектора плотности спектрального потока излучения. Очевидным, но не всегда оптимальным способом расчета этой функции, является применение дифференциального оператора div к найденному вектору. В модели плоского слоя операция div сводится к дифференцированию по пространственной переменной x

$$Q_R = \text{div}W = \frac{dW}{dx} = \frac{\partial W(\tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dx} = (\kappa + \sigma) \frac{\partial W}{\partial \tau}. \quad (5.41)$$

Дивергенция вектора плотности потока излучения может быть также рассчитана по формуле

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = 4\pi \kappa(s) J_b [T(s)] - \kappa(s) \int_{4\pi} J(s, \Omega) d\Omega, \quad (5.42)$$

которая следует непосредственно из уравнения переноса излучения (3.3) после его интегрирования по полному телесному углу.

Рассмотрим получение формулы (5.42) более подробно. Выполним интегрирование уравнения (3.3) по полному телесному углу $\Omega = 4\pi$ (спектральный индекс опустим)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega=4\pi} \frac{\partial J(s, \Omega)}{\partial s} d\Omega + \int_{\Omega=4\pi} [\kappa(s) + \sigma(s)] J(s, \Omega) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega=4\pi} J^{em} d\Omega + \frac{1}{4\pi} \sigma(s) \int_{\Omega=4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} \gamma(s, \Omega', \Omega) J(s, \Omega') d\Omega' d\Omega. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Дальнейшее преобразование (5.43) связано со следующими свойствами слагаемых этого уравнения:

$$1) \quad \int_{\Omega=4\pi} \frac{\partial J(s, \Omega)}{\partial s} d\Omega = \int_{\Omega=4\pi} \Omega \operatorname{grad} J(s, \Omega) d\Omega = \operatorname{div} \mathbf{W}, \quad (5.44)$$

поскольку физическая координата s отсчитывается вдоль вектора Ω ;

$$2) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} \gamma(s, \Omega', \Omega) d\Omega = 1 \quad (5.45)$$

в соответствии с условием нормировки (1.18).

Учитывая (5.44) и (5.45) в (5.43), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{W} &= \kappa(s) \int_{\Omega=4\pi} J(s, \Omega) d\Omega + \sigma(s) \int_{\Omega=4\pi} J(s, \Omega) d\Omega = \\ &= 4\pi J^{em}(s) + \sigma(s) \int_{\Omega'=4\pi} J(s, \Omega') d\Omega'. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Из (5.46) очевидно, что слагаемые, пропорциональные коэффициенту рассеяния σ_s , сокращаются и при $J^{em}(s) = J_b(s)$ получается уравнение (5.42). Таким образом, формула для расчета $\operatorname{div} \mathbf{W}$ или, что одно и то же, мощности тепловыделения, обуслов-

ленного радиационными процессами, не содержит коэффициентов и функций, характеризующих светорассеяние. Однако интенсивность излучения, находящаяся под интегралом в (5.42) должна быть вычислена с учетом всех особенностей переноса излучения, в том числе и с учетом светорассеяния.

Для плоского слоя соотношение (5.42) упрощается:

$$\frac{dW(x)}{dx} = 4\pi\kappa(x)J_b[T(x)] - \kappa(x) \int_{4\pi} J(x, \Omega) d\Omega \quad (5.47)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dW(x)}{dx} &= 4\pi\kappa(x)J_b[T(x)] - 2\pi\kappa(x) \int_{-1}^1 J(x, \mu) d\mu = \\ &= 4\pi\kappa(x)J_b[T(x)] - 2\pi\kappa(x) \int_0^1 J^+(x, \mu) d\mu - \\ &- 2\pi\kappa(x) \int_0^1 J^-(x, -\mu) d\mu. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Перейдем к оптической толщине

$$d\tau = \int_0^x [\kappa(x') + \sigma(x')] dx',$$

тогда вместо (5.47) и (5.48) получим

$$\begin{aligned} \frac{dW(\tau)}{d\tau} &= 4\pi(1 - \tilde{\omega})J_b[T(\tau)] - \\ &- 2\pi(1 - \tilde{\omega}) \int_0^1 J^+(\tau, \mu) d\mu - 2\pi(1 - \tilde{\omega}) \int_0^1 J^-(\tau, -\mu) d\mu. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Подставив в (5.49) формальные решения (5.21), получим

$$\begin{aligned} \frac{dW(\tau)}{d\tau} &= (1 - \tilde{\omega}) 4\pi J_b[T(\tau)] - \\ &- (1 - \tilde{\omega}) 2\pi \left[\int_0^1 J^+(\tau = 0, \mu) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) d\mu + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 J^- (\tau = \tau_H, -\mu) \exp\left(-\frac{\tau_H - \tau}{\mu}\right) d\mu \Big] - \\
& - (1 - \tilde{\omega}) 2\pi \left[\int_0^1 \int_0^\tau \frac{1}{\mu} S(\tau', \mu) \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\mu}\right) d\tau' d\mu + \right. \\
& \left. + \int_0^1 \int_\tau^{\tau_H} \frac{1}{\mu} S(\tau', -\mu) \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\mu}\right) d\tau' d\mu \right]. \quad (5.50)
\end{aligned}$$

В простейшем случае нерассеивающей среды и изотропной интенсивности внешних источников

$$\begin{aligned}
\frac{dW(\tau)}{d\tau} &= 4\pi J_b [T(\tau)] - \\
& - 2\pi \left[J^+ (\tau = 0) E_2(\tau) + J^- (\tau = \tau_H) E_2(\tau_H - \tau) \right] - \\
& - 2\pi \left[\int_\tau^{\tau_H} J_b [T(\tau')] E_1(|\tau - \tau'|) d\tau' \right], \quad (5.51)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\int_\tau^{\tau_H} J_b [T(\tau')] E_1(|\tau - \tau'|) d\tau' &= \int_0^\tau J_b [T(\tau')] E_1(\tau - \tau') d\tau' + \\
& + \int_\tau^{\tau_H} J_b [T(\tau')] E_1(\tau - \tau') d\tau'.
\end{aligned}$$

Напомним, что для определения скорости тепловыделения, обусловленного радиационными процессами в формуле (5.51) необходимо перейти от оптической толщины к физическим пространственным переменным, т.е. воспользоваться формулой (5.41). В качестве примера использования полученных соотношений для основных характеристик переноса теплоты излучением в плоском слое (5.28), (5.29) и (5.49) рассмотрим задачу о переносе теплового излучения в ударном слое, образующемся у поверхности космического аппарата, входящего в плотные слои атмосферы.

Схема решаемой задачи дана на рис. 5.4, где показано температурное поле вблизи азотермодинамического щита и в следе, образующемся за космическим аппаратом (Surzhikov S.T., 2004 (a)). На рисунке приведена реальная форма и даны характерные размеры российского сегментально-конического космического аппарата.

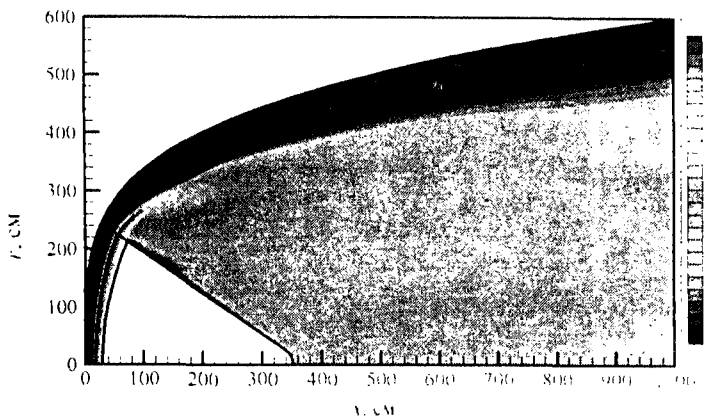


Рис. 5.4. Температурное поле вблизи поверхности спускаемого космического аппарата, К

Результаты расчетов, приведенные на рис. 5.5, отвечают точке траектории входа космического аппарата в атмосферу Марса со скоростью 5.223 км/с. Термодинамические параметры на рассматриваемой высоте в атмосфере Марса задавались равными: давление $p = 78.7$ эрг/см³, плотность $\rho = 2.97 \times 10^{-7}$ г/см³, температура $T = 140$ К.

Видно, что вблизи лобовой поверхности космического аппарата толщина ударного слоя существенно меньше его характерных размеров, поэтому в этой области течения для решения задачи переноса излучения можно рассматривать плоский слой (см. рис. 5.2). Пусть при $x \geq H$ среда прозрачна и не излучает (невозмущенный поток газа), а при $x = 0$ находится непрозрачная, диффузионно-отражающая поверхность тела. Учет спектральную зависимость излучения в явном виде. Тогда граничное условие на фронте ударной волны (поверхность 2) формулируется в виде

$W_v^-(\tau_v = \tau_{v,H}) = W_{v,2}^- = 0$, а поверхность космического аппарата (1) диффузно излучает с интенсивностью $J_{b,v,1}$ и диффузно отражает падающее излучение, так что спектральная плотность потока излучения, покидающего поверхность, равна

$$W_{v,1}^+ = W_v^+(\tau_v = 0) = \pi J_{b,v,1} \varepsilon_v + \rho_v W_v^-(\tau_v = 0), \quad (5.52)$$

где ε_v, ρ_v – полусферические излучательная и отражательная способности поверхности 1. Из (5.25) имеем выражение

$$W_v^-(0) = 2\pi \int_0^{\tau_{v,H}} J_{b,v}(\tau'_v) E_2(\tau'_v) d\tau'_v, \quad (5.53)$$

подставляя которое в (5.52) и затем в (5.22), получим

$$W_v = 2\pi \left[\varepsilon_v J_{b,v,1} E_3(\tau_v) + 2(1 - \varepsilon_v) E_3(\tau_v) \int_0^{\tau_{v,H}} J_{b,v}(\tau'_v) E_2(\tau'_v) d\tau'_v + \int_0^{\tau_v} J_{b,v}(\tau'_v) E_2(\tau_v - \tau'_v) d\tau'_v - \int_{\tau_v}^{\tau_{v,H}} J_{b,v}(\tau'_v) E_2(\tau'_v - \tau_v) d\tau'_v \right]. \quad (5.54)$$

Из этой формулы при $\tau_v = 0$ получим результирующий лучистый поток на поверхности тела

$$W_v(\tau_v = 0) = \pi \varepsilon_v \left[J_{b,v,1} - 2 \int_0^{\tau_{v,H}} J_{b,v} E_2(\tau'_v) d\tau'_v \right]. \quad (5.55)$$

Для идеально отражающей поверхности $\varepsilon_v = 0, \rho_v = 1$ и из (5.55) следует, что $W_v(\tau_v = 0) = 0$. В частном случае при $\varepsilon_v = 1$, из выражения (5.55), изменяя знак, получим поток, падающий от газа на поверхность

$$W_v(\tau_v = 0) = 2\pi \int_0^{\tau_{v,H}} J_{b,v} E_2(\tau'_v) d\tau'_v. \quad (5.56)$$

Найдем скорость тепловыделения в единице объема газа за счет теплообмена излучением

$$Q_{R,v} = -\operatorname{div} \mathbf{W}_v = \kappa_v \left(\int_{4\pi} J_v d\Omega - 4\pi J_{b,v} \right). \quad (5.57)$$

Заметим, что $Q_{R,v} < 0$ означает потери энергии излучением, $Q_{R,v} > 0$ – нагрев вещества излучением.

Используя формальное решение краевых задач (5.17), (5.18) и (5.19), (5.20) в виде (5.21), учитывая при этом, что $S_v(\tau'_v, \mu) = J_{b,v}(\tau'_v)$, получим для спектрального и интегрального по спектру тепловыделения

$$Q_{R,v}(\tau_v) = 2\pi\kappa_v \left[\varepsilon_v J_{b,v,1} E_2(\tau_v) + 2\rho_v E_2(\tau_v) \int_0^{\tau_{v,H}} J_{b,v} E_2(\tau'_v) d\tau'_v + \int_0^{\tau_{v,H}} J_{b,v} E_1(|\tau_v - \tau'_v|) d\tau'_v \right] - 4\pi\kappa_v J_{b,v}, \quad (5.58)$$

$$Q_R(x) = \int_0^\infty Q_{R,v}(x) dv. \quad (5.59)$$

В частном случае холодной, черной поверхности, когда интенсивностью ее излучения можно пренебречь, $J_{b,v,1} \rightarrow 0$, $\rho_v \rightarrow 0$, получим

$$Q_{R,v}(\tau_v) = 2\pi\kappa_v \left[\int_0^{\tau_{v,H}} J_{b,v} E_1(|\tau_v - \tau'_v|) d\tau'_v - 2J_{b,v} \right]. \quad (5.60)$$

Рассмотрим случай однородного слоя газа, в котором температура и химический состав постоянны по координате. Тогда, интегрируя по оптической координате, из (5.55) получим

$$W_v(\tau_v = 0) = \pi J_{b,v} \left[1 - 2E_3(\tau_{v,H}) \right], \quad \tau_{v,H} = \kappa_v H. \quad (5.61)$$

Величину $\varepsilon_v = 1 - 2E_3(\tau_{v,H})$ называют *спектральной излучательной способностью плоского слоя* или *спектральной степенью черноты плоского слоя* (не путать со спектральной степенью черноты поверхности).

Интегрируя (5.61) по частоте излучения, получают плотность интегрального радиационного потока на поверхности

$$W(x=0) = \int_0^{\infty} W_{\nu}(\tau_{\nu}=0) d\nu = \pi \int_0^{\infty} J_{b,\nu}(T) [1 - 2E_3(\kappa_{\nu}H)] d\nu. \quad (5.62)$$

Величину

$$\varepsilon = W(x=0) / \bar{\sigma} T^4 = \frac{\pi}{\bar{\sigma} T^4} \int_0^{\infty} J_{b,\nu}(T) [1 - 2E_3(\kappa_{\nu}H)] d\nu \quad (5.63)$$

называют *интегральной степенью черноты плоского слоя*. Для величин ε и ε_{ν} как функций состава газа, давления, температуры и толщины слоя H для ряда смесей газов составлены подробные таблицы (Авилова И.В. и др., 1970; Каменщиков В.А. и др., 1971).

Из формулы (5.61) видно, что спектральный поток излучения слоя конечной толщины H , или его *яркость*, всегда меньше равновесного значения $\pi J_{b,\nu}$. Наибольшее отличие спектра от планковского должно наблюдаться в пределе оптически тонкого слоя при $\kappa_{\nu}H \ll 1$ или

$$E_3(\tau_{\nu,L}) \approx \frac{1}{2} - \kappa_{\nu}H, \quad W_{\nu}(x=0) \approx 2\pi\kappa_{\nu}H J_{b,\nu}. \quad (5.64)$$

При $\tau_{\nu,L} \ll 1$ оптический тонкий слой испускает как объемный излучатель. При этом кванты света, рожденные в любой точке, выходят из слоя практически без поглощения по пути. В таком слое нет «самопоглощения», и каждый элемент объема вносит одинаковый вклад в излучение, выходящее с его поверхности. Это и служит основанием называть такой слой *объемным излучателем*.

Для оптически тонкого плоского слоя степень черноты можно выразить через средний коэффициент поглощения Планка

$$\kappa_p = \frac{\int_0^{\infty} \kappa_{\nu} J_{b,\nu} d\nu}{\int_0^{\infty} J_{b,\nu} d\nu} = \frac{15}{\pi^4} \int_0^{\infty} \kappa_{\nu}(u) \frac{u^3}{\exp(u) - 1} du, \quad u = \frac{h\nu}{kT}. \quad (5.65)$$

Тогда, интегрируя по частоте, из (5.63) получим

$$\varepsilon = 2\kappa_p H. \quad (5.66)$$

Для оптически толстого слоя $\tau_{\nu, H} \gg 1$ и $W_{\nu}(\tau_{\nu} = 0) \rightarrow \pi J_{b, \nu}$, т.е. среда светит как черный излучатель. Такой слой излучает с «поверхности», так как кванты, рожденные в глубине, не выходят через поверхность тела, поглощаясь по пути. Если $\kappa_{\nu} H \gg 1$, то из (5.63) следует $\varepsilon = 1$.

Для многих прикладных задач радиационной газовой динамики космических аппаратов важно оценить поток излучения к поверхности обтекаемого тела в окрестности критической линии тока с тем, чтобы ответить на вопрос, является ли существенным радиационный нагрев тела или нет. Для приближенной верхней оценки потока излучения в критическую точку тела можно сделать следующие предположения:

1. Сжатый ударный слой у поверхности затупленного тела радиусом R заменяется плоским слоем газа толщиной $H = (\rho_{\infty}/\rho_s)R$ с постоянной температурой T_s , давлением p_s и равновесным химическим составом при этих T_s и p_s .
2. Ударная волна рассматривается как прозрачная поверхность и на ней внешний поток излучения равен $W_{\nu}^{-}(x = H) = 0$.
3. Тело рассматривается как абсолютно черное, а его собственным излучением пренебрегают.

Тогда лучистый поток к телу рассчитывается по формуле

$$W = \varepsilon \bar{\sigma} T_s^4, \quad \varepsilon = \varepsilon(T_s, p_s, H). \quad (5.67)$$

В случае равновесного ударного слоя степень черноты плоского слоя для рассматриваемой атмосферы может быть взята из таблиц (Авилова И.В. и др., 1970; Каменщиков В.А. и др., 1971).

На рис. 5.5 и 5.6 показаны примеры результатов расчетов радиационных характеристик $U, W, Q_R = \text{div}W$ в ударном слое. Распределение температуры в слое дано на рис. 5.5. Объемная плотность энергии излучения и плотность радиационного потока, а также дивергенция вектора плотности радиационного потока в плоском слое толщиной 10 см показаны на рис. 5.6. Предполага-

лось, что коэффициент поглощения в слое постоянен и равен $\kappa = 0.1 \text{ см}^{-1}$, так что оптическая толщина слоя равна $\tau = 1$, а на прозрачные поверхности слоя слева и справа падает изотропное излучение интенсивностью $J^+(\tau=0) = J^-(\tau=\tau_H) = 100 \text{ Вт/см}^2$. Интенсивность излучения абсолютно черного тела рассчитывалась для интегрального по спектру излучения

$$J_b(T) = \frac{1}{\pi} \bar{\sigma} T^4.$$

Объемная плотность энергии излучения достигает внутри объема своего максимума. Снижение $U(x)$ вблизи границ расчетной области объясняется потерями энергии излучения, падающего на холодную поверхность и покидающего свободную границу при $x = H$.

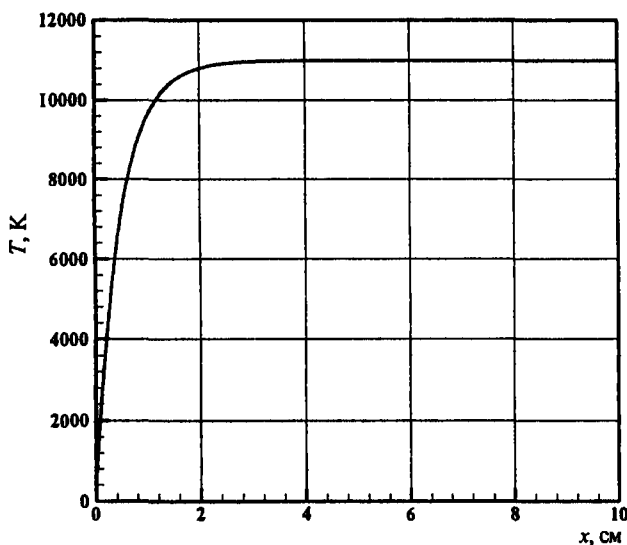


Рис. 5.5. Распределение температуры в плоском слое

Плотность полного потока излучения меняет знак внутри объема. Это означает, что в части слоя ($x \leq 5.5 \text{ см}$) полный радиационный поток преимущественно направлен к поверхности, а в другой части ($x \geq 5.5 \text{ см}$) – к свободной поверхности. Знак функции $Q_R = \text{div}W$ позволяет сделать вывод, что при $Q_R < 0$

($x \leq 0.85$ см) излучение нагревает среду, а при $Q_R > 0$ ($x \geq 0.85$ см) – охлаждает ее. Заметим, что односторонние потоки излучения являются знакопостоянными функциями.

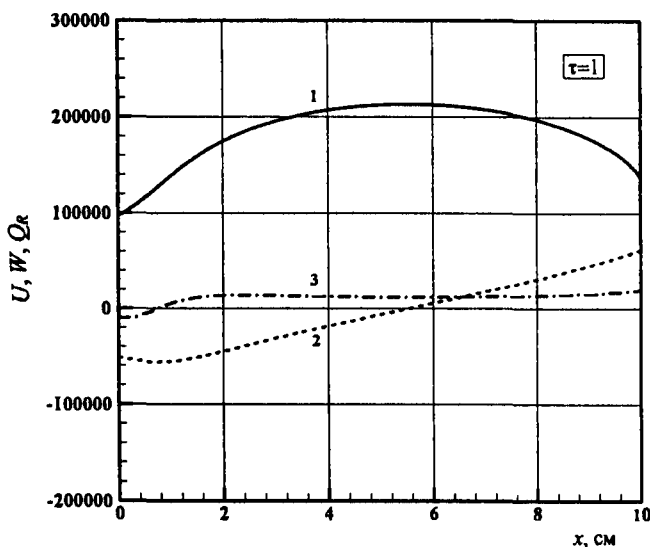


Рис. 5.6. Плотность радиационной энергии (1, U в Дж/см³), плотность радиационного теплового потока (2, W в Вт/см²) и дивергенции вектора плотности потока радиационной энергии (3, Q_R в Вт/см³). Точное решение для плоского слоя с оптической толщиной $\tau = 1$

Распределение радиационных характеристик внутри плоского слоя с тем же распределением температуры, но с увеличенным на порядок коэффициентом поглощения, $\kappa = 1 \text{ см}^{-1}$, показано на рис. 5.7. Качественные изменения в распределении плотности радиационного теплового потока и его дивергенции с изменением оптической толщины хорошо видны при сравнении рис. 5.6 и 5.7. Внутри оптически толстого слоя ($4 < x < 8$ см) наблюдается область, в которой плотность радиационного потока близка к нулю. Это означает, что плотности односторонних полусферических потоков равны между собой. Близость нулю дивергенции вектора плотности радиационного потока в этой же области означают примерное равенство скорости потерь и поглощения излучения.

Указанная область оптически толстого плоского слоя является хорошей моделью термодинамически равновесного состояния среды.

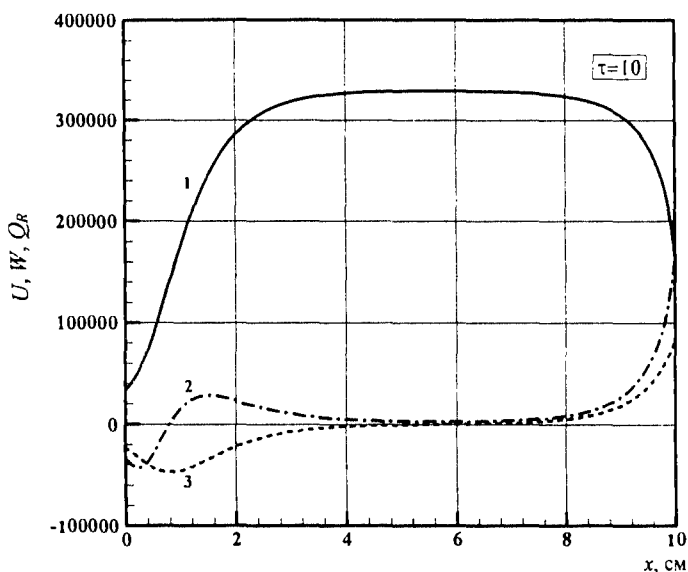


Рис. 5.7. Плотность радиационной энергии (1, U в Дж/см³), плотность радиационного теплового потока (2, W в Вт/см²) и дивергенции вектора плотности потока радиационной энергии (3, Q_R в Вт/см³). Точное решение для плоского слоя с оптической толщиной $\tau = 10$

Однако вблизи границ такого слоя равновесие нарушается, поскольку излучение, уходящее за пределы плоского слоя, не компенсируется внешним по отношению к нему излучением.

Примеры расчетов, представленные на рис. 5.6 и 5.7, демонстрируют основные тенденции влияния оптической толщины на распределение радиационных характеристик в слое. Распределения функций, показанные на рис. 5.6 и 5.7, далее будут использованы для сравнения с результатами расчетов по другим методам.

5.2.2. Метод Шварцшильда – Шустера

Метод разработан применительно к задачам, в которых имеется одно выделенное направление переноса лучистой энергии,

например, для плоского бесконечного слоя (Schuster A., 1905; Schwarzschild K., 1906).

Предполагается изотропность интенсивности излучения в каждой из полусфер, совместной осью которых является выделенное направление распространения излучения, в плоском слое – ось x (рис. 5.8). Усредненная интенсивность излучения в каждой из полусфер определяется по формулам (индекс частотной зависимости опущен)

$$I^+(\tau) = \int_0^1 J(\tau, \mu) d\mu, \quad \mu = \cos\theta, \quad (5.68)$$

$$I^-(\tau) = \int_{-1}^0 J(\tau, \mu) d\mu, \quad \mu = \cos\theta. \quad (5.69)$$

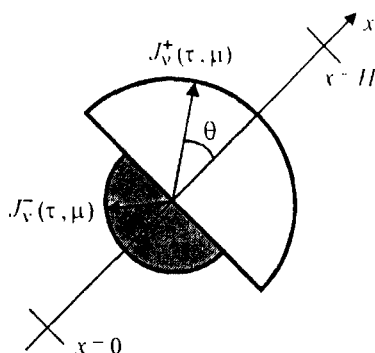


Рис. 5.8. Аппроксимация угловой зависимости интенсивности излучения в методе Шварцшильда – Шустера

Тогда вместо уравнения переноса излучения (5.8) следует использовать два уравнения следующего вида ($S(\tau, \mu) = J_b$):

$$\frac{1}{2} \frac{dI^+}{d\tau} = J_b - I^+, \quad (5.70)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dI^-}{d\tau} = J_b - I^-, \quad (5.71)$$

$$\text{где } \tau = \int_0^x \kappa(x') dx'.$$

Система уравнений (5.70) и (5.71) является линейной, ее решение в интегральной форме имеет вид

$$I^+ = 2I^+(\tau=0) \exp(-2\tau) + 2 \int_0^\tau J_b \exp[-2(\tau-\tau')] d\tau', \quad (5.72)$$

$$I^- = 2I^-(\tau=\tau_H) \exp[-2(\tau_H-\tau)] + 2 \int_\tau^{\tau_H} J_b \exp[-2(\tau'-\tau)] d\tau', \quad (5.73)$$

где $I^+(\tau=0)$, $I^-(\tau=\tau_H)$ – усредненные интенсивности излучения, падающего на исследуемый слой при $x=0$ и $x=H$.

Плотности полного и односторонних спектральных потоков излучения рассчитываются по формулам

$$W(\tau) = \pi(I^+ - I^-), \quad (5.74)$$

$$W^+(\tau) = \pi I^+, \quad W^-(\tau) = \pi I^-. \quad (5.75)$$

В соответствии с (5.42)

$$\frac{dW(\tau)}{d\tau} = 4\pi J_b [T(\tau)] - 2\pi(I^+ + I^-). \quad (5.76)$$

Распределение радиационных характеристик $U, W, Q_R = \kappa(dW(\tau)/d\tau)$ в плоском слое с распределением температуры, показанном на рис. 5.5, представлено на рис. 5.9 и 5.10.

Сравнение результатов расчетов по методу Шварцшильда – Шустера с результатами точных расчетов (рис. 5.6 и 5.7) позволяет сделать вполне ожидаемый вывод о возрастании погрешности указанного приближенного метода с уменьшением оптической толщины излучающего слоя. Тем не менее, если интегро-экспоненциальную функцию рассчитывать в процессе решения уравнения переноса излучения (а не табулировать ее), то метод Шварцшильда – Шустера является существенно более экономным.

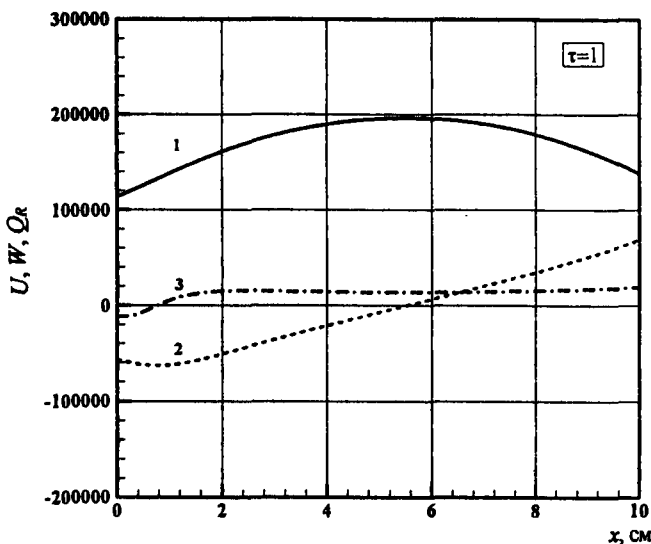


Рис. 5.9. Плотность радиационной энергии (1, U в Дж/см³), плотность радиационного теплового потока (2, W в Вт/см²) и дивергенция вектора плотности потока радиационной энергии (3, Q_R в Вт/см³). Решение методом Шварцшильда – Шустера для плоского слоя с оптической толщиной $\tau = 1$

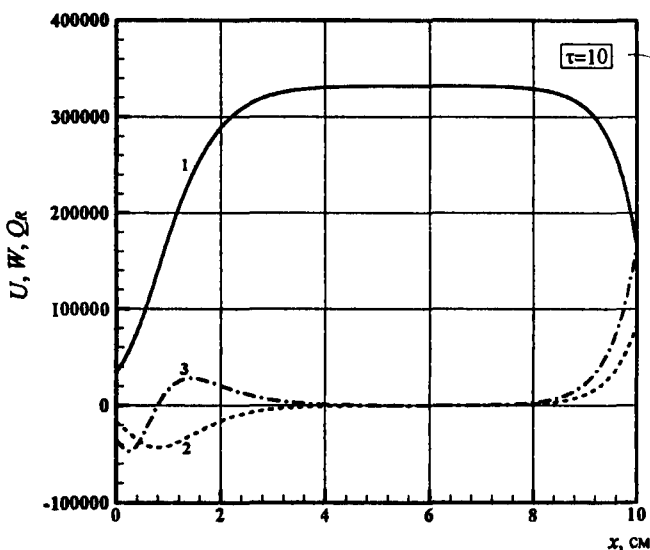


Рис. 5.10. То же, что и на рис. 5.9, но $\tau = 10$

5.2.3. Диффузионное приближение

Расчетные соотношения, даваемые диффузионным приближением, являются тождественными P_1 -приближению метода сферических гармоник (см. главу 6). Однако в литературе эти соотношения получили широкое распространение именно как диффузионное приближение, поскольку могут быть получены из наглядных физических представлений о диффузии фотонов излучения в среде. Очевидно, что чем более рассеивающая среда (чем ближе альbedo однократного рассеяния к единице), тем диффузионное приближение в большей степени отвечает физике процесса переноса излучения. По этой причине это приближение особенно эффективно применяется к расчету распространения излучения в сильно-рассеивающих средах, где применение других методов становится весьма затруднительным. Однако диффузионное приближение применяется также в физике низкотемпературной плазмы при отсутствии рассеяния. В этом случае этот метод дает удовлетворительные результаты для оптически толстых слоев, а для оптически тонких слоев погрешности могут быть значительны.

Рассмотрим расчетные соотношения диффузионного приближения при отсутствии светорассеяния.

В основе диффузионного приближения лежит процедура интегрирования уравнения переноса (5.8) по угловым переменным в пределах полного телесного угла, результатом чего является уравнение

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = c\kappa(U_b - U). \quad (5.77)$$

Второе уравнение постулируется исходя из предположения об аналогии процесса распространения квантов излучения процессу диффузии атомов и молекул в неоднородных средах

$$\mathbf{W} = -D\nabla U, \quad (5.78)$$

где $D = c/3\kappa$ – коэффициент диффузии излучения. Вывод формулы (5.78) и выражения для коэффициента диффузии излучения приведен в п. 6.5.

Получить без каких-либо допущений уравнение вида (5.78), связывающее вектор плотности потока излучения с объемной плотностью лучистой энергии в общем случае произвольной угловой зависимости интенсивности, невозможно в принципе (см. подробнее главу 6). Соотношение вида (5.78) дает хорошие результаты только для слабоанизотропного поля интенсивности.

Важным достоинством диффузионного приближения является то, что уравнения (5.77) и (5.78) являются достаточно простыми в численной реализации и, что особенно важно, позволяют достаточно просто сформулировать задачу переноса излучения в двумерной и трехмерной постановках для произвольной системы координат. Подставив (5.78) в (5.77), получим

$$\nabla \left(\frac{1}{3\kappa} \nabla U \right) = \kappa (U - U_b). \quad (5.79)$$

После определения поля плотности лучистой энергии вектор плотности потока излучения определяется по формуле (5.78).

Дивергенция вектора плотности спектрального потока находится по формуле

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = 4\pi \kappa J_b - \kappa U. \quad (5.80)$$

Решение дифференциального уравнения (5.79) производится с привлечением граничных условий, формулировка которых дана в п. 3.8. Для примера рассмотрим два типа граничных условий:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 0 \leq \mu \leq 1: \quad J(x = 0, \mu) &= J_0^+, \\ x = H, \quad -1 \leq \mu < 0: \quad J(x = H, \mu) &= J_H^-. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Граничные условия (5.81) сформулированы относительно интенсивности излучения, а дифференциальное уравнение сформулировано относительно плотности энергии излучения. Поэтому сначала необходимо преобразовать условия (5.81) таким образом, чтобы они содержали только плотность лучистой энергии. С этой целью предположим, что в диффузионном приближении угловая зависимость интенсивности излучения может быть представлена в виде

$$J = a + b\mu, \quad (5.82)$$

причем это представление единственно. В самом деле, в нашем распоряжении имеются только два соотношения (5.77) и (5.78), на которых базируется диффузионное приближение.

Воспользовавшись определениями плотности энергии излучения

$$U = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 J d\mu$$

и плотности потока излучения

$$W = 2\pi \int_{-1}^1 J \mu d\mu,$$

можно получить значения коэффициентов a и b в (5.82):

$$a = \frac{c}{4\pi} U, \quad b = \frac{3}{4\pi} W.$$

Поэтому вместо (5.82) можно использовать

$$J = \frac{c}{4\pi} U + \frac{3}{4\pi} W \mu. \quad (5.83)$$

Для того чтобы получить граничное условие при $x = 0$, запишем выражение для плотности потока излучения

$$W(x=0) = 2\pi \int_{-1}^1 J(x=0, \mu) \mu d\mu. \quad (5.84)$$

Проводя интегрирование в (5.84) с учетом того, что при $\mu \in [0, 1]$ интенсивность излучения берется из (5.81), а при $\mu \in [-1, 0]$ – из (5.83), получаем

$$W(x=0) = 2\pi J_0^+ - \frac{c}{2} U(x=0). \quad (5.85)$$

Но в диффузионном приближении постулируется связь (5.78) между W и U , поэтому искомое граничное условие имеет вид

$$W(x=0) = -\frac{c}{3\kappa} \frac{dU}{dx} \Big|_{x=0} = 2\pi J_0^+ - \frac{c}{2} U(x=0).$$

По аналогии формулируется граничное условие на правой границе $x = H$

$$W(x=H) = -\frac{c}{3\kappa} \frac{dU}{dx} \Big|_{x=H} = -2\pi J_H^- + \frac{c}{2} U(x=H).$$

В итоге получаем замкнутую краевую задачу переноса излучения в плоском слое в диффузионном приближении

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} = 3U - 3U_b, \quad (5.86)$$

$$x=0: -\frac{c}{3\kappa} \frac{dU}{dx} \Big|_{x=0} = 2\pi J_0^+ - \frac{c}{2} U(x=0), \quad (5.87)$$

$$x=H: -\frac{c}{3\kappa} \frac{dU}{dx} \Big|_{x=H} = -2\pi J_H^- + \frac{c}{2} U(x=H), \quad (5.88)$$

где $U_b = \frac{4\pi}{c} J_b$, $d\tau = \kappa dx$.

При произвольном распределении температуры и коэффициента поглощения в плоском слое задача (5.86)–(5.88) решается численно методом прогонки (Самарский А.А., 1987). Введем конечно-разностную сетку

$$\varpi = \{h_j = \tau_j - \tau_{j-1} = \text{const}; j = 1, \dots, NJ\},$$

на которой определим сеточную функцию $U_j = U(\tau_j)$, для расчета которой воспользуемся каноническим видом конечно-разностного уравнения прогонки:

$$A_j U_{j-1} - C_j U_j + B_j U_{j+1} + F_j = 0, \quad j = 2, \dots, NJ-1, \quad (5.89)$$

где A_j, B_j, C_j, F_j – прогоночные коэффициенты:

$$A_j = \frac{1}{h_j}, \quad B_j = \frac{1}{h_j}, \quad C_j = \frac{2}{h_j^2} + 3, \quad F_j = 3U_b.$$

Конечно-разностное представление граничных условий (5.87) и (5.88) имеет следующий вид:

$$U_1 = \frac{c/3\kappa h_2}{(c/3\kappa h_2) + (c/2)} U_2 + \frac{2\pi}{(c/3\kappa h_2) + (c/2)} J_0^+, \quad (5.90)$$

$$U_{NI} = \frac{c/3\kappa h_{NJ}}{(c/3\kappa h_{NJ}) + (c/2)} U_{NJ-1} + \frac{2\pi}{(c/3\kappa h_{NJ}) + (c/2)} J_H^-. \quad (5.91)$$

Результаты численного решения задачи (5.89)–(5.91) представлены на рис. 5.11 и 5.12 соответственно для $\tau_H = 1$ и 10 и распределения температуры, показанного на рис. 5.5. Сравнение этих результатов с точным решением (см. рис. 5.6 и 5.7) подтверждает высказанное ранее утверждение о том, что диффузионное приближение обеспечивает удовлетворительные результаты расчетов лишь при больших оптических толщинах.

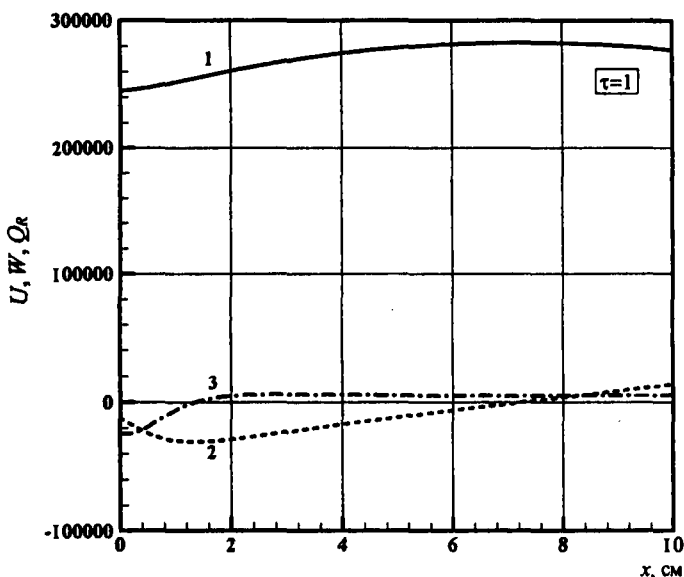


Рис. 5.11. Плотность радиационной энергии (1, U в Дж/см³), плотность радиационного теплового потока (2, W в Вт/см²) и дивергенция вектора плотности потока радиационной энергии (3, Q_R в Вт/см³). Решение диффузионным методом для плоского слоя с оптической толщиной $\tau = 1$

Заметим, что при численной реализации краевой задачи (5.89)–(5.91) необходимо проводить дополнительное тестирование получаемых результатов на разных расчетных сетках. В особенности указанное требование необходимо выполнять при наличии областей сильного пространственного изменения коэффициента поглощения или наличия разрывов I-го рода.

Дополнительные численные исследования рекомендуется проводить также с целью изучения свойств численных решений вблизи границ расчетной области. При этом сгущение расчетной сетки вблизи границ не всегда является достаточным.

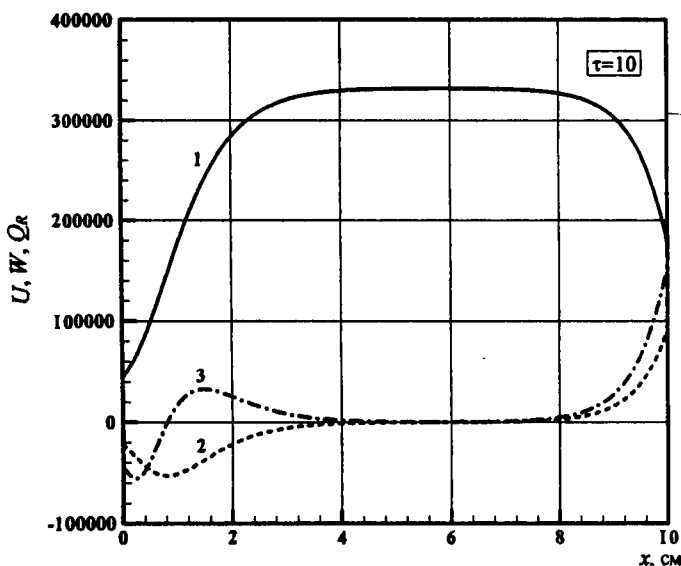


Рис. 5.12. Плотность радиационной энергии (1, U в Дж/см³), плотность радиационного теплового потока (2, W в Вт/см²) и дивергенция вектора плотности потока радиационной энергии (3, Q_R в Вт/см³). Решение диффузионным методом для плоского слоя с оптической толщиной $\tau = 10$

5.2.4. Метод Эддингтона

Метод был разработан для решения задач о переносе излучения в фотосферах звезд (Eddington A.S., 1926). Расчетные соот-

ношения метода сформулируем применительно к уравнению переноса в условиях ЛТР для изотропно рассеивающей среды

$$\mu \frac{\partial J(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J(\tau, \mu) = (1 - \tilde{\omega}) J_b(\tau) + \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 J(\tau, \mu') d\mu', \quad (5.92)$$

где $d\tau = (\kappa + \sigma) dx$.

В идейном отношении методы Шустера–Шварцшильда, Эддингтона и диффузионное приближение подобны между собой. В их основе лежит процедура последовательного интегрирования уравнения переноса по телесному углу с разными весовыми функциями. Методы отличает способ замыкания получающейся бесконечной системы уравнений. В методе Эддингтона замыкающее соотношение формулируется для давления излучения.

Процедура получения расчетных соотношений состоит из шести этапов.

1-й этап. Применение к уравнению (5.92) интегрального оператора вида

$$\Lambda \{ \} = 2\pi \int_{-1}^1 \{ \} d\mu, \quad (5.93)$$

результатом чего является уравнение

$$\frac{dW(\tau)}{d\tau} + G(\tau) = 4\pi(1 - \tilde{\omega})J_b(\tau) + \tilde{\omega}G(\tau), \quad (5.94)$$

где $G(\tau) = 2\pi \int_{-1}^1 J(\tau, \mu) d\mu = cU(\tau)$.

2-й этап. Применение к уравнению (5.92) интегрального оператора вида

$$\Lambda \{ \} = 2\pi \int_{-1}^1 \{ \} \mu d\mu, \quad (5.95)$$

результатом чего является уравнение

$$\frac{dP^R(\tau)}{d\tau} = -W(\tau), \quad (5.96)$$

где $P^R(\tau) = \frac{1}{c} 2\pi \int_{-1}^1 J(\tau, \mu) \mu^2 d\mu$ – радиационное давление.

3-й этап. Интенсивность излучения представляется в виде двух составляющих:

$$J(\tau, \mu) = J^+(\tau, \mu), \text{ при } \mu > 0; \quad (5.97)$$

$$J(\tau, \mu) = J^-(\tau, \mu), \text{ при } \mu < 0; \quad (5.98)$$

С учетом такого разделения получается

$$G(\tau) = 2\pi \left[\int_{-1}^0 J^-(\tau, \mu) d\mu + \int_0^1 J^+(\tau, \mu) d\mu \right], \quad (5.99)$$

$$W(\tau) = 2\pi \left[\int_{-1}^0 J^-(\tau, \mu) \mu d\mu + \int_0^1 J^+(\tau, \mu) \mu d\mu \right], \quad (5.100)$$

$$P^R(\tau) = \frac{1}{c} 2\pi \left[\int_{-1}^0 J^-(\tau, \mu) \mu^2 d\mu + \int_0^1 J^+(\tau, \mu) \mu^2 d\mu \right]. \quad (5.101)$$

4-й этап. Делается допущение о независимости от направления интенсивностей излучения в полусферах

$$J^+(\tau, \mu) = J^+(\tau), \text{ при } 0 < \mu \leq 1; \quad (5.102)$$

$$J^-(\tau, \mu) = J^-(\tau), \text{ при } -1 \leq \mu < 0. \quad (5.103)$$

С учетом этого

$$G(\tau) = 2\pi [J^+(\tau) + J^-(\tau)], \quad (5.104)$$

$$W(\tau) = \pi [J^+(\tau) - J^-(\tau)], \quad (5.105)$$

$$P^R(\tau) = \frac{2\pi}{3c} [J^+(\tau) + J^-(\tau)]. \quad (5.106)$$

5-й этап. Исключение радиационного давления по формулам (5.104), (5.106)

$$P^R(\tau) = (1/3c) G(\tau). \quad (5.107)$$

В результате вместо (5.96) имеем

$$\frac{1}{3} \frac{dG(\tau)}{d\tau} = -W(\tau). \quad (5.108)$$

6-й этап. Система уравнений (5.94) и (5.108) заменяется одним дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2G(\tau)}{d\tau^2} = 3(1 - \bar{\omega})G(\tau) - 12\pi(1 - \bar{\omega})J_b(\tau). \quad (5.109)$$

Уравнение (5.109) называется *приближением Эддингтона* к уравнению переноса излучения. Перейдем в уравнении (5.109) к плотности лучистой энергии

$$\frac{d^2U}{d\tau^2} = 3(1 - \bar{\omega})U - 3(1 - \bar{\omega})U_b. \quad (5.110)$$

Видно, что для нерассеивающей среды ($\bar{\omega} = 0$) уравнение (5.110) тождественно уравнению диффузионного приближения (5.86). В п. 6.1 будет показано, что полученное уравнение тождественно уравнению P_1 -приближения для изотропно рассеивающей среды (6.25).

5.3. Метод моментов

Рассмотренные в предыдущих разделах методы основаны на последовательном интегрировании уравнения переноса излучения по угловым переменным с некоторыми весовыми функциями и введении некоторых априорных предположений относительно угловой зависимости интенсивности излучения. Указанный подход обобщается в группе моментных методов.

Метод *моментов* предложен в работе (Krook M., 1955). Для вывода расчетных соотношений воспользуемся уравнением переноса излучения в прямоугольной декартовой системе координат (рис. 5.13) в приближении ЛТР:

$$\omega_x \frac{\partial J}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial J}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial J}{\partial z} + \tilde{\beta} J = \kappa J_b + \frac{\tilde{\sigma}}{4\pi} \int J(\Omega') d\Omega', \quad (5.111)$$

где $\omega_x = \sin\theta \cos\varphi$, $\omega_y = \sin\theta \sin\varphi$, $\omega_z = \cos\theta$ – направляющие косинусы единичного вектора направления распространения излучения Ω .

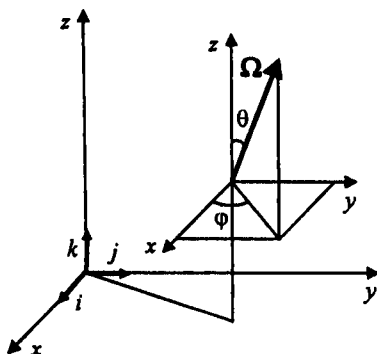


Рис. 5.13. К выводу уравнений метода моментов

Уравнение (5.111) получено с использованием так называемого *транспортного приближения светорассеяния*, которое позволяет существенно упростить расчет интеграла рассеяния. Указанное приближение является одним из простейших и весьма эффективным.

В транспортном приближении индикатриса рассеяния представляется в следующем виде:

$$\gamma(\Omega', \Omega) = (1 - \bar{\mu}) + 2\bar{\mu}\delta(\mu' - 1), \quad (5.112)$$

где δ – дельта-функция Дирака; μ' – косинус угла рассеяния в системе координат центра рассеяния; $\bar{\mu}$ – средний косинус рассеяния:

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \gamma^*(\mu') d\mu, \quad (5.113)$$

где $\gamma^*(\mu')$ – реальная индикатриса рассеяния, аппроксимируемая транспортным приближением (5.112).

Заметим, что предполагается азимутальная симметрия рассеяния, а соотношение (5.112) удовлетворяет условию нормировки (1.18)

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \gamma(\mu') d\Omega = 1.$$

Подставим (5.112) в интеграл рассеяния уравнения переноса излучения в трехмерной геометрии (3.3)

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} J(\Omega') \gamma(\Omega', \Omega) d\Omega = \\ & = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} J(\Omega') [(1-\bar{\mu}) + 2\bar{\mu}\delta(\Omega'-1)] d\Omega = \frac{\bar{\sigma}}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} J(\Omega') d\Omega + \sigma\bar{\mu}J. \end{aligned}$$

Тогда, вводя обозначение для эффективного коэффициента ослабления $\bar{\beta} = \kappa + \bar{\sigma}$, $\bar{\sigma} = (1-\bar{\mu})\sigma$, получаем уравнение (5.111).

Далее предполагается, что интенсивность излучения может быть представлена рядом

$$J(\mathbf{r}, \Omega) = J_0 + \sum_{j=1}^N a_j \omega_x^j + \sum_{j=1}^N b_j \omega_y^j + \sum_{j=1}^N c_j \omega_z^j, \quad (5.114)$$

где J_0, a_j, b_j, c_j – искомые функции координат, а величина N называется порядком приближения метода моментов. В частном случае $N=1$ получается первое приближение метода моментов

$$J(\mathbf{r}, \Omega) = J_0 + a\omega_x + b\omega_y + c\omega_z, \quad (5.115)$$

для которого и получим расчетные соотношения.

После подстановки (5.115) в (5.111) и интегрирования в пределах полного телесного угла, получается первое уравнение системы моментных уравнений

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} + \bar{\beta}J = 3\kappa(J_b - J_0). \quad (5.116)$$

Второе, третье и четвертое уравнения получают путем подстановки (5.115) в (5.111), умножения соответственно на $\omega_x, \omega_y,$

ω_z и последующего интегрирования по полному телесному углу. Итогом указанных действий являются уравнения

$$a = -\frac{1}{\bar{\beta}} \frac{\partial J_0}{\partial x}, \quad (5.117)$$

$$b = -\frac{1}{\bar{\beta}} \frac{\partial J_0}{\partial y}, \quad (5.118)$$

$$c = -\frac{1}{\bar{\beta}} \frac{\partial J_0}{\partial z}. \quad (5.119)$$

Подставляя (5.117)–(5.119) в (5.116) получают дифференциальное уравнение второго порядка относительно J_0

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\bar{\beta}} \frac{\partial J_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\bar{\beta}} \frac{\partial J_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\bar{\beta}} \frac{\partial J_0}{\partial z} \right) = 3\kappa (J_0 - J_b), \quad (5.120)$$

или

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{\bar{\beta}} (\nabla J_0) \right] = 3\kappa (J_0 - J_b). \quad (5.121)$$

Учитывая, что

$$U = \frac{1}{c} \int J d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_0, \quad U_b = \frac{4\pi}{c} J_b, \quad (5.122)$$

уравнение (5.121) можно переписать в виде

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{\bar{\beta}} (\nabla U) \right] = 3\kappa (U - U_b) \quad (5.123)$$

или

$$\frac{1}{\bar{\beta}} \nabla \cdot \left[\frac{1}{\bar{\beta}} (\nabla U) \right] = 3(1 - \bar{\omega})(U - U_b), \quad (5.124)$$

где $\bar{\omega} = \bar{\sigma}/\bar{\beta}$.

Последнее уравнение позволяет перейти к новой переменной – оптической толщине по ослаблению

$$d\tau = \bar{\beta} dr, \quad (5.125)$$

что приводит к наиболее компактной записи уравнения переноса излучения в первом приближении метода моментов

$$\nabla^2 U = 3(1 - \bar{\omega})(U - U_b). \quad (5.126)$$

Вектор плотности радиационного потока определяется по формуле

$$\mathbf{W} = \int_{4\pi} \mathcal{J} \Omega d\Omega = \frac{4\pi}{3} (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}), \quad (5.127)$$

а дивергенция этого вектора

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{W}) &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) = \\ &= -\frac{c}{3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\bar{\beta}} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\bar{\beta}} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\bar{\beta}} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Граничные условия для решения уравнения (5.126) формулируются с использованием задаваемой в исходных данных интенсивности излучения внешних по отношению к объему источников. Здесь, как и в других методах предварительного интегрирования уравнения переноса по угловым переменным, проявляется основной недостаток метода моментов: на границе, как правило, задается интенсивность излучения в полусфере, обращенной вовнутрь исследуемого объема, а интегрирование производится по полному телесному углу. Поэтому в задачах, где перенос излучения от поверхности, окружающей исследуемый объем, является важной составной частью решения, необходимо проводить специальные исследования с целью более адекватной формулировки граничных условий (см., в частности, п. 6.4). Развитие метода моментов применительно к светорассеивающим средам со сложной индикатрисой рассеяния представлено в работе (Горский В.В. и др., 1976).

5.4. Методы эффективных излучательных способностей

5.4.1. Метод эквивалентного излучающего объема

Этот простейший метод оценки интегральной излучательной способности объема излучающего газа основан на использовании понятия полусферической степени черноты

$$\varepsilon(p, T, R) = \frac{\pi}{\bar{\sigma} T^4} \int_0^{\infty} J_{b,v}(T) \{1 - \exp[-\kappa_v(p, T) R]\} dv, \quad (5.129)$$

где R – радиус полусферического однородного объема горячего газа, находящегося в термодинамическом равновесии с температурой T и давлением p .

Из (5.129) следует, что функция $\varepsilon(p, T, R)$ может быть за-табулирована в виде функции трех аргументов для стандартных газовых смесей (например: воздух, H_2 , CO_2 , смесь CO_2-N_2 , H_2O и т.п.). Примеры таких таблиц приведены в работе (Каменщиков В.А. и др., 1971). Имея в распоряжении подобные таблицы, расчет плотности интегрального радиационного потока в основании однородной полусферы выполняется по формуле

$$W = \bar{\sigma} T^4 \varepsilon(p, T, R). \quad (5.130)$$

Однако, к сожалению, в большинстве практически интересных случаев излучающие объемы являются неоднородными и не имеют форму полусферы.

В рамках обсуждаемого простейшего метода проблема неоднородности излучающего объема решается приближенной заменой истинного неоднородного объема некоторым эффективным однородным объемом. При этом алгоритм такой замены не определен и во многом основан на опыте и интуиции специалиста, решающего задачу.

Проблема отличия формы исследуемого объема от полусферического объема решается также путем введения эквивалентного полусферического объема, имеющего радиус

$$R_{eff} = 0.9(4V/F), \quad (5.131)$$

где V – объем излучающего газа; F – площадь его поверхности.

В этом случае оценка плотности интегрального радиационного потока на поверхности F дается формулой

$$W_F = \bar{\sigma} T^4 \varepsilon (p, T, R_{eff}). \quad (5.132)$$

5.4.2. Метод производных от полусферических испускательных способностей

Метод предназначен для расчета переноса излучения в неоднородных газовых объемах и подробно изложен в книге (Пеннер С.С., 1963), в которой дается ссылка на оригинальную работу, выполненную Р. Томсоном и С.С. Пеннером в виде отчета в 1959 году.

Метод изложен применительно к решению задачи о переносе излучения в плоском слое. Суть метода состоит в том, что плотность интегрального потока излучения может быть выражена через производные от степеней черноты однородных полусферических объемов. Поскольку эти производные пропорциональны среднепланковским коэффициентам поглощения, то при наличии таблиц предварительно рассчитанных коэффициентов (для стандартных смесей горячих газов и низкотемпературной плазмы) вычислительная процедура становится весьма эффективной. Однако недостатком метода является его ориентация на плоские излучающие слои. Обобщение на случай других геометрий и размерностей проблематично.

ГЛАВА 6

МЕТОД СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК (P_N -МЕТОД)

Метод сферических гармоник предложен в работе (Jeans J.H., 1917) и подробно исследован в работах (Дэвисон Б., 1960; Марчук Г.И., 1961; Чандрасекхар С., 1953; Султангазин У.М., 1979). Этот один из наиболее широко распространенных методов решения уравнения переноса излучения основан на аппроксимации угловой зависимости интенсивности излучения и индикатрисы рассеяния рядом по сферическим функциям. Сферические функции являются ортогональными полиномами, возникающими при решении уравнения Лапласа в сферических координатах (Никифоров А.Ф. и др., 1984). Поскольку непрерывные решения уравнения Лапласа называют *гармоническими функциями*, то сферические функции часто называют *сферическими гармониками*. Отсюда и следует происхождение названия данного метода. Что касается сокращенного обозначения метода сферических гармоник (P_N), то его происхождение обязано полиномам Лежандра, входящим в сферические функции и для которых обозначение P_N является общепринятым.

Большая популярность метода сферических гармоник обусловлена исключительно высокой эффективностью решения задач переноса излучения в светорассеивающих средах в объемах простейших и сложных геометрий. Указанная эффективность объясняется тем, что, с одной стороны, представление угловой зависимости интенсивности излучения и индикатрисы рассеяния рядом по сферическим функциям вполне адекватно физике процесса переноса излучения в большом числе практически важных случаев, а, с другой стороны, ортогональность используемых для указанного разложения полиномов позволяет свести исходное *интегро-*

дифференциальное уравнение переноса к системе дифференциальных уравнений. Причем в отличие от других методов решения исходного интегро-дифференциального уравнения точность решения задач переноса излучения и вычислительная эффективность соответствующих расчетных кодов возрастают с ростом альbedo однократного рассеяния.

Ниже основная идея метода будет сначала изложена на примере решения задачи переноса излучения в плоском слое, а затем будет дано обобщение для других геометрий.

6.1. Применение метода сферических гармоник к решению задачи переноса излучения в плоском слое

Рассматривается задача о переносе излучения в плоском слое рассеивающей среды (см. рис. 5.2)

$$\mu \frac{\partial J(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J(\tau, \mu) = (1 - \tilde{\omega}) J_b(\tau) + \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 \gamma(\mu', \mu) J(\tau, \mu') d\mu' \quad (6.1)$$

при граничных условиях

$$\tau = 0, \quad \mu > 0: \quad J(0, \mu) = J_0^+(\mu), \quad (6.2)$$

$$\tau = \tau_H, \quad \mu < 0: \quad J(\tau_H, \mu) = J_H^-(\mu). \quad (6.3)$$

В основе метода сферических гармоник, применяемого к решению задачи о плоском слое, лежит предположение о том, что интенсивность излучения может быть представлена в виде ряда по полиномам Лежандра

$$J(\tau, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \Phi_m(\tau) P_m(\mu). \quad (6.4)$$

Предполагается, что индикатриса рассеяния может быть также представлена в виде разложения

$$\gamma(\mu', \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \gamma_m P_m(\mu) P_m(\mu'), \quad \gamma_0 = 1. \quad (6.5)$$

Полиномы Лежандра обладают важными свойствами ортонормированности (Никифоров А.Ф. и др., 1984)

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2m+1}, & m = n \end{cases} \quad (6.6)$$

и могут быть выражены друг через друга посредством следующей рекуррентной формулы:

$$\mu P_m(\mu) = \frac{m P_{m-1}(\mu) + (m+1) P_{m+1}(\mu)}{2m+1}. \quad (6.7)$$

Полиномы Лежандра низких степеней имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} P_0(\mu) &= 1, & P_1(\mu) &= \mu, \\ P_2(\mu) &= \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), & P_3(\mu) &= \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu), \\ P_4(\mu) &= \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3), & P_5(\mu) &= \frac{1}{8}(63\mu^5 - 70\mu^3 + 15\mu). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Подставляя (6.4) и (6.5) в (6.1), интегрируя полученное уравнение по полному телесному углу, а также, учитывая (6.6), получают

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} P_m(\mu) \left[\mu \frac{d\varphi_m(\tau)}{d\tau} + \varphi_m(\tau) \right] = \\ = (1 - \tilde{\omega}) J_b(\tau) + \tilde{\omega} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \gamma_m P_m(\mu) \varphi_m(\tau), \end{aligned}$$

а с использованием (6.7)

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+1) \frac{d\varphi_{m+1}(\tau)}{d\tau} + m \frac{d\varphi_{m-1}(\tau)}{d\tau} + \right. \\ \left. + (2m+1)(1 - \tilde{\omega}\gamma_m) \varphi_m(\tau) - 4\pi(1 - \tilde{\omega}) J_b(\tau) \delta_{0,m} \right] P_m(\mu) = 0, \quad (6.9) \end{aligned}$$

где $\delta_{0,m}$ — дельта-функция Дирака.

Уравнение (6.9) должно выполняться при любых μ , значит, выражения в квадратных скобках при любом m должны равняться нулю

$$(m+1) \frac{d\varphi_{m+1}(\tau)}{d\tau} + m \frac{d\varphi_{m-1}(\tau)}{d\tau} + (2m+1)(1-\tilde{\omega}\gamma_m)\varphi_m(\tau) = 4\pi(1-\tilde{\omega})J_b(\tau)\delta_{0,m}, \quad m=0,1,2,\dots \quad (6.10)$$

Однако система дифференциальных уравнений (6.10) не замкнута. Каждое из уравнений при фиксированном m содержит три функции: $\varphi_{m-1}(\tau)$, $\varphi_m(\tau)$, $\varphi_{m+1}(\tau)$.

Для того чтобы ограничиться конечным числом уравнений, необходимо допустить, что с некоторого номера $m=N$ все последующие производные равны нулю:

$$\frac{d\varphi_{m+1}}{d\tau} = 0, \quad m=N, N+1, \dots \quad (6.11)$$

Число N называется *порядком приближения*, а система дифференциальных уравнений – P_N -приближением метода сферических гармоник.

Очевидно, что ограничение числа решаемых дифференциальных уравнений эквивалентно ограничению членов ряда в разложении интенсивности по компонентам Лежандра, т.е. введение фиксированного числа $m=N$ означает аппроксимацию угловой зависимости интенсивности излучения конечным рядом по сферическим функциям.

Наиболее широкое распространение в практике расчетов переноса излучения получило P_1 -приближение, в котором $m=0,1$ и система дифференциальных уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{d\varphi_1(\tau)}{d\tau} + (1-\tilde{\omega}\gamma_0)\varphi_0(\tau) = 4\pi(1-\tilde{\omega})J_b(\tau), \quad (6.12)$$

$$\frac{d\varphi_0(\tau)}{d\tau} + 3(1-\tilde{\omega}\gamma_1)\varphi_1(\tau) = 0, \quad (6.13)$$

а коэффициенты γ_0 и γ_1 задают индикатрису рассеяния в следующем виде:

$$\gamma(\mu', \mu) = \sum_{m=0}^1 (2m+1) \gamma_m P_m(\mu) P_m(\mu') = 1 + 3\gamma_1 \mu \mu'. \quad (6.14)$$

Это так называемое *линейно анизотропное рассеяние*. В частном случае изотропного рассеяния ($\gamma_0 = 1; \gamma_m = 0$ при $m \geq 1$) система уравнений (6.12) и (6.13) еще более упрощается:

$$\frac{d\varphi_1(\tau)}{d\tau} + (1 - \bar{\omega}) \varphi_0(\tau) = 4\pi(1 - \bar{\omega}) J_b(\tau), \quad (6.15)$$

$$\frac{d\varphi_0(\tau)}{d\tau} + 3\varphi_1(\tau) = 0. \quad (6.16)$$

Система уравнений (6.12) и (6.13) приобретает более наглядный вид, если учесть, что искомые функции имеют следующий физический смысл:

$$\varphi_0(\tau) = 2\pi \int_{-1}^1 J(\tau, \mu) d\mu = G(\tau) = cU(\tau), \quad (6.17)$$

$$\varphi_1(\tau) = 2\pi \int_{-1}^1 \mu J(\tau, \mu) d\mu = W(\tau), \quad (6.18)$$

что легко установить, учитывая, что в первом приближении метода сферических гармоник

$$J(\tau, \mu) = \frac{1}{4\pi} \varphi_0(\tau) P_0(\mu) + \frac{3}{4\pi} \varphi_1(\tau) P_1(\mu), \quad (6.19)$$

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu.$$

Поэтому система уравнений метода сферических гармоник для плоского светорассеивающего слоя приобретает вид

$$\frac{dW(\tau)}{d\tau} + (1 - \bar{\omega}\gamma_0) G(\tau) = 4\pi(1 - \bar{\omega}) J_b(\tau), \quad (6.20)$$

$$W(\tau) = -\frac{1}{3(1 - \bar{\omega}\gamma_1)} \frac{dG(\tau)}{d\tau} \quad (6.21)$$

или

$$-\frac{1}{3(1-\bar{\omega}\gamma_1)} \frac{d^2 G(\tau)}{d\tau^2} + (1-\bar{\omega}\gamma_0)G(\tau) = 4\pi(1-\bar{\omega})J_b(\tau) \quad (6.22)$$

или

$$-\frac{1}{3(1-\bar{\omega}\gamma_1)} \frac{d^2 U(\tau)}{d\tau^2} + (1-\bar{\omega}\gamma_0)U(\tau) = (1-\bar{\omega})U_b(\tau), \quad (6.23)$$

где $U_b(\tau) = \frac{4\pi}{c} J_b$.

Умножив последнее уравнение на знаменатель дроби при второй производной, получим в окончательном виде уравнение переноса излучения в P_1 -приближении метода сферических гармоник, которое при отсутствии рассеяния ($\bar{\omega} = 0$) в точности совпадает с уравнением диффузионного приближения (5.86).

Формулировка граничных условий в методе сферических гармоник обсуждается несколько позднее, в п. 6.4. Однако, пользуясь тем, что в P_1 -приближении интенсивность излучения представляется в виде ряда (6.4) и ограничивая его в соответствии с выбранным приближением, получим

$$J(\tau, \mu) = \frac{1}{4\pi} \varphi_0 P_0(\mu) + \frac{3}{4\pi} \varphi_1(\tau) P_1(\mu) = \frac{c}{4\pi} U(\tau) + \frac{3}{4\pi} W(\tau) \mu, \quad (6.24)$$

т.е., граничные условия, также как в диффузионном приближении (см. формулу (5.83)), могут быть сформулированы по аналогии с п. 5.2.3.

В итоге получаем краевую задачу P_1 -приближения метода сферических гармоник расчета переноса излучения в плоском светорассеивающем слое, обобщающую диффузионное приближение в части учета светорассеяния

$$\frac{d^2 U(\tau)}{d\tau^2} = 3(1-\bar{\omega}\gamma_0)(1-\bar{\omega}\gamma_1)U(\tau) - 3(1-\bar{\omega})(1-\bar{\omega}\gamma_1)U_b(\tau), \quad (6.25)$$

$$x=0: \quad -\frac{c}{3\kappa} \frac{dU}{dx} \Big|_{x=0} = 2\pi J_H^+ - \frac{c}{2} U(x=0), \quad (6.26)$$

$$x = H : -\frac{c}{3\kappa} \frac{dU}{dx} \Big|_{x=H} = -2\pi J_0^- + \frac{c}{2} U(x=H). \quad (6.27)$$

Еще раз напомним, что в данном случае оптическая толщина определяется по коэффициенту ослабления

$$d\tau = \beta dx = (\kappa + \sigma) dx.$$

На рис. 6.1–6.3 показано распределение радиационных характеристик U , W , Q_R в плоском изотропно рассеивающем слое при температурном распределении, показанном на рис. 5.5, коэффициенте поглощения $\kappa = 1 \text{ см}^{-1}$ и разных альбедах.

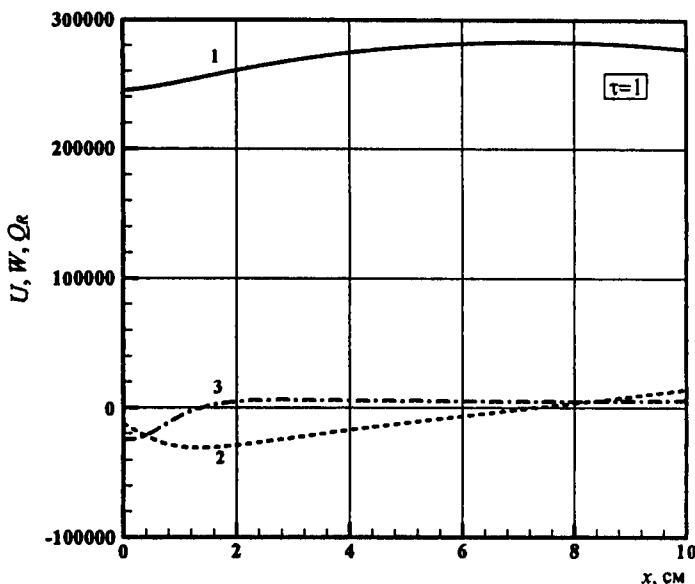


Рис. 6.1. Плотность радиационной энергии (1, U в Дж/см³), плотность радиационного теплового потока (2, W в Вт/см²) и дивергенция вектора плотности потока радиационной энергии (3, Q_R в Вт/см³); в плоском слое с оптической толщиной $\tau = 1$. Решение уравнения переноса излучения с использованием P_1 -приближения метода сферических гармоник

После расчета $U(\tau)$ плотность потока излучения находилась по формуле (6.21), а дивергенция вектора плотности лучистого потока находится по одному из следующих соотношений:

- формальное дифференцирование по τ дает

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = -\frac{1}{3(1-\bar{\omega}\gamma_1)} \frac{d^2 G(\tau)}{d\tau^2}; \quad (6.28)$$

- формула, следующая из (6.20)

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = 4\pi(1-\bar{\omega})J_b(\tau) - (1-\bar{\omega}\gamma_0)G(\tau). \quad (6.29)$$

Здесь дивергенция рассчитана на шкале оптических толщин.

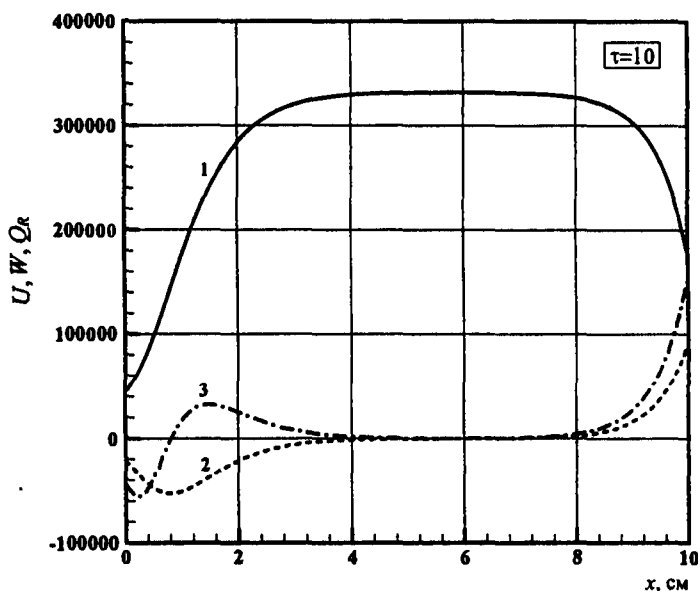


Рис. 6.2. Плотность радиационной энергии (1, U в Дж/см³), плотность радиационного теплового потока (2, W в Вт/см²) и дивергенции вектора плотности потока радиационной энергии (3, Q_R в Вт/см³); в плоском слое с оптической толщиной $\tau=10$. Решение уравнения переноса излучения с использованием P_1 -приближения метода сферических гармоник

На рис. 6.3 показано распределение тех же радиационных характеристик, но для изотропно рассеивающего слоя толщиной 10 см, оптической толщины по поглощению $\tau=1$ и с коэффициентом рассеяния $\sigma=10$ см⁻¹, т.е. с альбедо однократного рассея-

ния $\tilde{\omega} = 0.99$. Сравнение данных на рис. 6.1 и 6.3 показывает, что рассеяние в еще большей степени способствует установлению равновесия внутри излучающего слоя.

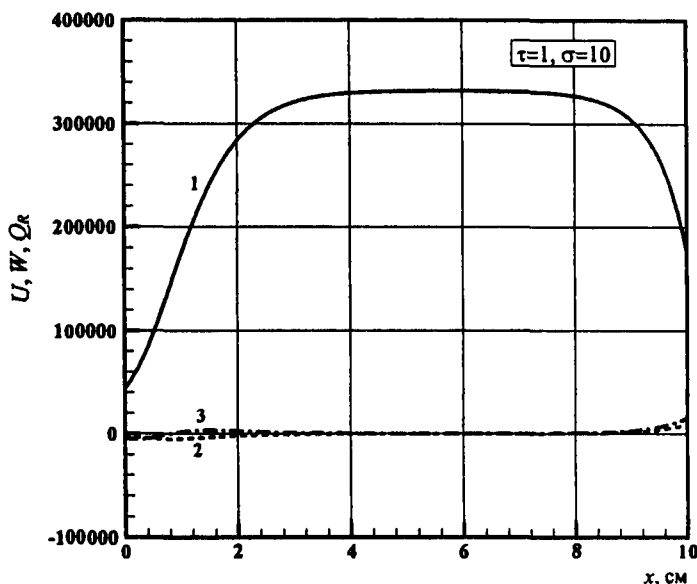


Рис. 6.3. Плотность радиационной энергии (1, U в Дж/см³), плотность радиационного теплового потока (2, W в Вт/см²) и дивергенции вектора плотности потока радиационной энергии (3, Q_R в Вт/см³); в плоском слое с оптической толщиной $\tau = 1$, $\sigma = 10$ см⁻¹. Решение уравнения переноса излучения с использованием P_1 -приближения метода сферических гармоник

6.2. Применение метода сферических гармоник к решению задачи переноса излучения в осесимметричной постановке

Рассматривается задача о переносе излучения в осесимметричном цилиндрическом объеме радиусом R и длиной H (рис. 6.4). Такая геометрия излучающей области широко используется в разных технических приложениях: ракетные двигатели, плазменные генераторы, электроразрядные устройства и т.п.

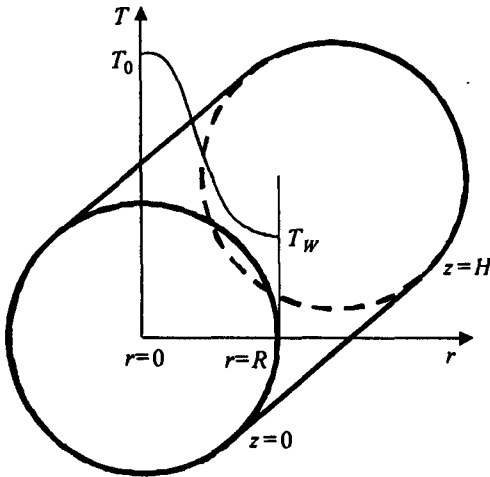


Рис. 6.4. Расчетная схема переноса теплового излучения в одномерном осесимметричном объеме

Уравнение переноса излучения в нерассеивающей среде в цилиндрическом объеме имеет вид

$$\sqrt{1-\mu^2} \left[\gamma \frac{\partial J(r, z, \mu, \gamma)}{\partial r} + \frac{1-\gamma^2}{r} \frac{\partial J(r, z, \mu, \gamma)}{\partial \gamma} \right] + \mu \frac{\partial J(r, z, \mu, \gamma)}{\partial z} + \kappa J(r, z, \mu, \gamma) = \kappa J_b(r, z), \quad (6.30)$$

при граничных условиях

$$z=0, \quad \mu > 0: \quad J(r, 0, \mu, \gamma) = J_0^+(r, \mu, \gamma), \quad (6.31)$$

$$z=H, \quad \mu < 0: \quad J(r, H, \mu, \gamma) = J_0^-(r, \mu, \gamma), \quad (6.32)$$

$$r=R, \quad \gamma < 0: \quad J(R, z, \mu, \gamma) = J_R^-(z, \mu, \gamma), \quad (6.33)$$

где $\mu = \cos\theta$, $\gamma = \cos\phi$; функции $J_0^+(r, \mu, \gamma)$, $J_0^-(r, \mu, \gamma)$, $J_R^-(z, \mu, \gamma)$ задают интенсивность внешних по отношению к объему источников излучения.

Предполагается, что интенсивность излучения $J = J(R, z, \mu, \gamma)$ может быть разложена в ряд по сферическим функциям следующим образом (Никифоров А.Ф. и др., 1984):

$$J = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \alpha_{l,0} P_l(\mu) + \sum_{m=1}^l P_l^m(\mu) (\alpha_{l,m} \cos m\varphi + \beta_{l,m} \sin m\varphi) \right], \quad (6.34)$$

где $\alpha_{l,m}$ и $\beta_{l,m}$ – неизвестные функции пространственных координат; $P_l^m(\mu)$ – присоединенные полиномы Лежандра, для которых справедливы следующие условия ортонормирования:

$$\int_{-1}^1 P_l^m P_l^m d\mu = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}, \quad (6.35)$$

$$\int_0^1 (P_l^m)^2 d\mu = \frac{1}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \quad (6.36)$$

где $\delta_{ll'}$ – дельта-функция Дирака; а также следующие рекуррентные формулы

$$(2l+1)\mu P_l^m(\mu) = (l-m+1)P_{l+1}^m(\mu) + (l+m)P_{l-1}^m(\mu),$$

$$0 \leq m \leq l-1; \quad (6.37)$$

$$(2l+1)\sqrt{1-\mu^2} P_l^{m-1}(\mu) = P_{l+1}^m(\mu) - P_{l-1}^m(\mu),$$

$$0 \leq m \leq l-1; \quad (6.38)$$

$$(2l+1)\sqrt{1-\mu^2} P_l^{m+1}(\mu) =$$

$$= (l+m)(l+m+1)P_{l-1}^m(\mu) - (l-m)(l-m+1)P_{l+1}^m(\mu),$$

$$0 \leq m \leq l-1. \quad (6.39)$$

Другие свойства сферических функций можно найти в справочниках (Янке Е., Эмде Ф. и др., 1968; Абрамовиц М. и Стиган И. (ред.), 1979).

Для получения системы уравнений метода сферических гармоник используется так называемая *моментная процедура*, кото-

рая состоит в применение к уравнению переноса (6.30) интегрального оператора следующего вида:

$$\Lambda_{l,m} \{ \} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \{ \} P_l^m(\mu) (\alpha_{l,m} \cos m\varphi + \beta_{l,m} \sin m\varphi) d\varphi d\mu. \quad (6.40)$$

Так как задача сформулирована в осесимметричной постановке, то

$$J(r, z, \mu, \varphi) = J(r, z, \mu, -\varphi), \quad (6.41)$$

т.е. интенсивность является четной функцией по углу φ . Отсюда следует, что

$$\beta_{l,m} = 0 \quad (6.42)$$

и основной задачей является формулировка уравнений для отыскания функций $\alpha_{l,m}$.

Применение интегрального оператора (6.40) к уравнению (6.30) с учетом (6.42) приводит к бесконечной системе дифференциальных уравнений, ограничение которой путем задания максимального числа $l = N$ в разложении вида (6.34) дает следующие уравнения P_N-приближения метода сферических гармоник:

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \delta_{m,0}}{2(2l+1)} \left[\frac{\partial F_{l+1}^{m+1}}{\partial r} + (m+1) \frac{F_{l+1}^{m+1}}{r} \right] - \\ & - \frac{1 + \delta_{m,0}}{2(2l+1)} \left[\frac{\partial F_{l-1}^{m+1}}{\partial r} + (m+1) \frac{F_{l-1}^{m+1}}{r} \right] + \\ & + \frac{(l+m-1)(l+m)(1-\delta_{m,0})}{2(2l+1)} \left[\frac{\partial F_{l-1}^{m-1}}{\partial r} - (m-1) \frac{F_{l-1}^{m-1}}{r} \right] - \\ & - \frac{(l-m+1)(l-m+2)(1-\delta_{m,0})}{2(2l+1)} \left[\frac{\partial F_{l+1}^{m-1}}{\partial r} - (m-1) \frac{F_{l+1}^{m-1}}{r} \right] - \\ & + \frac{l-m+1}{2l+1} \frac{\partial F_{l+1}^m}{\partial z} + \frac{l+m}{2l+1} \frac{\partial F_{l-1}^m}{\partial z} + \kappa F_l^m = 4\pi \kappa J_b \delta_{l,0} \delta_{m,0}, \\ & 0 \leq l < N, \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1+\delta_{m,0}}{2(2N+1)} \left[\frac{\partial F_{N-1}^{m+1}}{\partial r} + (m+1) \frac{F_{N-1}^{m+1}}{r} \right] + \\
& + \frac{(N+m-1)(N+m)(1-\delta_{m,0})}{2(2N+1)} \left[\frac{\partial F_{N-1}^{m-1}}{\partial r} - (m-1) \frac{F_{N-1}^{m-1}}{r} \right] + \\
& + \frac{N+m}{2N+1} \frac{\partial F_{N-1}^m}{\partial z} + \kappa F_N^m = 0, \\
& l = N, \tag{6.44}
\end{aligned}$$

где

$$F_l^m = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} J P_l^m(\mu) \cos m\varphi d\varphi d\mu. \tag{6.45}$$

Граничные условия для системы уравнений (6.43), (6.44) формулируются в форме условий Марка или Маршака (см. п. 6.4).

Система (6.43), (6.44) позволяет получить расчетные уравнения для плоской и осесимметричной постановки любого приближения. Ниже представлены уравнения наиболее часто используемых вычислительных моделей.

1. Частный случай задачи о переносе излучения в двумерном цилиндрическом объеме: P_1 -приближение для плоского слоя

В этом случае $N=1$ и в уравнениях (6.43), (6.44) должны быть исключены все слагаемые, содержащие зависимость от радиальной переменной.

Указанная система сводится к следующей

$$\begin{aligned}
- \quad & l = 0, \quad m = 0 \\
& \frac{\partial F_1^0}{\partial z} + \kappa F_0^0 = 4\pi \kappa J_b; \tag{6.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \quad & l = N = 1, \quad m = 0 \\
& \frac{1}{3} \frac{\partial F_0^0}{\partial z} + \kappa F_1^0 = 0; \tag{6.47}
\end{aligned}$$

$$- \quad l = N = 1, \quad m = 1$$

$$\frac{2}{3} \frac{\partial F_0^1}{\partial z} + \kappa F_1^1 = 0; \quad (6.48)$$

Приближение одномерного плоского слоя подразумевает выполнение условия осевой симметрии, поэтому

$$F_1^1 = F_2^1 = 0, \quad (6.49)$$

как содержащие интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} J \cos \varphi d\varphi,$$

где J – четная функция по переменной φ .

Кроме этого

$$P_l^m(\mu) = 0 \text{ при } l < m, \quad (6.50)$$

так как $m \leq l$, поэтому

$$F_0^1 = F_0^2 = 0. \quad (6.51)$$

В результате получаем систему уравнений P_1 -приближения для плоского слоя

$$\frac{\partial F_1^0}{\partial z} + \kappa F_0^0 = 4\pi \kappa J_b, \quad (6.52)$$

$$\kappa F_1^0 = -\frac{1}{3} \frac{\partial F_0^0}{\partial z}, \quad (6.53)$$

где

$$F_0^0 = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} J P_0^0(\mu) d\mu d\varphi = 2\pi \int_{-1}^1 J d\mu = cU, \quad (6.54)$$

$$F_1^0 = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} J P_1^0(\mu) d\mu d\varphi = 2\pi \int_{-1}^1 J \mu d\mu = W. \quad (6.55)$$

Полученные уравнения совпадают с (6.20) и (6.21).

2. Частный случай задачи о переносе излучения в двумерном цилиндрическом объеме: P_1 -приближение в одномерной цилиндрической геометрии

В этом случае $N=1$ и в уравнениях (6.43), (6.44) должны быть исключены все слагаемые, содержащие зависимость от осевой переменной.

Указанная система уравнений сводится к следующей

$$- \quad l=0, \quad m=0$$

$$\frac{\partial F_1^1}{\partial r} + \frac{F_1^1}{r} + \kappa F_0^0 = 4\pi\kappa J_b; \quad (6.56)$$

$$- \quad l=N=1, \quad m=0$$

$$\frac{2}{2 \cdot 3} \left(\frac{\partial F_0^1}{\partial r} + \frac{F_0^1}{r} \right) + \kappa F_1^0 = 0; \quad (6.57)$$

$$- \quad l=N=1, \quad m=1$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{\partial F_0^2}{\partial r} + 2 \frac{F_0^2}{r} \right) + \frac{2}{2 \cdot 3} \frac{\partial F_0^0}{\partial r} + \kappa F_1^1 = 0. \quad (6.58)$$

Воспользовавшись условиями осевой симметрии и условием (6.58), получаем систему уравнений P_1 -приближения метода сферических гармоник для одномерной цилиндрической геометрии

$$\frac{\partial F_1^1}{\partial r} + \frac{F_1^1}{r} + \kappa F_0^0 = 4\pi\kappa J_b, \quad (6.59)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial F_0^0}{\partial r} + \kappa F_1^1 = 0, \quad (6.60)$$

где

$$F_0^0 = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} J P_0^0(\mu) d\mu d\varphi = 2\pi \int_{-1}^1 J d\mu = cU, \quad (6.61)$$

$$F_1^1 = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} J P_1^1(\mu) \cos\varphi d\mu d\varphi = W. \quad (6.62)$$

Подставим (6.61) и (6.62) в систему уравнений (6.59), (6.60)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rW) + c\kappa U = c\kappa U_b, \quad (6.63)$$

$$\frac{c}{3\kappa} \frac{\partial U}{\partial r} + W = 0. \quad (6.64)$$

Сформулируем краевую задачу для цилиндрической области с абсолютно черными границами, с температурой T_W

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{3\kappa} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \kappa (U - U_b), \quad (6.65)$$

$$r = 0: \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 0; \quad (6.66)$$

$$r = R: \quad \frac{2}{3\kappa} \frac{\partial U}{\partial r} = U_b(T_W) - U. \quad (6.67)$$

Численный метод решения краевой задачи (6.65)–(6.67) рассмотрен в п. 6.3.

3. Частный случай: P_1 -приближение для двумерной цилиндрической геометрии

В этом случае $N = 1$ и должны быть учтены условия осевой симметрии.

Итоговая система уравнений имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r F_1^1}{\partial r} + \frac{\partial F_1^0}{\partial z} + \kappa F_0^0 = 4\pi\kappa J_b; \quad (6.68)$$

$$F_1^0 = -\frac{1}{3\kappa} \frac{\partial F_0^0}{\partial z}, \quad (6.69)$$

$$F_1^1 = -\frac{1}{3\kappa} \frac{\partial F_0^0}{\partial r}. \quad (6.70)$$

Поскольку

$$F_0^0 = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} J P_0^0(\mu) d\mu d\phi = 2\pi \int_{-1}^1 J d\mu = cU, \quad (6.71)$$

$$F_1^0 = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} J P_1^0(\mu) \cos \varphi d\mu d\varphi = W_z, \quad (6.72)$$

$$F_1^1 = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} J P_1^1(\mu) \cos \varphi d\mu d\varphi = W_r, \quad (6.73)$$

то вместо (6.68)–(6.70) можно записать

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r W_r) + \frac{\partial W_z}{\partial z} + c \kappa U = 4 \pi \kappa J_b, \quad (6.74)$$

$$W_z = -\frac{c}{3\kappa} \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (6.75)$$

$$W_r = -\frac{c}{3\kappa} \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (6.76)$$

Для замкнутой цилиндрической области с абсолютно черными поверхностями, температура которых T_w , имеем краевую задачу

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{3\kappa} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{r}{3\kappa} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \kappa (U - U_b), \quad (6.77)$$

$$r=0: \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad (6.78)$$

$$r=R: \quad \frac{2}{3\kappa} \frac{\partial U}{\partial r} = U_b - U, \quad (6.79)$$

$$z=0: \quad \frac{2}{3\kappa} \frac{\partial U}{\partial z} = U - U_b, \quad (6.80)$$

$$z=H: \quad \frac{2}{3\kappa} \frac{\partial U}{\partial z} = U_b - U. \quad (6.81)$$

4. Частный случай: P_3 -приближение для двумерной цилиндрической геометрии

В этом случае $N=3$.

$$- \quad l=0, \quad m=0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r F_1^1}{\partial r} + \frac{\partial F_1^0}{\partial z} + \kappa F_0^0 = 4\pi \kappa J_b, \quad (6.82)$$

$$- \quad l=1, \quad m=0$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial r F_2^1}{\partial r} + \frac{2}{3} \frac{\partial F_2^0}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial F_0^0}{\partial z} + \kappa F_1^0 = 0, \quad (6.83)$$

$$- \quad l=1, \quad m=1$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{\partial F_2^2}{\partial r} + 2 \frac{F_r^2}{r} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial F_0^0}{\partial r} - \frac{1}{3} \frac{\partial F_2^0}{\partial r} + \frac{1}{3} \frac{\partial F_2^1}{\partial z} + \kappa F_1^1 = 0, \quad (6.84)$$

$$- \quad l=2, \quad m=0$$

$$\frac{1}{5} \frac{1}{r} \frac{\partial r F_3^1}{\partial r} - \frac{1}{5} \frac{1}{r} \frac{\partial r F_1^1}{\partial r} + \frac{3}{5} \frac{\partial F_3^0}{\partial z} + \frac{2}{5} \frac{\partial F_1^0}{\partial z} + \kappa F_2^0 = 0, \quad (6.85)$$

$$- \quad l=2, \quad m=1$$

$$\frac{1}{10} \left(\frac{\partial F_3^2}{\partial r} + 2 \frac{F_r^2}{r} \right) + \frac{3}{5} \frac{\partial F_1^0}{\partial r} - \frac{3}{5} \frac{\partial F_3^0}{\partial r} + \frac{2}{5} \frac{\partial F_3^1}{\partial z} + \frac{3}{5} \frac{\partial F_1^1}{\partial z} + \kappa F_2^1 = 0, \quad (6.86)$$

$$- \quad l=2, \quad m=2$$

$$\frac{1}{10} \left(\frac{\partial F_3^3}{\partial r} + 3 \frac{F_r^3}{r} \right) + \frac{12}{10} \frac{\partial F_1^1}{\partial r} - \frac{1}{5} \frac{\partial F_3^1}{\partial r} + \frac{1}{5} \frac{\partial F_3^2}{\partial z} + \kappa F_2^2 = 0, \quad (6.87)$$

$$- \quad l=N=3, \quad m=0$$

$$- \frac{1}{7} \frac{1}{r} \frac{\partial r F_2^1}{\partial r} + \frac{3}{7} \frac{\partial F_2^0}{\partial z} + \kappa F_3^0 = 0, \quad (6.88)$$

$$- \quad l=N=3, \quad m=1$$

$$- \frac{1}{14} \left(\frac{\partial F_2^2}{\partial r} + 2 \frac{F_r^2}{r} \right) + \frac{12}{14} \frac{\partial F_2^0}{\partial r} + \frac{4}{7} \frac{\partial F_2^1}{\partial z} + \kappa F_3^1 = 0, \quad (6.89)$$

$$- \quad l=N=3, \quad m=2$$

$$\frac{20}{14} \left(\frac{\partial F_2^1}{\partial r} - \frac{F_2^1}{r} \right) + \frac{5}{7} \frac{\partial F_2^2}{\partial z} + \kappa F_3^2 = 0, \quad (6.90)$$

$$- \quad l = N = 3, \quad m = 3$$

$$\frac{30}{14} \left(\frac{\partial F_2^2}{\partial r} - 2 \frac{F_2^2}{r} \right) + \kappa F_3^3 = 0. \quad (6.91)$$

Дальнейшее упрощение данной системы уравнений связано с использованием свойств симметрии, в частности (6.49), (6.50) и т.п.

6.3. Конечно-разностные схемы численного интегрирования двумерных уравнений P_1 -приближения метода сферических гармоник

Рассмотрим разностную аппроксимацию диффузионных уравнений в плоском ($p=0$) и цилиндрическом ($p=1$) случаях. Для сокращения записи не будем указывать индекс селективности (или номер спектрального диапазона, в котором выполнено осреднение оптических свойств). Решаемая система имеет вид

$$\frac{1}{r^p} \cdot \frac{\partial r^p W^r}{\partial r} + \frac{\partial W^z}{\partial z} + \kappa U = \kappa U_b, \quad (6.92)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial r} + \kappa W^r = 0, \quad (6.93)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial z} + \kappa W^z = 0, \quad (6.94)$$

где W^r и W^z суть проекции вектора плотности лучистого потока на оси r и z соответственно, а скорость света c включена в U . Будет использовано также эквивалентное системе (6.92)–(6.94) уравнение

$$\frac{1}{r^p} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^p}{3\kappa} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{3\kappa} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \kappa U = \kappa U_b. \quad (6.95)$$

Граничные условия на оси симметрии задаются в обычном виде:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad (6.96)$$

а на внешних границах, либо в виде соотношения, выражающего отсутствие внешнего потока (см., например, (5.88)):

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} = -U, \quad (6.97)$$

либо асимптотические граничные условия вида:

$$U(\mathbf{r})|_s = U_b(\mathbf{r})|_s. \quad (6.98)$$

При построении разностной схемы будем исходить из того, что на двумерной сетке по переменным r и z заданы поля температур $T_{i,j}$, функции источников $J_{b,i,j}$, коэффициенты поглощения $\kappa_{i,j}$. При построении разностной схемы будем следовать работе (Четверушкин Б.Н., 1985) и определим плотности лучистой энергии и потоки так, как это показано на рис. 6.5.

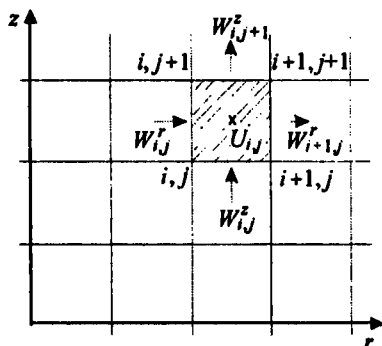


Рис. 6.5. Радиационные потоки в расчетной ячейке

Плотность лучистой энергии определена в ячейке, а проекции потоков – на ее сторонах. Воспользуемся интегро-интерполяционным методом (Самарский А.А., 1987). Проинтегрируем исходное уравнение (6.92) по объему заштрихованной на рис. 6.5 ячейки

$$V_{i,j} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^p dr \int_{z_j}^{z_{j+1}} dz = \frac{(r_{i+1}^{p+1} - r_i^{p+1})(z_{j+1} - z_j)}{p+1}. \quad (6.99)$$

Если в пределах этой ячейки положить

$$\begin{aligned} U_b &= U_{b,i,j}, \\ \kappa &= \kappa_{i,j}, \\ U &= U_{i,j}, \quad \forall r \in [r_i, r_{i+1}], \quad \forall z \in [z_j, z_{j+1}], \end{aligned} \quad (6.100)$$

то получим

$$\begin{aligned} W_{i+1,j}^r \frac{r_{i+1}^p (p+1)}{r_{i+1}^{p+1} - r_i^{p+1}} - W_{i,j}^r \frac{r_i^p (p+1)}{r_{i+1}^{p+1} - r_i^{p+1}} + \\ + W_{i,j+1}^z \frac{1}{z_{j+1} - z_j} - W_{i,j}^z \frac{1}{z_{j+1} - z_j} + \kappa_{i,j} U_{i,j} - \kappa_{i,j} U_{b,i,j} = 0. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Замкнутое конечно-разностное уравнение удастся получить, если установить связь между плотностью энергии и плотностью потока. Для этого рассмотрим сначала в тех же предположениях (6.100) одномерный случай, например, вдоль радиальной переменной (пренебрегая кривизной по r):

$$\frac{dW}{dr} + \kappa U = \kappa U_b, \quad (6.102)$$

$$\frac{dU}{dr} + 3\kappa W = 0. \quad (6.103)$$

Из (6.102), (6.103) имеем уравнение

$$\frac{d^2 W}{dr^2} - \lambda W = 0, \quad (6.104)$$

решение которого имеет вид

$$W(\xi) = C_1 \exp(\lambda \xi) + C_2 \exp(-\lambda \xi), \quad (6.105)$$

где $\lambda^2 = 3\kappa^2$, $\xi = r - r_i$, $r \in [r_i, r_{i+1}]$.

Подставив (6.105) в (6.102), получим уравнение относительно U . Постоянные C_1 и C_2 легко найти из условий

$$\begin{aligned} \xi = 0, \quad U = U_i, \quad W = W_i, \\ \xi = r_{i+1} - r_i = h_i, \quad U = U_{i+1}, \quad W = W_{i+1}. \end{aligned} \quad (6.106)$$

В результате получим уравнения

$$W_{i+1} - W_i = 2P \operatorname{th} \frac{\lambda h_i}{2} + (U_i + U_{i+1}) \operatorname{th} \frac{\lambda h_i}{2} / \sqrt{3}, \quad (6.107)$$

$$U_{i+1} - U_i = -\sqrt{3} (W_i + W_{i+1}) \operatorname{th} \frac{\lambda h_i}{2}, \quad (6.108)$$

где $P = \kappa_{i,j} U_{b,i,j}$.

Но нам необходима связь между функциями U и W , заданными не в одних и тех же точках, а со смещением на половину ячейки. Для того, чтобы получить формулу для плотности потока излучения через разность объемных плотностей энергии излучения в соседних ячейках, уравнение (6.108) записываем на отрезках $[r_i, r_{i+1/2}]$ и $[r_{i-1/2}, r_i]$

$$U_i - U_{i-1/2} = -\sqrt{3} (W_i + W_{i-1/2}) \operatorname{th} \left(\lambda_{i-1} \frac{r_i - r_{i-1/2}}{2} \right), \quad (6.109)$$

$$U_{i+1/2} - U_i = -\sqrt{3} (W_{i+1/2} - W_i) \operatorname{th} \left(\lambda_i \frac{r_{i+1/2} - r_i}{2} \right). \quad (6.110)$$

Складывая (6.109) и (6.110), получим

$$W_i = \frac{U_{i-1/2} - U_{i+1/2}}{2\sqrt{3} \left[\operatorname{th} \left(\lambda_{i-1} \frac{r_i - r_{i-1/2}}{2} \right) + \operatorname{th} \left(\lambda_i \frac{r_{i+1/2} - r_i}{2} \right) \right]}, \quad (6.111)$$

где допускается, что

$$W_{i-1/2} = W_i = W_{i+1/2}. \quad (6.112)$$

Но, в соответствии с (6.100) надо положить

$$\begin{aligned} U_{i-1/2} &= U_{i-1}, \\ U_{i+1/2} &= U_i. \end{aligned} \quad (6.113)$$

После чего придем к окончательному выражению

$$W_i = \frac{U_{i-1} - U_i}{2\sqrt{3} \left[\operatorname{th} \left(\lambda_{i-1} \frac{r_i - r_{i-1/2}}{2} \right) + \operatorname{th} \left(\lambda_i \frac{r_{i+1/2} - r_i}{2} \right) \right]}. \quad (6.114)$$

Формула (6.114) с точностью до несущественного коэффициента совпадает с формулой, полученной в работе (Четверушкин Б.Н., 1985). Однако при получении связи между потоками и плотностями энергии, можно не применять допущения (6.112), а воспользоваться уравнением (6.107) для тех же самых половинных ячеек и, тем самым, получить более обоснованные уравнения:

$$\begin{aligned} W_{i-1/2} + W_i &= 2W_i - 2P_{i-1} \operatorname{th} \left(\lambda_{i-1} \frac{r_i - r_{i-1/2}}{2} \right) + 2U_i \frac{\operatorname{th} \left(\lambda_{i-1} \frac{r_i - r_{i-1/2}}{2} \right)}{\sqrt{3}}, \\ W_{i+1/2} + W_i &= 2W_i + 2P_i \operatorname{th} \left(\lambda_i \frac{r_{i+1/2} - r_i}{2} \right) - 2U_i \frac{\operatorname{th} \left(\lambda_i \frac{r_{i+1/2} - r_i}{2} \right)}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (6.115)$$

С использованием формул (6.115) вместо (6.114) имеем

$$W_i = \frac{U_{i-1} - U_i (1 + G_i)}{H_i} + R_i, \quad (6.116)$$

где
$$G_i = 2 \left[\operatorname{th}^2 \left(\lambda_{i-1} \frac{r_i - r_{i-1/2}}{2} \right) - \operatorname{th}^2 \left(\lambda_i \frac{r_{i+1/2} - r_i}{2} \right) \right],$$

$$H_i = 2\sqrt{3} \left[\operatorname{th} \left(\lambda_i \frac{r_{i+1/2} - r_i}{2} \right) + \operatorname{th} \left(\lambda_{i-1} \frac{r_i - r_{i-1/2}}{2} \right) \right],$$

$$R_i = \frac{P_{i-1}}{H_i} \operatorname{th}^2 \left(\lambda_{i-1} \frac{r_i - r_{i-1/2}}{2} \right) - \frac{P_i}{H_i} \operatorname{th}^2 \left(\lambda_i \frac{r_{i+1/2} - r_i}{2} \right).$$

Теперь аналогичное соотношение запишем в двумерном случае, используя в радиальном направлении те же самые экспоненциальные функции, что и в осевом. Отметим, что при этом мы получим правильную асимптотику решений, как в случае оптически тонкой, так и в случае оптически толстой среды

$$W_{i,j}^z = \frac{U_{i,j-1} - U_{i,j} (1 + G_j^z)}{H_j^z} + R_j^z, \quad (6.117)$$

$$\text{где } H_j^z = 2\sqrt{3} \left[\operatorname{th} \left(\sqrt{3}\kappa_{i,j} \frac{z_{j+1/2} - z_j}{2} \right) + \operatorname{th} \left(\sqrt{3}\kappa_{i,j-1} \frac{z_j - z_{j-1/2}}{2} \right) \right],$$

$$G_j^z = 2 \left[\operatorname{th}^2 \left(\sqrt{3}\kappa_{i,j-1} \frac{z_j - z_{j-1/2}}{2} \right) - \operatorname{th}^2 \left(\sqrt{3}\kappa_{i,j} \frac{z_{j+1/2} - z_j}{2} \right) \right],$$

$$R_j^z = \frac{U_{b,i,j-1} \operatorname{th}^2 \left(\sqrt{3}\kappa_{i,j-1} \frac{z_j - z_{j-1/2}}{2} \right) - U_{b,i,j} \operatorname{th}^2 \left(\sqrt{3}\kappa_{i,j} \frac{z_{j+1/2} - z_j}{2} \right)}{H_j^z}.$$

$$W_{i,j}^r = \frac{U_{i-1,j} - U_{i,j} (1 + G_j^r)}{H_j^r} + R_j^r, \quad (6.118)$$

$$\text{где } H_j^r = 2\sqrt{3} \left[\operatorname{th} \left(\sqrt{3}\kappa_{i,j} \frac{r_{i+1/2} - r_i}{2} \right) + \operatorname{th} \left(\sqrt{3}\kappa_{i-1,j} \frac{r_i - r_{i-1/2}}{2} \right) \right],$$

$$G_j^r = 2 \left[\operatorname{th}^2 \left(\sqrt{3}\kappa_{i-1,j} \frac{r_i - r_{i-1/2}}{2} \right) - \operatorname{th}^2 \left(\sqrt{3}\kappa_{i,j} \frac{r_{i+1/2} - r_i}{2} \right) \right],$$

$$R_j^r = \frac{U_{b,i-1,j} \operatorname{th}^2 \left(\sqrt{3}\kappa_{i-1,j} \frac{r_i - r_{i-1/2}}{2} \right) - U_{b,i,j} \operatorname{th}^2 \left(\sqrt{3}\kappa_{i,j} \frac{r_{i+1/2} - r_i}{2} \right)}{H_j^r}.$$

С учетом полученных соотношений сформулируем пятиточечную разностную схему, аппроксимирующую уравнение диффузии излучения

$$A_{i,j}U_{i-1,j} + B_{i,j}U_{i+1,j} + \bar{A}_{i,j}U_{i,j-1} + \bar{B}_{i,j}U_{i,j+1} - C_{i,j}U_{i,j} + F_{i,j} = 0, \quad (6.119)$$

где
$$A_{i,j} = \frac{(p+1)r_i^p}{(r_i^{p+1} - r_i^p)H_i^r}, \quad B_{i,j} = \frac{(p+1)r_{i+1}^p(1+G_{i+1}^r)}{(r_{i+1}^{p+1} - r_i^p)H_{i+1}^r}, \quad (6.120)$$

$$\bar{A}_{i,j} = \frac{1}{(z_{j+1} - z_j)H_j^z}, \quad \bar{B}_{i,j} = \frac{1+G_{j+1}^z}{(z_{j+1} - z_j)H_{j+1}^z},$$

$$C_{i,j} = \kappa_{i,j} + \frac{(p+1)r_{i+1}^p}{(r_{i+1}^{p+1} - r_i^{p+1})H_{i+1}^r} + \frac{(p+1)r_i^p(1+G_i^r)}{(r_{i+1}^{p+1} - r_i^{p+1})H_i^r} + \frac{1}{(z_{j+1} - z_j)H_{j+1}^z} + \frac{1+G_j^z}{(z_{j+1} - z_j)H_j^z},$$

$$F_{i,j} = \kappa_{i,j}U_{b,i,j} - R_{i+1}^r \frac{(p+1)r_{i+1}^p}{r_{i+1}^{p+1} - r_i^{p+1}} + R_i^r \frac{(p+1)r_i^p}{r_{i+1}^{p+1} - r_i^{p+1}} - R_{j+1}^z \frac{1}{z_{j+1} - z_j} + R_j^z \frac{1}{z_{j+1} - z_j}.$$

Можно показать, что полученная разностная схема для гладких функций κ и U_b имеет второй порядок точности.

Несложно видеть, что полученная разностная схема весьма трудоемка. Поэтому, когда нет необходимости, обычно используют пятиточечную конечно-разностную схему (6.119) схему, получаемую из уравнения (6.95)

$$\frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^p}{3\kappa} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{3\kappa} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \kappa(U - U_b),$$

при использовании интегро-интерполяционного метода

$$A_{i,j} = \frac{r_{i-1/2}^P}{3\kappa_{i-1/2,j} P \bar{P}^P (r_i - r_{i-1})}, \quad \bar{A}_{i,j} = \frac{r_{i+1/2}^P}{3\kappa_{i+1/2,j} P \bar{P}^P (r_{i+1} - r_i)}, \quad (6.121)$$

$$B_{i,j} = \frac{1}{3\kappa_{i,j-1/2} Q (z_j - z_{j-1})}, \quad \bar{B}_{i,j} = \frac{1}{3\kappa_{i,j+1/2} Q (z_{j+1} - z_j)},$$

$$C_{i,j} = \kappa_{i,j} + \frac{r_{i+1/2}^P}{3\kappa_{i+1/2,j} P \bar{P}^P (r_{i+1} - r_i)} + \frac{r_{i-1/2}^P}{3\kappa_{i-1/2,j} P \bar{P}^P (r_i - r_{i-1})} + \\ + \frac{1}{3\kappa_{i,j+1/2} Q (z_{j+1} - z_j)} + \frac{1}{3\kappa_{i,j-1/2} Q (z_j - z_{j-1})},$$

$$F_{i,j} = \kappa_{i,j} U_{b,i,j},$$

$$\text{где } P = \frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{2}, \quad \bar{P} = \frac{r_{i-1} + 2r_i + r_{i+1}}{4}, \quad Q = \frac{z_{j+1} - z_{j-1}}{2},$$

$$\kappa_{i\pm 1/2,j} = \frac{\kappa_{i\pm 1,j} + \kappa_{i,j}}{2}, \quad \kappa_{i,j\pm 1/2} = \frac{\kappa_{i,j\pm 1} + \kappa_{i,j}}{2}, \quad r_{i\pm 1/2}^P = \left(\frac{r_i + r_{i\pm 1}}{2} \right)^P.$$

Примеры использования конечно-разностной схемы (6.119), (6.121) для решения уравнения переноса излучения в двумерной цилиндрической области показаны на рис. 6.6 – 6.16.

Для иллюстрации распределения полей радиационных характеристик в двумерной осесимметричной цилиндрической расчетной области выбрано распределение температуры, показанное на рис. 6.6. Это локализованная в пространстве высокотемпературная область сферической формы. Такое задание температуры, с одной стороны, хорошо соответствует реальному распределению температуры в ряде реальных энергетических устройств, например, в лазерной плазме (Суржиков С.Т., 2000), а с другой стороны представляется весьма перспективным для методических исследований в теории переноса теплового излучения. Локализованная сферическая излучающая область, помещенная в цилиндрическую расчетную область, позволяет тестировать все расчет-

ные методы, разрабатываемые как для цилиндрической, так и для сферической геометрий. Но самое главное заключается в том, что локализованность излучающей области является заведомо наименее благоприятным расчетным случаем для всех методов решения уравнения переноса излучения, в том числе для метода сферических гармоник.

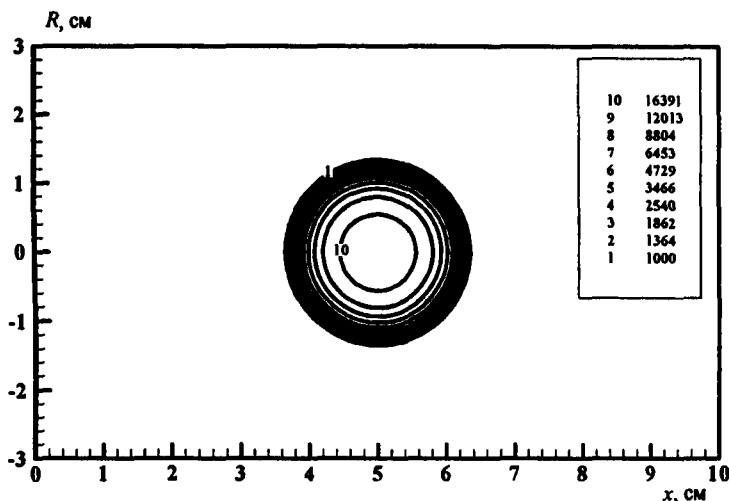


Рис. 6.6. Распределение температуры (К) в цилиндрической области

Температурное поле, показанное на рис. 6.6, рассчитывалось по формуле

$$T(x, r) = T_{\min} + (T_{\max} - T_{\min}) \exp(-R^m/R_0),$$

где $T_{\min} = 300 \text{ К}$, $T_{\max} = 18000 \text{ К}$, $m = 4$,

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (r - r_0)^2},$$

$$x_0 = 5 \text{ см}, \quad r_0 = 0, \quad R_0 = 1 \text{ см}.$$

Поля радиационных функций, соответствующих постоянно-му коэффициенту поглощения $\kappa = 0.1 \text{ см}^{-1}$, показаны на рис. 6.7 – 6.10.

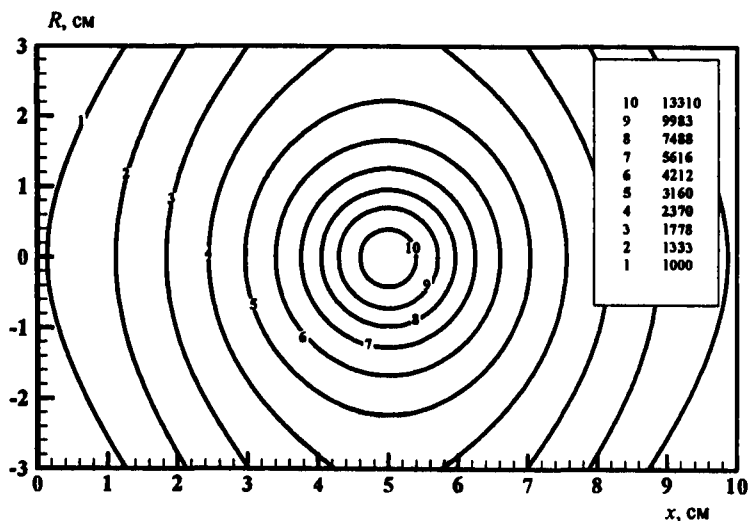


Рис. 6.7. Поле объемной плотности энергии излучения, Дж/см³; $\kappa = 0.1 \text{ см}^{-1}$

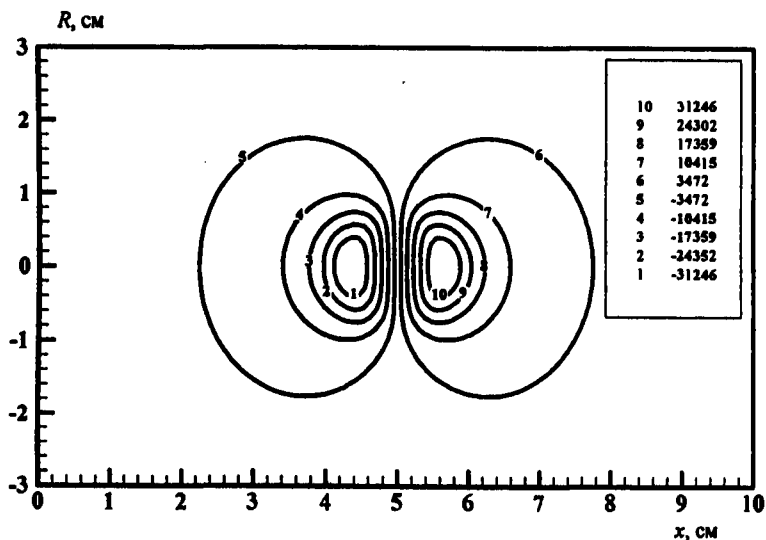


Рис. 6.8. Распределение осевой проекции вектора плотности потока излучения, Вт/см²; $\kappa = 0.1 \text{ см}^{-1}$

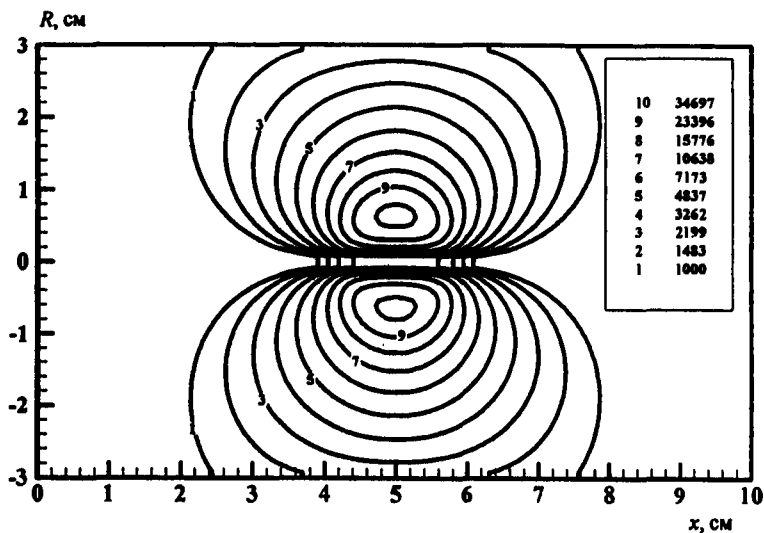


Рис. 6.9. Изолинии модуля радиальной проекции вектора плотности потока излучения, Вт/см²; $\kappa = 0.1 \text{ см}^{-1}$

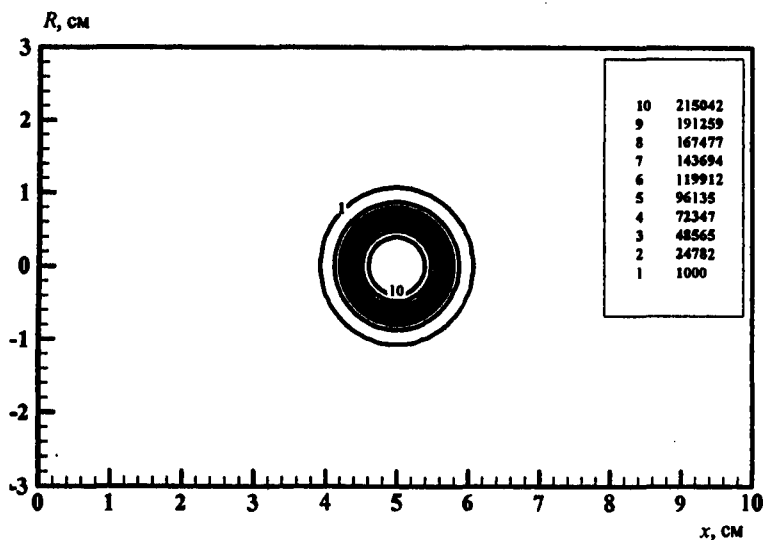


Рис. 6.10. Изолинии функции тепловыделения Q_R , Вт/см³; $\kappa = 0.1 \text{ см}^{-1}$

Конечно-разностная сетка, на которой проводился расчет показана на рис. 6.11.

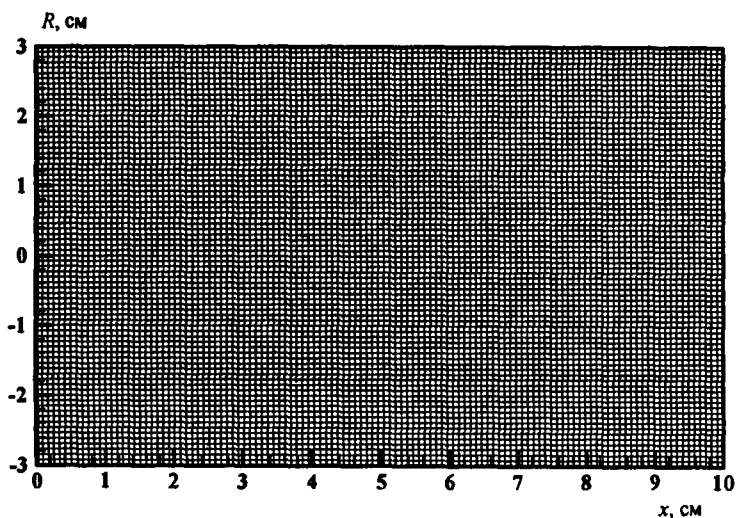


Рис. 6.11. Конечно-разностная сетка, используемая в расчетах по P₁-приближению метода сферических гармоник

Как уже отмечалось, представленные здесь расчетные данные могут быть использованы в качестве тестовых, которые для более полного изучения свойств численных решений, должны быть дополнены расчетными вариантами с переменными по пространству оптическими свойствами среды. Важное значение имеет также выбор различных конечно-разностных сеток. Причем, расчетные сетки могут быть не обязательно структурированными (см., например, главу 7). Что касается расчетных данных, показанных на рис. 6.7–6.10, то следует помнить о приближенности полученных решений, которые, тем не менее, дают общее представление о закономерностях радиационного переноса.

Серия расчетных данных, показанная на рис. 6.12–6.15 соответствует температурному полю, показанному на рис. 6.16

$$T(x, r) = T_{\min} + (T_{\max} - T_{\min}) \exp(-R^m),$$

где $T_{\min} = 300 \text{ K}$, $T_{\max} = 18000 \text{ K}$, $L = 7 \text{ см}$,

$$R = \sqrt{\left(\frac{r}{R_0}\right)^2 + \frac{(x_0 - x)^2}{L^2}},$$

$$x_0 = 5 \text{ см}, \quad R_0 = 2 \text{ см}, \quad m = 4.$$

Такое распределение температуры может моделировать газоплазменные конфигурации в плазменных генераторах различного типа: высокочастотных индукционных плазмотронах, дуговых и лазерно-плазменных генераторах.

Особо подчеркнем, что в отличие от предыдущего расчетного случая, здесь степень локализации горячей области существенно ниже лишь в одном из пространственных направлений. Однако, локализация наиболее излучающей области вблизи оси симметрии часто приводит даже к большим погрешностям расчетов, чем в случае сферической симметрии

Сравнение результатов расчетов плотности радиационного потока на боковой поверхности цилиндрического канала для представленных двух расчетных случаев с результатами, предсказываемыми методом дискретных направлений, даны в п. 8.6.

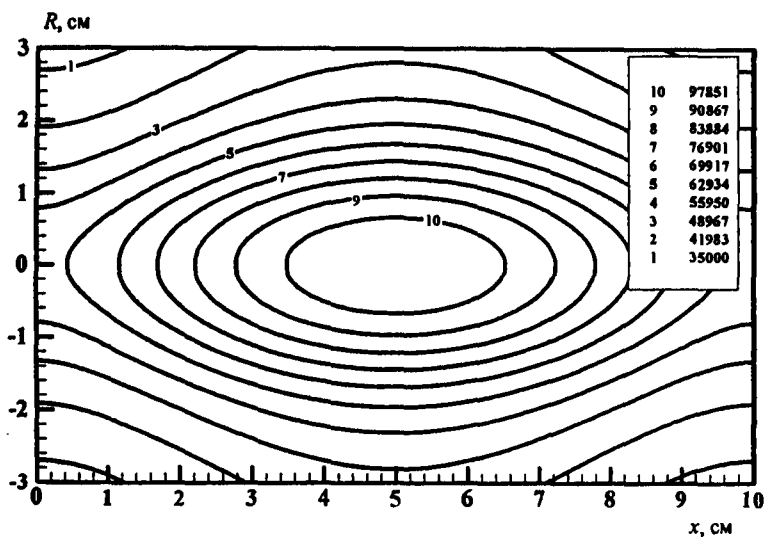


Рис. 6.12. Поле объемной плотности энергии излучения, Дж/см³; $\kappa = 0.1 \text{ см}^{-1}$

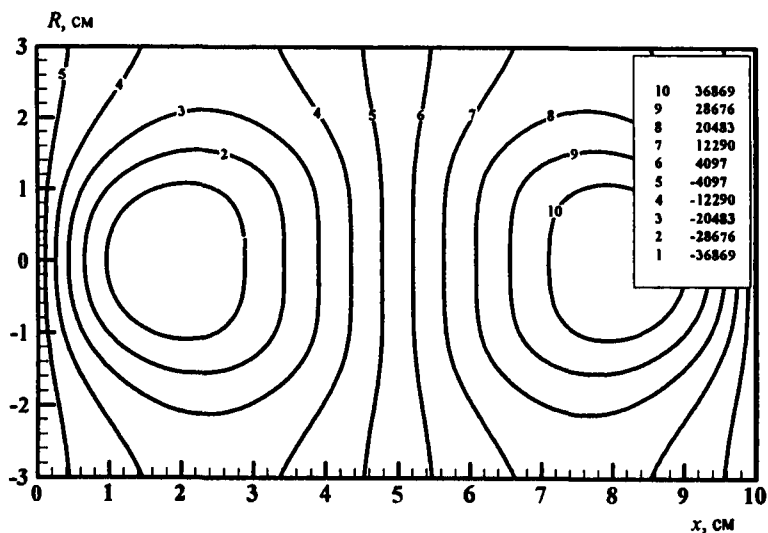


Рис. 6.13. Распределение осевой проекции вектора плотности потока излучения, Вт/см^2 ; $\kappa = 0.1 \text{ см}^{-1}$

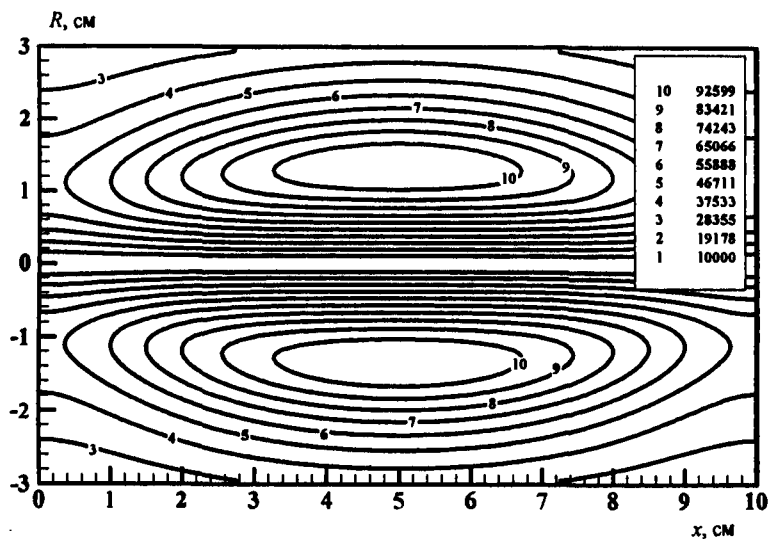


Рис. 6.14. Изолинии модуля радиальной проекции вектора плотности потока излучения, Вт/см^2 ; $\kappa = 0.1 \text{ см}^{-1}$

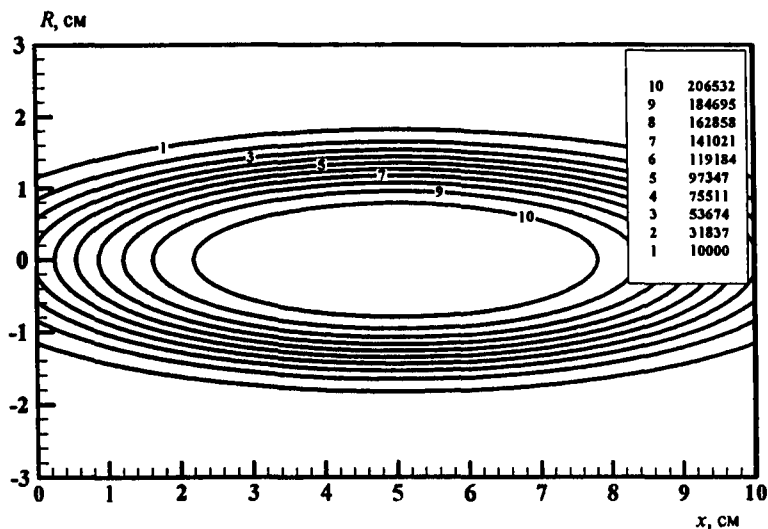


Рис. 6.15. Изолинии функции тепловыделения Q_R , Вт/см³; $\kappa = 0.1$ см⁻¹

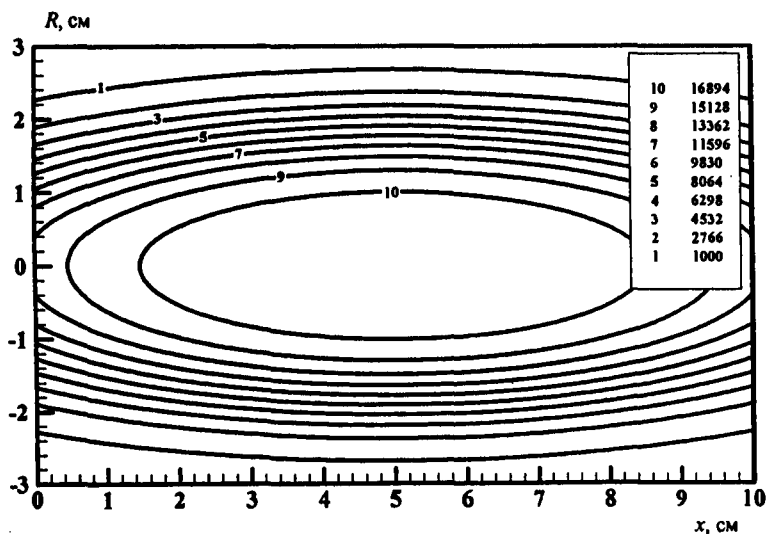


Рис. 6.16. Распределение температуры (К) в цилиндрической области

6.4. Особенности формулировки граничных условий для методов сферических гармоник

Проблема формулировки граничных условий для методов сферических гармоник состоит в том, что в указанных методах для нахождения объемной плотности лучистой энергии и плотностей радиационных тепловых потоков используется интегрирование по полному телесному углу, в то время, как угловые распределения интенсивности внешних по отношению к объему источников излучения известны лишь в половине телесного угла. Поэтому сформулировать точные граничные условия нельзя в принципе и необходимо использовать какие-либо приближения или предусматривать решение проблемы на алгоритмическом уровне, например, организовав итерационный процесс последовательного уточнения усредненной по угловым переменным интенсивности излучения.

В практике расчетов широко применяются два типа приближенных граничных условий, разработанных при решении задач нейтронной физики.

6.4.1. Граничные условия Марка

Формулировка граничных условий данного типа подробно обсуждается в работах (Дэвисон Б., 1964; Марчук Г.И., 1961; Оцисик М.Н., 1976). Оригинальная работа была опубликована в форме отчета в 1945 г.

Марк предположил, что для P_N -приближения метода сферических гармоник граничные условия должны выполняться при значениях углов, отвечающих корням полинома Лежандра

$$P_{N+1}(\mu) = 0, \quad (6.121)$$

то есть, если, например, на поверхностях плоского слоя известно распределение интенсивности внешних источников излучения

$$\begin{aligned} \tau = 0, \quad \mu > 0: \quad J(0, \mu) = J^+(\mu), \\ \tau = \tau_H, \quad \mu < 0: \quad J(\tau_H, \mu) = J^-(\mu), \end{aligned} \quad (6.122)$$

то граничные условия должны формулироваться следующим образом

$$\begin{aligned} \tau = 0, \quad \mu > 0: \quad J(0, \mu_i) &= J^+(\mu_i), \\ \tau = \tau_H, \quad \mu < 0: \quad J(\tau_H, -\mu_i) &= J^-(\mu_i), \end{aligned} \quad (6.123)$$

где μ_i – положительные корни уравнения (6.121).

При решении задачи в P_1 -приближении, граничные условия (6.123) должны выполняться при значениях μ_* , удовлетворяющих

$$P_2(\mu) = 3\mu_*^2 - 1 = 0,$$

то есть, при $\mu_* = 1/\sqrt{3}$.

Если задача решается относительно объемной плотности лучистой энергии, то

$$J(\tau, \mu) = \frac{c}{4\pi} \left[U(\tau) - \mu \frac{dU(\tau)}{d\tau} \right],$$

и граничные условия формулируются в виде

$$\tau = 0: \quad J^+(\mu_*) = \frac{c}{4\pi} \left[U(\tau) - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dU(\tau)}{d\tau} \right], \quad (6.124)$$

$$\tau = \tau_H: \quad J^-(\mu_*) = \frac{c}{4\pi} \left[U(\tau) + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dU(\tau)}{d\tau} \right]. \quad (6.125)$$

6.4.2. Граничные условия Маршака

Граничные условия данного типа предложены в работе (Marshak R.E., 1947).

Если в решаемой задаче заданы граничные условия вида

$$\tau = 0, \quad \mu > 0: \quad J(0, \mu) = J^+(\mu), \quad (6.126)$$

$$\tau = \tau_H, \quad \mu < 0: \quad J(\tau_H, \mu) = J^-(\mu), \quad (6.127)$$

то для решения уравнения переноса излучения в P_N -приближении метода сферических гармоник находятся усредненные моменты интенсивностей на границах по следующим формулам

$$M_i^+ = \int_0^1 J^+(\mu) \mu^{2i-1} d\mu, \quad \mu > 0, \quad (6.128)$$

$$M_i^- = \int_{-1}^0 J^-(\mu) \mu^{2i-1} d\mu, \quad \mu < 0, \quad (6.129)$$

$$i = 1, 2, \dots, (N+1)/2.$$

Например, в P_1 -приближении метода сферических гармоник для плоского слоя

$$J(\tau, \mu) = \frac{c}{4\pi} \left[U(\tau) - \mu \frac{dU(\tau)}{d\tau} \right] \quad (6.130)$$

и граничные условия Маршака формулируются в виде

$$M_1^+(\tau=0) = \frac{c}{4\pi} \left[U(\tau) - \frac{1}{2} \frac{dU(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=0}, \quad (6.131)$$

$$M_1^-(\tau=\tau_H) = \frac{c}{4\pi} \left[U(\tau) + \frac{1}{2} \frac{dU(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=\tau_H}. \quad (6.132)$$

Для удобства построения численных схем представим соотношение (6.131) и (6.132) в конечно-разностном виде. Воспользуемся 1-м порядком аппроксимации и схематическим изображением расчетной области вблизи границ, показанных на рис. 6.17

$$\tau=0: U_1 = \frac{1}{1+2(\tau_2-\tau_1)} U_2 + \frac{2(\tau_2-\tau_1)}{1+2(\tau_2-\tau_1)} \frac{4\pi}{c} M_1^+(\tau=0) \quad (6.133)$$

$$\tau=\tau_H: U_{NI} = \frac{1}{1+2(\tau_{NI}-\tau_{NI-1})} U_{NI-1} + \frac{2(\tau_{NI}-\tau_{NI-1})}{1+2(\tau_{NI}-\tau_{NI-1})} \frac{4\pi}{c} M_1^-(\tau_H). \quad (6.134)$$

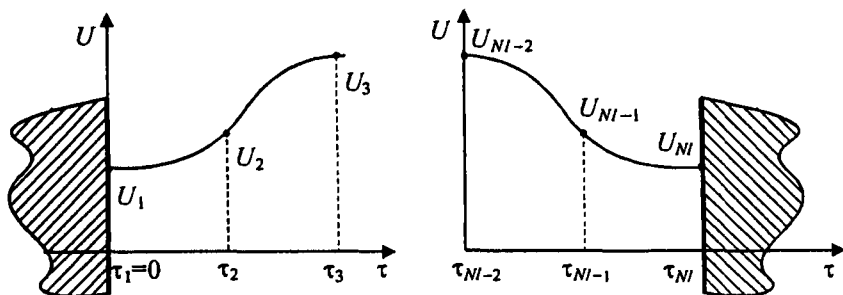


Рис. 6.17. Конечно-разностная сетка вблизи границ расчетной области

6.5. Формулировка уравнений P_1 -приближения метода сферических гармоник для произвольной геометрии

Подводя итог рассмотрению метода сферических гармоник, приведем несколько общих замечаний, которые окажутся полезными при формулировке задач переноса излучения в криволинейных геометриях.

В общем случае в методе сферических гармоник используется разложение функции интенсивности излучения в ряд по сферическим функциям следующего вида, т.е. фактически применяется метод разделения переменных

$$J_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \times \\ \times \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2\pi(1+\delta_{0,m})} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \Phi_{nm}(\mathbf{r}) Y_n^m(\mu, \psi), \quad (6.135)$$

где Y_n^m – сферические функции, определяемые через присоединенные функции Лежандра

$$\begin{aligned} Y_n^m(\mu, \psi) &= P_n^{(m)}(\mu) \sin m\psi, & m > 0, \\ Y_n^{-m}(\mu, \psi) &= P_n^{(m)}(\mu) \cos m\psi, & m \geq 0, \\ -1 \leq \mu \leq 1, & & 0 \leq \psi \leq 2\pi \end{aligned} \quad (6.136)$$

$\delta_{0,m}$ – символ Кронекера.

Теория сферических функций, присоединенных функций и полиномов Лежандра изложена в работе (Никифоров А.Ф. и др., 1984). Особенностью указанных функций является их ортогональность, а также наличие удобных рекуррентных соотношений. Это дает возможность достаточно просто реализовать аналитическое интегрирование уравнения переноса излучения по угловым переменным, сводя, при этом, исходное интегро-дифференциальное уравнение переноса к системе дифференциальных уравнений относительно функций $\varphi_{nm}(r)$.

Алгоритм формулировки дифференциальных уравнений относительно $\varphi_{nm}(r)$, называемый *моментной процедурой*, состоит в следующем. Сначала интенсивность излучения в форме (6.135) подставляется в уравнение переноса (3.3). При этом индикатриса рассеяния также представляется в виде ряда по полиномам Лежандра. Затем, поочередно умножая полученное уравнение на каждую из сферических функций и интегрируя его по угловым переменным, используя свойства ортогональности сферических функций, приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\varphi_{nm}(r)$. Аналогичным образом поступают с граничными условиями.

Если ограничить разложение (6.135) конечным числом слагаемых, то придем к конечному числу уравнений, количество которых (без единицы) и составит порядок приближения. Получаемое приближение называется P_N -приближением метода сферических гармоник (N – порядок приближения).

Одной из серьезных проблем метода сферических гармоник является задача построения граничных условий. Особые сложности возникают, когда функция интенсивности излучения на границе терпит разрыв (напомним, что при построении P_N -приближения используется интегрирование по всему телесному углу). Как уже отмечалось в п.6.4, для решения краевых задач P_N -приближения обычно используют граничные условия Марка или Маршака. Применяются также граничные условия Помранинга (Pomraning G.C., 1964, 1973).

В задачах динамики излучающего газа и плазмы наиболее широкое распространение получило P_1 -приближение метода сфе-

рических гармоник. Имея в виду, что его точность примерно соответствует точности расчета оптических свойств горячих газов и низкотемпературной плазмы, можно сказать, что этот метод (а также эквивалентные по точности ему методы) в настоящее время является оптимальным для задач рассматриваемого класса.

Система уравнений P_1 -приближения практически совпадает с системой диффузионных уравнений, которую получим в общем виде, следуя работе (Четверушкин Б.Н., 1985). Наиболее просто получить требуемые уравнения в произвольной системе координат, исходя из уравнения переноса, записанного в виде

$$\Omega \cdot \nabla J_v(\mathbf{r}, \Omega) + \kappa_v(\mathbf{r}) J_v(\mathbf{r}, \Omega) = \kappa_v(\mathbf{r}) J_{b,v}(\mathbf{r}). \quad (6.137)$$

Оставляя в разложении (6.135) первые два члена, получим

$$J_v(\mathbf{r}, \Omega) = [\varphi_{1,v}(\mathbf{r}) + \varphi_{2,v}(\mathbf{r}) \cdot \Omega] / 4\pi, \quad (6.138)$$

где коэффициенты разложения $\varphi_{1,v}(\mathbf{r})$ и $\varphi_{2,v}(\mathbf{r})$ подлежат определению. Выражение (6.138) позволяет сделать некоторые априорные выводы о применяемом приближении. Учитывая, что угловая зависимость интенсивности излучения содержит только два слагаемых в разложении в ряд, от него можно ожидать хорошей точности при исследовании радиационного поля с изотропной или достаточно гладкой угловой зависимостью интенсивности излучения, и худшей точности, когда функция интенсивности терпит разрыв или меняется резко.

Для выяснения физического смысла коэффициентов $\varphi_{1,v}(\mathbf{r})$ и $\varphi_{2,v}(\mathbf{r})$ достаточно левую и правую части формулы (6.138) проинтегрировать один раз по телесному углу с единичным весом, а второй раз – с весом Ω . Тогда, воспользовавшись определением объемной плотности энергии и вектора плотности потока излучения, найдем

$$\int_{4\pi} J_v(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = \varphi_{1,v}(\mathbf{r}) = cU_v(\mathbf{r}), \quad (6.139)$$

$$\int_{4\pi} \Omega J_v(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = \varphi_{2,v}(\mathbf{r}) = \mathbf{W}_v(\mathbf{r}). \quad (6.140)$$

Таким образом, в диффузионном приближении используется следующая аппроксимация интенсивности:

$$J_v(\mathbf{r}, \Omega) = [cU_v(\mathbf{r}) + 3\mathbf{W}_v(\mathbf{r})\Omega] / 4\pi. \quad (6.141)$$

Первое уравнение диффузионного приближения не связано с разложением интенсивности в ряд и получается при интегрировании (6.137) по всему телесному углу:

$$\nabla \cdot \mathbf{W}_v(\mathbf{r}) + \kappa_v(\mathbf{r})cU_v(\mathbf{r}) = \kappa_v(\mathbf{r})cU_{b,v}(\mathbf{r}), \quad (6.142)$$

где

$$cU_{b,v}(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} J_{b,v}(\mathbf{r}) d\Omega$$

Второе уравнение можно получить, проинтегрировав (6.137) с весом Ω и с учетом (6.141)

$$\mathbf{W}_v(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3\kappa_v(\mathbf{r})} \nabla U_v(\mathbf{r}). \quad (6.143)$$

Из (6.143) становится понятным название полученного приближения: *поток излучения пропорционален градиенту объемной плотности энергии с коэффициентом «диффузии» $D = 1/3\kappa_v(\mathbf{r})$* .

Уравнения (6.142) и (6.143) можно также представить в виде одного уравнения:

$$-\nabla \frac{1}{3\kappa_v(\mathbf{r})} \nabla U_v(\mathbf{r}) + \kappa_v(\mathbf{r})cU_v(\mathbf{r}) = \kappa_v(\mathbf{r})cU_{b,v}(\mathbf{r}). \quad (6.144)$$

Однако при построении разностных схем часто удобнее использовать представление (6.142), (6.143).

Для получения граничных условий к диффузионному приближению необходимо соответствующим образом преобразовать соотношение для интенсивностей на границах (например, равенство нулю потока на оси симметрии). Укажем наиболее употребительные из них.

1. Внешнее излучение на границу s рассматриваемого объема не падает, т.е.

$$J_v(\mathbf{r}, \Omega) = 0, \quad \text{при } (\Omega \cdot \mathbf{n}) < 0, \quad \text{где } \mathbf{n} \text{ — внешняя нормаль.}$$

В этом случае

$$W_{vn}(\mathbf{r}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{W}_v(\mathbf{r}))_s = -\frac{c}{2} U_v(\mathbf{r}) \quad (6.145)$$

или, в силу (6.143)

$$\frac{2}{3} c \kappa_v^{-1}(\mathbf{r}) \nabla U_v(\mathbf{r}) \Big|_s = -U_v(\mathbf{r}). \quad (6.146)$$

2. Осевая симметрия в цилиндрическом объеме или центральная симметрия в сфере

$$\mathbf{r}^\circ W_v(\mathbf{r}) = 0, \quad (6.147)$$

где \mathbf{r}° – единичный вектор в радиальном направлении. Условие (6.147) можно записать в форме

$$\frac{\partial U_v(\mathbf{r})}{\partial r} = 0. \quad (6.148)$$

Представляет практический интерес рассмотреть следствия из диффузионных уравнений в случаях оптически тонких и оптически толстых сред. Они будут позднее использоваться при построении конечно-разностных схем.

1. Приближение оптически тонкой среды.

Уравнение (6.142) перепишем в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{W}_v(\mathbf{r}) = \kappa_v(\mathbf{r}) c [U_{b,v}(\mathbf{r}) - U_v(\mathbf{r})]. \quad (6.149)$$

Из условия $\tau_v \ll 1$ следует, что в отсутствие внешних источников излучения

$$J_v(\tau_v) \ll J_{b,v}(\tau_v),$$

а значит, и

$$U_v(\mathbf{r}) \ll U_{b,v}(\mathbf{r}).$$

Отсюда

$$\nabla W_v(\mathbf{r}) = c \kappa_v(\mathbf{r}) U_{b,v}(\mathbf{r}). \quad (6.150)$$

Интегрируя (6.150) по волновому числу, приходим к зависимости дивергенции плотности интегрального лучистого потока от среднепланковского коэффициента

$$\int_0^{\infty} \nabla W_{\nu}(\mathbf{r}) d\nu = \nabla W(\mathbf{r}) = 4\pi \kappa_P(\mathbf{r}) \sigma T^4(\mathbf{r}), \quad (6.151)$$

где

$$\kappa_P(\mathbf{r}) = \frac{c \int_0^{\infty} \kappa_{\nu}(\mathbf{r}) U_{b,\nu}(\mathbf{r}) d\nu}{\int_0^{\infty} \int_{4\pi} J_{b,\nu}(\mathbf{r}) d\Omega d\nu} = \frac{\int_0^{\infty} \kappa_{\nu}(\mathbf{r}) J_{b,\nu}(\mathbf{r}) d\nu}{\int_0^{\infty} J_{b,\nu}(\mathbf{r}) d\nu}. \quad (6.152)$$

При решении задач радиационной газовой динамики редко удается использовать приближение оптически тонкого слоя во всей спектральной области из-за больших коэффициентов поглощения в ультрафиолетовой части спектра. Но использование этого приближения в отдельных спектральных областях оказывается весьма удобным и приводит к значительной экономии временных ресурсов компьютера. Таким образом, в практике расчетов обычно используется не (6.152), а выражение

$$\kappa_{P,\Delta\nu}(\mathbf{r}) = \frac{\int_0^{\Delta\nu} J_{b,\nu}(\mathbf{r}) \kappa_{\nu}(\mathbf{r}) d\nu}{\int_0^{\Delta\nu} J_{b,\nu}(\mathbf{r}) d\nu}, \quad (6.153)$$

где $\Delta\nu$ – спектральный диапазон, в котором справедливо приближение оптически тонкой среды.

2. Приближение оптически толстой среды.

В этом случае

$$U_{\nu}(\mathbf{r}) \approx U_{b,\nu}(\mathbf{r}). \quad (6.154)$$

Численная оценка величины дивергенции плотности лучистого потока по формуле (6.149) может привести к неправильному результату, поскольку в ее правой части стоит разность двух близких чисел. Дивергенцию потока в этом случае вычисляют непосредственно по его величине:

$$\mathbf{W}_v(\mathbf{r}) = -\frac{c}{3\kappa_v(\mathbf{r})} \nabla U_{b,v}(\mathbf{r}). \quad (6.155)$$

Интегрирование (6.155) по волновому числу дает

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = -\int_0^{\infty} \frac{c}{3\kappa_v(\mathbf{r})} \nabla U_{b,v}(\mathbf{r}) dv = -\frac{16}{3} \sigma T^3(\mathbf{r}) \kappa_R^{-1}(\mathbf{r}) \nabla T(\mathbf{r}), \quad (6.156)$$

где $\kappa_R(\mathbf{r})$ – средний коэффициент поглощения по Росселаиду, определяемый по формуле

$$\kappa_R^{-1}(\mathbf{r}) = \frac{\int_0^{\infty} [1/\kappa_v(\mathbf{r})] [dU_{b,v}(T)/dT] dv}{\int_0^{\infty} [dU_{b,v}(T)/dT] dv}. \quad (6.157)$$

Так же как и в случае оптически тонкого слоя, в практике расчетов используют среднеросселандовские коэффициенты не во всей спектральной области, а только на отдельных участках спектра.

В заключение следует подчеркнуть, что по мере приближения к границе расчетной области метод сферических гармоник дает все большую погрешность, которая может достигать десятков процентов. Точность метода возрастает при увеличении оптической толщины по поглощению или по рассеянию.

Снизить погрешность метода сферических гармоник вблизи граничных поверхностей удастся также при использовании более высоких приближений, однако при этом возрастает сложность системы решаемых уравнений. Тем не менее, кроме P_1 -приближения может быть рекомендовано P_3 - и даже P_5 -приближение метода сферических гармоник. Установлено, что использование нечетных приближений метода является предпочтительным. Подробно с анализом высших приближений метода сферических гармоник можно познакомиться в книгах (Марчук Г.И., 1961; Марчук Г.И. и др., 1981; Смелов В.В., 1978; Султангазин У.М., 1979).

ГЛАВА 7

МЕТОД КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

7.1. Общие понятия

В предыдущих главах было показано, что уравнение переноса излучения, формулируемое относительно моментов интенсивности излучения по угловым переменным, часто сводится к дифференциальным уравнениям в частных производных эллиптического типа. Получаемые уравнения имеют широкую область применения в разных областях науки и техники и, в частности, в механике сплошной среды, где были разработаны эффективные методы их численного решения. В данной главе дано подробное изложение одного из таких методов – *метода конечного объема*, который целесообразно использовать для решения широкого класса задач переноса теплового излучения в объемах произвольной геометрии.

Метод конечного объема применительно к двумерным задачам механики сплошной среды предложен в работах (McDonald P.W., 1971; MacCormack R.W. et al., 1972) и обобщен на трехмерную расчетную область в (Rizzi A.W. et al., 1973). Этот метод характеризуется следующими двумя свойствами.

1. Метод конечного объема формулируется для объектов произвольной геометрии.

2. В основу построения метода положено дискретное представление законов сохранения массы, импульса и энергии в конечных элементарных объемах, на которые делится вся расчетная область.

Сначала рассмотрим теоретические основы метода, а затем получим расчетные соотношения для уравнения переноса излучения в диффузионном приближении для произвольной геометрии.

7.2. Понятие о консервативных и неконсервативных численных схемах

Законы сохранения механики сплошной среды (массы, импульса и энергии) могут быть представлены в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varphi dv + \oint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \int_V \dot{Q} dv. \quad (7.1)$$

Уравнение (7.1) формулирует условия изменения некоторой скалярной величины φ с течением времени t в объеме V за счет потоков \mathbf{F} этой величины через поверхность S , ограничивающую объем V , и производства (исчезновения) этой величины в объеме V со скоростью \dot{Q} . Элемент поверхности dS характеризуется не только площадью, но и направлением нормали \mathbf{n} : $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$. Для однозначности физической трактовки (7.1) необходимо ввести правило определения положительного направления \mathbf{n} . Например, положительным направлением вектора нормали к поверхности является направление из объема наружу. Тогда вытекающий в объем V поток скалярной величины φ имеет к dS компоненту, противоположную \mathbf{n} , а вытекающий – совпадающую с \mathbf{n} .

Разобьем объем V произвольными криволинейными поверхностями на меньшие не перекрывающиеся объемы, которые будем именовать элементарными объемами. Пусть N – число элементарных объемов и в сумме они составляют полный объем V . Запишем для каждого k -го элементарного объема интегральный закон сохранения (7.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} \varphi dv + \oint_{S_k} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \int_{V_k} \dot{Q} dv, \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (7.2)$$

Если просуммировать все N интегральных законов сохранения (7.2), то в результате должен получиться общий закон сохра-

нения (7.1). При этом легко убедиться, что интегралы по внутренним поверхностям элементарных объемов V_k , не совпадающих с поверхностью всего объема V , сократятся, поскольку при одном и том же направлении потока \mathbf{F} скалярной величины ϕ на любой внутренней поверхности обязательно найдутся два одинаковых интеграла с противоположными знаками (для одного и того же участка внутренней поверхности в один из смежных элементарных объемов скалярная величина ϕ втекает, а из другого – вытекает).

Теперь представим, что разделение объема V на элементарные объемы V_k было произведено посредством какой-либо разностной схемы, с использованием которой производится также расчет потоков \mathbf{F} на их поверхностях. Очевидно, что условие взаимного уничтожения потоков на смежных поверхностях может при этом не выполняться. Результатом чего станет невыполнение интегрального закона сохранения по объему V .

Далее будем использовать следующие определения.

1. Расчетная схема называется *консервативной*, если при численной дискретизации объема выполняются интегральные законы сохранения. Это значит, что при формальном суммировании разностных соотношений в расчетной формуле должны остаться потоки только через поверхность, охватывающую весь объем V .

2. Если в результате такого суммирования в итоговом расчетном соотношении остаются потоки через внутренние поверхности, то такая схема называется *неконсервативной*.

В качестве примера читателю предлагается убедиться в том, что использование одной и той же конечно-разностной схемы с центральными разностями для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

и его аналога

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

приведет соответственно к консервативной и неконсервативной расчетным схемам.

7.3. Формальное описание метода

В исследуемой расчетной области V введем N элементарных объемов V_k , внутри каждого, из которых скалярная величина φ_k распределена равномерно. Тогда закон сохранения (7.1) для k -го элементарного объема запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_k V_k) + \sum_{\ell=1}^{N_k} (\text{FS})_{\ell} = \dot{Q}_k V_k, \quad (7.3)$$

где V_k – объем k -го элементарного объема; \dot{Q}_k – скорость увеличения (уменьшения) величины φ_k в объеме в единицу времени; суммирование ведется по N_k поверхностям, ограничивающим объем V_k .

Очевидно, что элементарные объемы можно ввести многими способами. Необходимо следить лишь за тем, чтобы вводимые объемы не перекрывались, и для каждой внутренней поверхности любого элементарного объема можно было указать соседний объем, имеющий с ним ту же самую граничную поверхность. Для пересекающихся или находящихся на удалении друг от друга элементарные объемы это условие не выполняется.

Расположение и координаты элементарных объемов определяются используемой для этого разностной сеткой, покрывающей исследуемое пространство.

Применяются два типа сеток:

- *конечно-разностный* тип сетки,
- *конечно-элементный* тип сетки.

В первом случае узлы сетки лежат на пересечениях семейства координатных линий (в общем случае – криволинейной системы координат). Такие сетки называются *структурированными*.

Во втором случае сетка формируется с использованием системы треугольных и четырехугольных ячеек в двумерной геометрии (или пирамидальных и тетраэдральных – в трехмерной геометрии). При этом узел сетки не может быть ассоциирован с какими-либо координатными линиями, и такая сетка называется *неструктурированной*.

До сих пор ничего не говорилось о том, в какой точке каждого элементарного объема определяется искомая функция φ_k . Безотносительно к типу используемой сетки различают метод конечного объема, *центрированный в ячейке* (в объеме) и метод конечного объема, *центрированный в узлах*. В первом случае искомая величина φ_k приписывается всему объему (в пределах которого она считается постоянной). Во втором случае φ_k определяется в узлах сетки. Пример указанных сеток показан на рис. 7.1.

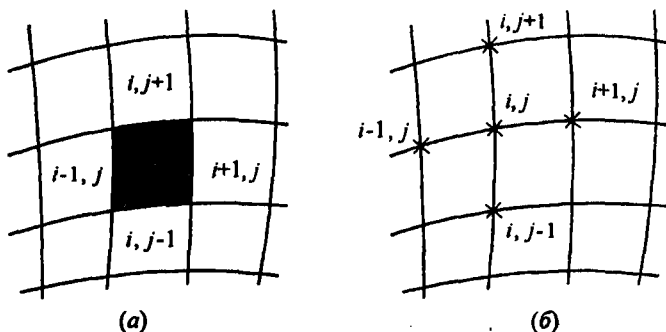


Рис. 7.1. Пример центрированного в ячейке (а) и центрированного в узлах (б) метода конечного объема

7.4. Расчетные соотношения метода конечного объема в двумерной геометрии

Пусть в произвольной двумерной геометрии введена система конечных объемов, для каждого из которых интегральный закон сохранения может быть записан в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{ij}} \varphi dv + \oint_{S_k} (f dy - g dx) = \int_{V_{ij}} \dot{Q} dv, \quad (7.4)$$

где f , g – декартовы проекции вектора потока \mathbf{F} в каждой точке поверхности S_k , ограничивающей объем V_{ij} .

Для объема V_{ij} , показанного на рис. 7.2, из (7.4) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{ij}} \varphi dv + \oint_{ABCD} (f dy - g dx) = \int_{V_{ij}} \dot{Q} dv. \quad (7.5)$$

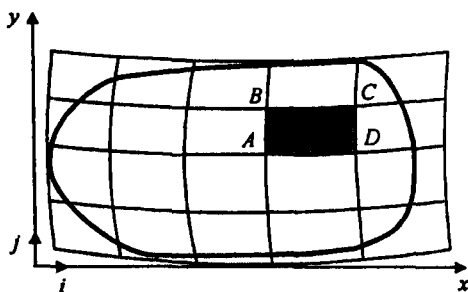


Рис. 7.2. Пример двумерной расчетной сетки

Для каждой из сторон четырехугольника AB , BC , CD , DA можно определить вектор, определяющий ориентацию поверхности:

$$\mathbf{S}_{AB} = (y_B - y_A)\mathbf{i} - (x_B - x_A)\mathbf{j}, \quad (7.6a)$$

$$\mathbf{S}_{BC} = (y_C - y_B)\mathbf{i} - (x_C - x_B)\mathbf{j}, \quad (7.6b)$$

$$\mathbf{S}_{CD} = (y_D - y_C)\mathbf{i} - (x_D - x_C)\mathbf{j}, \quad (7.6в)$$

$$\mathbf{S}_{DA} = (y_A - y_D)\mathbf{i} - (x_A - x_D)\mathbf{j}, \quad (7.6г)$$

тогда вместо (7.5) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Phi u)_{ij} + [f_{AB}(y_B - y_A) + f_{BC}(y_C - y_B) + f_{CD}(y_D - y_C) + \\ + f_{DA}(y_A - y_D) - g_{AB}(x_B - x_A) - g_{BC}(x_C - x_B) - \\ - g_{CD}(x_D - x_C) - g_{DA}(x_A - x_D)] = (\dot{Q}V)_{ij}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Числовая величина объема V_{ij} (в двумерном случае – площади поверхности) рассчитывается с использованием известного из аналитической геометрии (Ильин В.А., Позняк Э.Г., 1981) соотношения

$$\begin{aligned} V_{ij} = \frac{1}{2} |\overline{AC} \times \overline{BD}| = \frac{1}{2} |(x_C - x_A)(y_D - y_B) - (y_C - y_A)(x_D - x_B)| = \\ = \frac{1}{2} |\Delta x_{AC} \Delta y_{BD} - \Delta x_{BD} \Delta y_{AC}|. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Заметим, что если узлы ячейки (i, j) располагать в последовательности против часовой стрелки, то последние два выражения под модулем в (7.8) дадут положительную величину.

Ключевым моментом метода конечного объема является *определение величин компонент векторов потоков* через поверхности, ограничивающие объем. Расчетные соотношения различаются в зависимости от способов аппроксимации потоков и способа определения искомой величины φ на расчетной сетке.

7.4.1. Расчетные формулы для потоков при использовании потоковой аппроксимации и центрированного в объеме метода конечного объема

Компоненты скорости конвективного переноса для потоковой схемы определяются следующей формулой:

$$\mathbf{W}(\varphi) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varphi} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}, \quad (7.9)$$

где $a = \partial f / \partial \varphi$, $b = \partial g / \partial \varphi$ – компоненты Якобиана.

В простейшей потоковой схеме принимается, что поток на границе ячейки равен потоку, выходящему из данной ячейки или входящему в нее из соседней ячейки, в зависимости от знака скалярного произведения скорости \mathbf{W} на вектор ориентации поверхности \mathbf{S} .

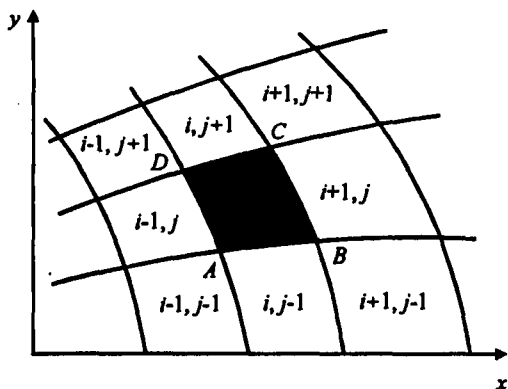


Рис. 7.3. К использованию потоковой аппроксимации и центрированного в ячейке метода конечного объема

Для геометрии показанной на рис. 7.3 используются следующие расчетные соотношения:

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{AB} = \begin{cases} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{i,j}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{AB} > 0, \\ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{i,j-1}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{AB} < 0; \end{cases} \quad (7.10a)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{BC} = \begin{cases} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{i,j}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{BC} > 0, \\ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{i+1,j}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{BC} < 0; \end{cases} \quad (7.10б)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{CD} = \begin{cases} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{i,j}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{CD} > 0, \\ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{i,j+1}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{CD} < 0; \end{cases} \quad (7.10в)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{DA} = \begin{cases} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{i,j}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{DA} > 0, \\ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{i-1,j}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{DA} < 0. \end{cases} \quad (7.10г)$$

7.4.2. Расчетные формулы для потоков при использовании потоковой аппроксимации и центрированного в узлах метода конечного объема

Для геометрии, показанной на рис. 7.4, используются следующие соотношения:

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{AB} = \begin{cases} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{CD}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{AB} > 0, \\ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{EF}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{AB} < 0; \end{cases} \quad (7.11a)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{BC} = \begin{cases} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{DA}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{BC} > 0, \\ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{HG}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{BC} < 0; \end{cases} \quad (7.11б)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{CD} = \begin{cases} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{BA}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{CD} > 0, \\ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{KL}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{CD} < 0; \end{cases} \quad (7.11в)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{DA} = \begin{cases} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{CB}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{DA} > 0, \\ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{MN}, & \text{если } (\mathbf{W} \cdot \mathbf{S})_{DA} < 0. \end{cases} \quad (7.11г)$$

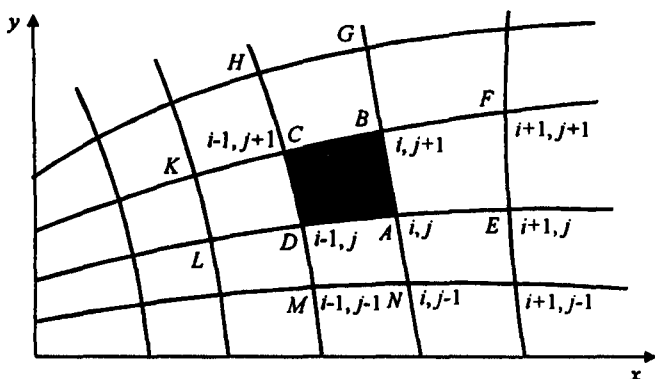


Рис. 7.4. К использованию потоковой аппроксимации и центрированного в узлах метода конечного объема

7.4.3. Расчетные формулы для потоков при использовании центрально-разностной аппроксимации и центрированного в объеме метода конечного объема

Используются следующие альтернативные варианты (см. рис. 7.3):

$$a) \quad f_{AB} = \frac{1}{2} \left[f(\varphi_{i,j}) + f(\varphi_{i,j-1}) \right], \quad (7.12a)$$

$$f_{BC} = \frac{1}{2} \left[f(\varphi_{i,j}) + f(\varphi_{i+1,j}) \right], \quad (7.12б)$$

$$f_{CD} = \frac{1}{2} \left[f(\varphi_{i,j}) + f(\varphi_{i,j+1}) \right], \quad (7.12в)$$

$$f_{DA} = \frac{1}{2} \left[f(\varphi_{i,j}) + f(\varphi_{i-1,j}) \right]; \quad (7.12г)$$

$$б) \quad f_{AB} = f \left(\frac{\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{2} \right), \quad (7.13a)$$

$$f_{BC} = f \left(\frac{\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}}{2} \right), \quad (7.13б)$$

$$f_{CD} = f\left(\frac{\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j+1}}{2}\right), \quad (7.13\text{в})$$

$$f_{DA} = f\left(\frac{\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{2}\right); \quad (7.13\text{г})$$

$$\text{в)} \quad f_{AB} = \frac{1}{2}[f_A + f_B], \quad (7.14\text{а})$$

$$f_{BC} = \frac{1}{2}[f_B + f_C], \quad (7.14\text{б})$$

$$f_{CD} = \frac{1}{2}[f_C + f_D], \quad (7.14\text{в})$$

$$f_{DA} = \frac{1}{2}[f_D + f_A], \quad (7.14\text{г})$$

где

$$f_A = f(\varphi_A), \quad f_B = f(\varphi_B), \quad f_C = f(\varphi_C), \quad f_D = f(\varphi_D), \quad (7.15)$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4}(\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j-1} + \varphi_{i-1,j}), \quad (7.16\text{а})$$

$$\varphi_B = \frac{1}{4}(\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i+1,j-1} + \varphi_{i+1,j}), \quad (7.16\text{б})$$

$$\varphi_C = \frac{1}{4}(\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i,j+1}), \quad (7.16\text{в})$$

$$\varphi_D = \frac{1}{4}(\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j}); \quad (7.16\text{г})$$

г) для формул (7.14) используется усреднение следующего вида:

$$f_A = \frac{1}{4}(f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1} + f_{i-1,j}), \quad (7.17\text{а})$$

$$f_B = \frac{1}{4}(f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i+1,j-1} + f_{i+1,j}), \quad (7.17\text{б})$$

$$f_C = \frac{1}{4} (f_{i,j} + f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1} + f_{i,j+1}), \quad (7.17в)$$

$$f_D = \frac{1}{4} (f_{i,j} + f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j}). \quad (7.17г)$$

7.4.4. Расчетные формулы для потоков при использовании центрально-разностной аппроксимации и центрированного в узлах метода конечного объема

Используются следующие альтернативные варианты (см. рис. 7.4)

$$а) \quad f_{AB} = f \left(\frac{\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1}}{2} \right), \quad (7.18а)$$

$$f_{BC} = f \left(\frac{\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i-1,j+1}}{2} \right), \quad (7.18б)$$

$$f_{CD} = f \left(\frac{\Phi_{i-1,j+1} + \Phi_{i-1,j}}{2} \right), \quad (7.18в)$$

$$f_{DA} = f \left(\frac{\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j}}{2} \right); \quad (7.18г)$$

$$б) \quad f_{AB} = \frac{1}{2} (f_A + f_B), \quad (7.19а)$$

$$f_{BC} = \frac{1}{2} (f_B + f_C), \quad (7.19б)$$

$$f_{CD} = \frac{1}{2} (f_C + f_D), \quad (7.19в)$$

$$f_{DA} = \frac{1}{2} (f_D + f_A), \quad (7.19г)$$

где

$$f_A = f(\Phi_A), \quad f_B = f(\Phi_B), \quad f_C = f(\Phi_C), \quad f_D = f(\Phi_D). \quad (7.20)$$

Рассмотрим примеры использования формул (7.12) – (7.20).

Пример 1. Получить расчетные соотношения для потоковой схемы и централизованного в объеме метода конечного объема в двумерной прямоугольной декартовой системе координат.

Решение. Расчетная схема будет получена на примере уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } a > 0, b > 0 \quad (7.21)$$

для геометрии, показанной на рис. 7.5.

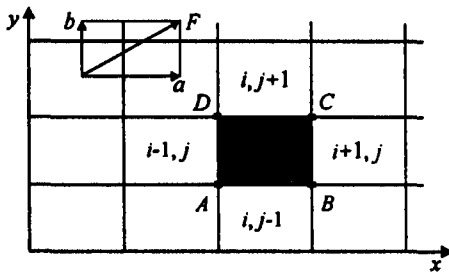


Рис. 7.5. Расчетная схема к примеру 1

Компоненты потока в данном случае определяются по формулам

$$f = a\varphi, \quad g = b\varphi.$$

Вспользуемся формулами (7.10):

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{AB} = -g_{i,j-1} (x_B - x_A) = -b\varphi_{i,j-1} \Delta x, \quad (7.22a)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{BC} = +f_{i,j} (y_C - y_B) = +a\varphi_{i,j} \Delta y,$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{CD} = +g_{i,j} (x_C - x_D) = +b\varphi_{i,j} \Delta x, \quad (7.22b)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{DA} = -f_{i-1,j} (y_D - y_A) = -a\varphi_{i-1,j} \Delta y.$$

В соответствии с формулой (7.7) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi v)_{i,j} + [-b\varphi_{i,j-1} \Delta x + a\varphi_{i,j} \Delta y + b\varphi_{i,j} \Delta x - a\varphi_{i-1,j} \Delta y] = 0.$$

Поделив вышеприведенное уравнение на величину объема $V_{i,j} = \Delta x \Delta y$, получим расчетное соотношение

$$\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial t} + a \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{\Delta x} + b \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{\Delta y} = 0. \quad (7.23)$$

Пример 2. Получить расчетные соотношения для центрально-разностной схемы и централизованного в объеме метода конечного объема.

Решение. Геометрия задачи показана на рис. 7.6. Воспользуемся аппроксимацией типа (7.12). Тогда

$$f_{AB} = \frac{1}{2} (f_{i,j} + f_{i+1,j}) = f_{i+1/2,j}, \quad (7.24a)$$

$$f_{CD} = \frac{1}{2} (f_{i,j} + f_{i-1,j}) = f_{i-1/2,j};$$

$$g_{DA} = \frac{1}{2} (g_{i,j} + g_{i,j-1}) = g_{i,j-1/2}, \quad (7.24b)$$

$$g_{BC} = \frac{1}{2} (g_{i,j} + g_{i,j+1}) = g_{i,j+1/2}.$$

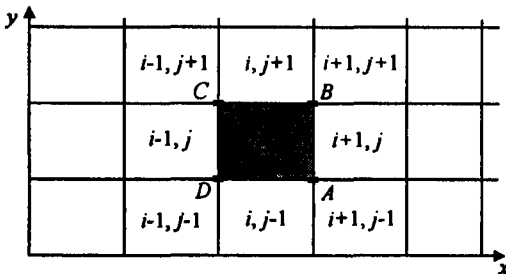


Рис. 7.6. Расчетная схема к примеру 2

Выражение для закона сохранения в объеме V_{ij} имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_{i,j} \Delta x \Delta y) + (f_{i+1/2,j} - f_{i-1/2,j}) \Delta y + (g_{i,j+1/2} - g_{i,j-1/2}) \Delta x = \dot{Q}_{ij} \Delta x \Delta y$$

или, поделив на величину объема $V_{i,j} = \Delta x \Delta y$ и учитывая определения потоков (7.24), получим

$$\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial t} + \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j-1}}{2\Delta y} = \dot{Q}_{ij}. \quad (7.25)$$

7.4.5. Представление производных в методе конечного объема

Из теоремы Гаусса – Остроградского следует (Ильин В.А., Позняк Э.Г., 1980), что для функции, удовлетворяющей свойством непрерывности вместе со своими частными производными первого порядка, справедливо следующее соотношение:

$$\int_V \nabla \phi \, dv = \oint_S \phi \, d\mathbf{S}, \quad (7.26)$$

где S – как и прежде, поверхность охватывающая объем V .

Определим понятие среднего градиента скалярной функции ϕ в объеме V по формулам

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dv = \frac{1}{V} \oint_S \phi \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}, \quad (7.27)$$

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dv = \frac{1}{V} \oint_S \phi \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (7.28)$$

В случае двумерной геометрии $\mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = dy$, $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -dx$, поэтому

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\rangle_V = \frac{1}{V} \oint_S \phi \, dy = -\frac{1}{V} \oint_S \phi \, dx, \quad (7.29)$$

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle_V = -\frac{1}{V} \oint_S \phi \, dx = \frac{1}{V} \oint_S \phi \, dy. \quad (7.30)$$

Формулы (7.29) и (7.30) имеют следующее конечно-разностное представление:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_V &= \frac{1}{2V} \sum_{k=1}^{N_K} (\varphi_K + \varphi_{K+1})(y_{K+1} - y_K)_k = \\ &= -\frac{1}{2V} \sum_{k=1}^{N_K} (y_K + y_{K+1})(\varphi_{K+1} - \varphi_K)_k, \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_V &= -\frac{1}{2V} \sum_{k=1}^{N_K} (\varphi_K + \varphi_{K+1})(x_{K+1} - x_K)_k = \\ &= \frac{1}{2V} \sum_{k=1}^{N_K} (x_K + x_{K+1})(\varphi_{K+1} - \varphi_K)_k, \end{aligned} \quad (7.32)$$

где N_K – число узлов (и граней) элементарного объема V ; K – индекс (имя узла).

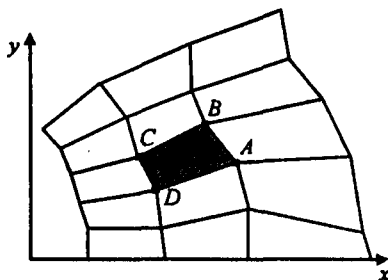


Рис. 7.7. К определению среднего градиента скалярной величины

Применительно к 4-угольному элементарному объему, показанному на рис. 7.7, эти формулы дают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle &= \frac{1}{2V} [(\varphi_A + \varphi_B)(y_B - y_A) + (\varphi_B + \varphi_C)(y_C - y_B) + \\ &+ (\varphi_C + \varphi_D)(y_D - y_C) + (\varphi_D + \varphi_A)(y_A - y_D)] = \\ &= -\frac{1}{2V} [(y_A + y_B)(\varphi_B - \varphi_A) + (y_B + y_C)(\varphi_C - \varphi_B) + \\ &+ (y_C + y_D)(\varphi_D - \varphi_C) + (y_D + y_A)(\varphi_A - \varphi_D)], \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle &= -\frac{1}{2V} [(\varphi_A + \varphi_B)(x_B - x_A) + (\varphi_B + \varphi_C)(x_C - x_B) + \\
&+ (\varphi_C + \varphi_D)(x_D - x_C) + (\varphi_D + \varphi_A)(x_A - x_D)] = \\
&= \frac{1}{2V} [(x_A + x_B)(\varphi_B - \varphi_A) + (x_B + x_C)(\varphi_C - \varphi_B) + \\
&+ (x_C + x_D)(\varphi_D - \varphi_C) + (x_D + x_A)(\varphi_A - \varphi_D)]. \quad (7.34)
\end{aligned}$$

Несложно убедиться в том, что имеется еще одна более простая форма записи соотношений (7.31) и (7.32):

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_V = \frac{1}{2V} \sum_{k=1}^{N_K} \varphi_K (y_{K+1} - y_{K-1})_k = -\frac{1}{2V} \sum_{k=1}^{N_K} y_K (\varphi_{K+1} - \varphi_{K-1})_k, \quad (7.35)$$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_V = -\frac{1}{2V} \sum_{k=1}^{N_K} \varphi_K (x_{K+1} - x_{K-1})_k = \frac{1}{2V} \sum_{k=1}^{N_K} x_K (\varphi_{K+1} - \varphi_{K-1})_k. \quad (7.36)$$

Используя определения (7.29) и (7.30) получим, что при $\varphi = x$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_V = 1 = \frac{1}{V} \oint_S x dy, \quad (7.37)$$

а при $\varphi = y$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_V = 1 = -\frac{1}{V} \oint_S y dx, \quad (7.38)$$

что позволяет рассчитывать величину V по простым формулам

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_K} (x_K + x_{K+1})(y_{K+1} - y_K)_k = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_K} (y_K + y_{K+1})(x_{K+1} - x_K)_k = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_K} x_K (y_{K+1} - y_{K-1})_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_K} y_K (x_{K+1} - x_{K-1})_k. \quad (7.39)
\end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим получение формулы расчета средних производных в двумерном четырехугольнике произволь-

ной формы. Для этого воспользуемся соотношениями (7.35) и (7.36) совместно с (7.39):

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\rangle_V = \frac{(\varphi_A - \varphi_C)(y_B - y_D) - (\varphi_B - \varphi_D)(y_A - y_C)}{(x_A - x_C)(y_B - y_D) - (x_B - x_D)(y_A - y_C)}, \quad (7.40)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\rangle_V = \frac{(x_A - x_C)(\varphi_B - \varphi_D) - (x_B - x_D)(\varphi_A - \varphi_C)}{(x_A - x_C)(y_B - y_D) - (x_B - x_D)(y_A - y_C)}. \quad (7.41)$$

7.5. Расчетные соотношения метода конечного объема в трехмерной геометрии

7.5.1. Вводные замечания

Использование интегральных соотношений (7.1) и (7.2), выражающих один из законов сохранения, в принципе не накладывает никаких ограничений на форму элементарных объемов. Однако очевидно, что здесь необходимо пытаться удовлетворить двум противоречивым требованиям: с одной стороны, форма объема должна быть настолько это возможно проста (что влечет за собой простоту получаемых расчетных соотношений), а с другой стороны, форма объема должна быть настолько сложной, насколько это диктуется требованием описать сложную геометрию исследуемой области.

С вычислительных позиций задача формулируется следующим образом: необходимо получить формализованные соотношения, определяющие площади граней и их направляющие векторы, а также величины объемов элементарных ячеек.

В практике расчетов наиболее широко распространены гексаэдральные и тетраэдральные конечные объемы. При этом особенностью гексаэдральных конечных объемов является то, что в общем случае любые четыре точки, формирующие одну из сторон гексаэдра, не обязательно лежат в одной плоскости, так что грань элементарного объема может практически состоять из двух плоскостей (рис. 7.8).

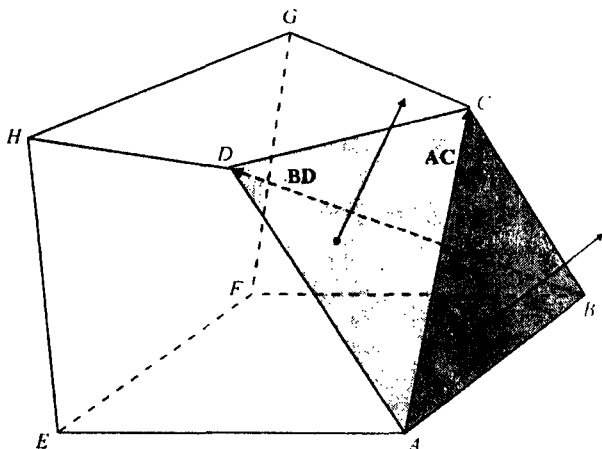


Рис. 7.8. Грань $ABCD$ гексаэдра состоит из двух плоскостей ABC и ADC , каждая из которых имеет свою нормаль, в общем случае не параллельных друг другу

В соответствии с этим можно дать два определения вектора нормального поверхности $ABCD$:

$$\text{а) } \quad \mathbf{S}_{ABCD} = 0.5(\mathbf{AC} \times \mathbf{BD}); \quad (7.42)$$

$$\text{б) } \quad \mathbf{S}_{ABCD} = 0.5[(\mathbf{AB} \times \mathbf{BC}) + (\mathbf{CD} \times \mathbf{DA})]. \quad (7.43)$$

Можно убедиться в том, что формулы (7.42) и (7.43) приводят к одному и тому же результату.

7.5.2. Расчет объема трехмерной ячейки

Для того чтобы рассчитать объем гексаэдра, его делят на тетраэдры или пирамиды, для определения объемов которых имеются достаточно простые формулы. Рассмотрим способ расчета объема гексаэдра путем разбиения его на тетраэдры. Например, на рис. 7.9 показан один из возможных таких способов.

Каждый гексаэдр может быть представлен в виде суммы шести пирамид: $DABE$, $DEFB$, $DGCB$, $DBFG$, $DEHG$, $DEGF$. При составлении списка пирамид использовалось следующее правило: а) выбирается одна из вершин (в данном случае D), относительно которой выстраиваются пирамиды;

- б) фиксируются три грани, на которые из точки D можно опустить перпендикуляр ($AEFB$, $EFGH$, $BCGF$);
- в) через три вершины, не имеющие общих ребер с точкой D , проводится сечение (GEB). Это сечение делит каждую из граней на два треугольника, каждый из которых и является основанием искомым пирамид: ABE , EFB , GCB , $BCGF$, $EFGH$, EGF .

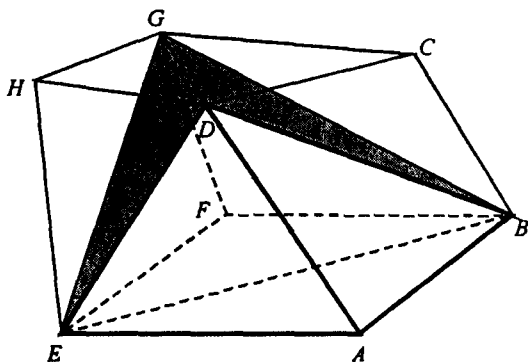


Рис. 7.9. Представление гексаэдра в виде суммы шести пирамид

Для того чтобы рассчитать объем любого из элементарных тетраэдров, удобно воспользоваться формулой Гаусса – Остроградского (Ильин В.А., Позняк Э.Г., 1980)

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV = \oint_S (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}), \quad (7.44)$$

приняв в качестве вектора \mathbf{A} – радиус-вектор $\mathbf{r} = xi + yj + zk$, для которого выполняется очевидное соотношение: $(\nabla \cdot \mathbf{r}) = 3$.

Например, для тетраэдра $DABE$

$$V_{ABED} = \frac{1}{3} \oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^4 \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}_s = \frac{1}{3} \mathbf{r}_{DA} \cdot \mathbf{S}_{ABE}, \quad (7.45)$$

так как для вектора \mathbf{r}_{DA} выполняются условия

$$\mathbf{r}_{DA} \cdot \mathbf{S}_{ADE} = \mathbf{r}_{DA} \cdot \mathbf{S}_{ADB} = 0$$

в силу того, что он принадлежит плоскостям ADE и ADB .

Учитывая, что площадь S_{ABE} может быть определена посредством векторного произведения

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{EA} \times \mathbf{r}_{AB} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{r}_{BE} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{BE} \times \mathbf{r}_{EA},$$

получаем для объема тетраэдра

$$V_{ABED} = \frac{1}{6} \mathbf{r}_{DA} \cdot (\mathbf{r}_{EA} \times \mathbf{r}_{AB}) \quad (7.46)$$

или

$$V_{ABED} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_D & y_D & z_D & 1 \\ x_E & y_E & z_E & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.47)$$

7.6. Формулировка уравнений метода конечного объема применительно к двумерной задаче переноса теплового излучения в области произвольной геометрии

7.6.1. Вариант центрированного в объеме метода конечного объема, основанный на центрально-разностной аппроксимации

Рассмотрим уравнение диффузии излучения в двумерной геометрии в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + G, \quad (7.48)$$

где $D = 1/(3\kappa)$ – коэффициент диффузии, обратно пропорциональный коэффициенту поглощения κ ; G – функция источников излучения. Будем считать коэффициент диффузии D постоянным в пределах элементарных объемов, на которые будет разделена вся исследуемая область. Нестационарное слагаемое в (7.48) может не иметь физического смысла. Включив его в уравнение, будем подразумевать использование итерационной схемы установления (Самарский А.А. и др., 1978; Ортега Дж. и др., 1975). Рассмотрим построение расчетной схемы для одного временного шага.

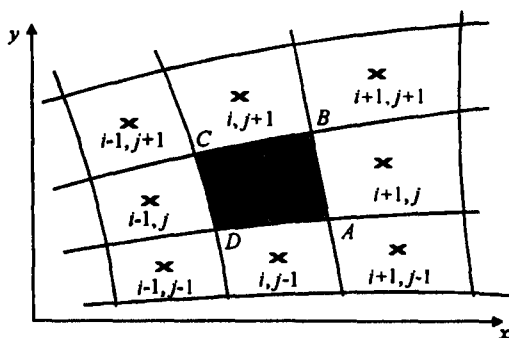


Рис. 7.10. Расчетная сетка для уравнения диффузии излучения

Дискретизацию уравнения (7.48) выполним на произвольной криволинейной сетке, показанной на рис. 7.10, аппроксимируя расчетные ячейки четырехугольниками.

Компоненты диффузного потока имеют вид

$$f = -D \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad g = -D \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Зададим следующую аппроксимацию потоков на поверхностях элементарного объема $ABCD$ (для прямоугольной ячейки):

$$\begin{aligned} f_{AB} &= \frac{1}{2}(f_A + f_B), & f_{CD} &= \frac{1}{2}(f_C + f_D), \\ g_{DA} &= \frac{1}{2}(g_D + g_A), & g_{CB} &= \frac{1}{2}(g_C + g_B). \end{aligned} \quad (7.49)$$

Искомая расчетная схема будет получена с использованием балансового соотношения следующего вида (или, в общем случае (7.7)):

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{ij} V_{ij} + f_{AB} S_{AB} - f_{CD} S_{CD} + g_{BC} S_{BC} - g_{DA} S_{DA} = G_{ij} V_{ij}, \quad (7.50)$$

где $S_{AB}, S_{CD}, S_{BC}, S_{DA}$ — длины сторон четырехугольника.

Сначала получим формулы для расчета потоков в узлах элементарного объема. Для этого воспользуемся соотношениями, определяющими среднюю величину производной. Так, например,

для того чтобы рассчитать компоненты потока в точке A , необходимо воспользоваться этими формулами применительно к четырем объемам, окружающим эту точку: (i, j) , $(i, j-1)$, $(i+1, j-1)$, $(i+1, j)$. В соответствии с (7.33) имеем серию тождественных соотношений (местоположение точек (i, j) внутри элементарных объемов будет определено ниже):

$$\begin{aligned}
 f_A &= -D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_A = -\frac{D}{2V_{ij}} \left[(\varphi_{i+1, j-1} + \varphi_{i+1, j}) (y_{i+1, j} - y_{i+1, j-1}) + \right. \\
 &\quad + (\varphi_{i, j} + \varphi_{i+1, j}) (y_{i, j} - y_{i+1, j}) + (\varphi_{i, j} + \varphi_{i, j-1}) (y_{i, j-1} - y_{i, j}) + \\
 &\quad \left. + (\varphi_{i, j-1} + \varphi_{i+1, j-1}) (y_{i+1, j-1} - y_{i, j-1}) \right] = \\
 &= -\frac{D}{2V_{ij}} \left[\varphi_{i+1, j-1} (y_{i+1, j} - y_{i+1, j-1} + y_{i+1, j-1} - y_{i, j-1}) + \right. \\
 &\quad + \varphi_{i+1, j} (y_{i+1, j} - y_{i+1, j-1} + y_{i, j} - y_{i+1, j}) + \\
 &\quad + \varphi_{i, j} (y_{i, j} - y_{i+1, j} + y_{i, j-1} - y_{i, j}) + \\
 &\quad \left. + \varphi_{i, j-1} (y_{i, j-1} - y_{i, j} + y_{i+1, j-1} - y_{i, j-1}) \right] = \\
 &= -\frac{D}{2V_{ij}} \left[\varphi_{i+1, j-1} (y_{i+1, j} - y_{i, j-1}) + \varphi_{i+1, j} (y_{i, j} - y_{i+1, j-1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \varphi_{i, j} (y_{i, j-1} - y_{i+1, j}) + \varphi_{i, j-1} (y_{i+1, j-1} - y_{i, j}) \right]. \quad (7.51)
 \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 f_B &= -\frac{D}{2V_{ij}} \left[\varphi_{i+1, j} (y_{i+1, j+1} - y_{i, j}) + \varphi_{i+1, j+1} (y_{i, j+1} - y_{i+1, j}) + \right. \\
 &\quad \left. + \varphi_{i, j+1} (y_{i, j} - y_{i+1, j+1}) + \varphi_{i, j} (y_{i+1, j} - y_{i, j+1}) \right], \quad (7.52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_C &= -\frac{D}{2V_{ij}} \left[\varphi_{i, j} (y_{i, j+1} - y_{i-1, j}) + \varphi_{i, j+1} (y_{i-1, j+1} - y_{i, j}) + \right. \\
 &\quad \left. + \varphi_{i-1, j+1} (y_{i-1, j} - y_{i, j+1}) + \varphi_{i-1, j} (y_{i, j} - y_{i-1, j+1}) \right], \quad (7.53)
 \end{aligned}$$

$$f_D = -\frac{D}{2V_{ij}} \left[\varphi_{i,j-1} (y_{i,j} - y_{i-1,j-1}) + \varphi_{i,j} (y_{i-1,j} - y_{i,j-1}) + \right. \\ \left. + \varphi_{i-1,j} (y_{i-1,j-1} - y_{i,j}) + \varphi_{i-1,j-1} (y_{i,j-1} - y_{i-1,j}) \right], \quad (7.54)$$

$$g_A = \frac{D}{2V_{ij}} \left[\varphi_{i+1,j-1} (x_{i+1,j} - x_{i,j-1}) + \varphi_{i+1,j} (x_{i,j} - x_{i+1,j-1}) + \right. \\ \left. + \varphi_{i,j} (x_{i,j-1} - x_{i+1,j}) + \varphi_{i,j-1} (x_{i+1,j-1} - x_{i,j}) \right], \quad (7.55)$$

$$g_B = \frac{D}{2V_{ij}} \left[\varphi_{i+1,j} (x_{i+1,j+1} - x_{i,j}) + \varphi_{i+1,j+1} (x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) + \right. \\ \left. + \varphi_{i,j+1} (x_{i,j} - x_{i+1,j+1}) + \varphi_{i,j} (x_{i+1,j} - x_{i,j+1}) \right], \quad (7.56)$$

$$g_C = \frac{D}{2V_{ij}} \left[\varphi_{i,j} (x_{i,j+1} - x_{i-1,j}) + \varphi_{i,j+1} (x_{i-1,j+1} - x_{i,j}) + \right. \\ \left. + \varphi_{i-1,j+1} (x_{i-1,j} - x_{i,j+1}) + \varphi_{i-1,j} (x_{i,j} - x_{i-1,j+1}) \right], \quad (7.57)$$

$$g_D = \frac{D}{2V_{ij}} \left[\varphi_{i,j-1} (x_{i,j} - x_{i-1,j-1}) + \varphi_{i,j} (x_{i-1,j} - x_{i,j-1}) + \right. \\ \left. + \varphi_{i-1,j} (x_{i-1,j-1} - x_{i,j}) + \varphi_{i-1,j-1} (x_{i,j-1} - x_{i-1,j}) \right]. \quad (7.58)$$

Потоки на правой и верхней гранях элементарного объема (по формулам (7.49)) равны соответственно:

$$f_{AB} = -\frac{D}{4V_{ij}} \left[\varphi_{i+1,j-1} (y_{i+1,j} - y_{i,j-1}) + \varphi_{i+1,j} (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1}) + \right. \\ \left. + \varphi_{i+1,j+1} (y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) + \varphi_{i,j+1} (y_{i,j} - y_{i+1,j+1}) + \right. \\ \left. + \varphi_{i,j} (y_{i,j-1} - y_{i,j+1}) + \varphi_{i,j-1} (y_{i+1,j-1} - y_{i,j}) \right], \quad (7.59)$$

$$g_{CB} = \frac{D}{4V_{ij}} \left[\varphi_{i+1,j+1} (x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) + \varphi_{i,j+1} (x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j+1}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \varphi_{i-1,j+1} (x_{i-1,j} - x_{i,j+1}) + \varphi_{i-1,j} (x_{i,j} - x_{i-1,j+1}) + \\
 & + \varphi_{i,j} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \varphi_{i+1,j} (x_{i+1,j+1} - x_{i,j}) \Big]. \quad (7.60)
 \end{aligned}$$

Потоки на левой и нижней гранях элементарного объема можно определить по тем же формулам, если вычесть единицу из всех i -х индексов в (7.59) и из всех j -х индексов в (7.60).

Длины граней рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned}
 S_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \quad S_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}, \\
 S_{CD} &= \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}, \quad S_{DA} = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2}. \quad (7.61)
 \end{aligned}$$

И, наконец, объем ячейки рассчитывается с использованием формул (7.39)

$$\begin{aligned}
 V_{i,j} &= \frac{1}{2} \left[(x_A + x_B)(y_B - y_A) + (x_B + x_C)(y_C - y_B) + \right. \\
 & \left. + (x_C + x_D)(y_D - y_C) + (x_D + x_A)(y_A - y_D) \right]. \quad (7.62)
 \end{aligned}$$

Неудобство использования формул (7.51)–(7.60) и (7.61), (7.62) состоит в том, что в них входят координаты вершин ячеек и их центров. Чаще расчетная сетка строится заданием координат вершин ячеек, поэтому координаты центров целесообразнее рассчитывать. Здесь возникает вопрос, который ранее не обсуждался: что принимать за центр ячейки?

В принципе метод конечного объема не дает каких-либо условий выбора центра ячейки, поэтому здесь остается руководствоваться некоторыми соображениями «разумности». Напомним, что координаты центров расчетных ячеек появляются в формулах для расчета потоков на гранях ячеек, в которые в свою очередь входят сеточные значения искомой функции во всех четырех ячейках, окружающих узел. С узлом расчетной ячейки ассоциируется значение искомой функции φ , приписываемой этой ячейке. Используя механическую аналогию можно говорить о «центре масс» однородной ячейки, а ее координаты (x_0, y_0) определять по известным формулам

$$x_0 = \iint_S x dS, \quad y_0 = \iint_S y dS,$$

где интеграл берется по площади ячейки. При этом ясно, что на сильно неоднородных ячейках следует ожидать появление дополнительных погрешностей, связанных, например, с ситуацией, когда вокруг узла располагаются ячейки с сильно различающимися размерами. Впрочем, с этой проблемой приходится сталкиваться во всех численных методах, и ее решение кроется в первую очередь в способах построения хороших расчетных сеток. В простейшем случае однородной сетки в прямоугольной декартовой системе координаты узлов и центров ячеек сдвинуты на половину сеточного шага.

Далее будем считать, что координаты узлов и центров ячеек нам известны по результатам численной процедуры построения неоднородных сеток. Тогда искомое конечно-разностное балансовое соотношение примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{i,j}^{p+1} - \varphi_{i,j}^p}{\Delta t} V_{i,j} = & \varphi_{i-1,j-1}^s (LL)_{i,j} + \varphi_{i,j-1}^s (LC)_{i,j} + \varphi_{i+1,j-1}^s (LR)_{i,j} + \\ & + \varphi_{i+1,j}^s (MR)_{i,j} + \varphi_{i+1,j+1}^s (HR)_{i,j} + \varphi_{i,j+1}^s (HC)_{i,j} + \\ & + \varphi_{i-1,j+1}^s (HL)_{i,j} + \varphi_{i-1,j}^s (ML)_{i,j} - \varphi_{i,j}^s C_{i,j} + G_{i,j} V_{i,j}, \end{aligned} \quad (7.63)$$

где коэффициенты $(LL)_{i,j}, (LC)_{i,j}, (LR)_{i,j}, (MR)_{i,j}, (HR)_{i,j}, (HC)_{i,j}, (HL)_{i,j}, (ML)_{i,j}, C_{i,j}$ зависят только от координат центров и узлов ячеек. Верхний индекс «s» означает, что расчетное соотношение (7.63) можно реализовать по явной ($s = p$) или неявной ($s = p + 1$) схеме.

7.6.2. Вариант центрированного в объеме метода конечного объема (МКО), основанный на потоковой аппроксимации

За основу возьмем то же самое уравнение диффузии излучения (7.48), которое будет представлено в разностном виде (7.50) на сетке, показанной на рис. 7.10. Отличие обсуждаемой модифи-

кации МКО от предыдущей состоит в способе аппроксимации потоков на гранях ячеек. При решении уравнения диффузии отсутствует конвективный перенос величины φ , поэтому для потоков можно использовать непосредственно выражение вида

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) = -(D \nabla \varphi) \cdot \mathbf{S} \quad (7.64)$$

или в разностной записи применительно ко всем граням:

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{AB} = -D \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_{AB} (y_B - y_A) + D \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{AB} (x_B - x_A), \quad (7.65a)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{BC} = -D \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_{BC} (y_C - y_B) + D \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{BC} (x_C - x_B), \quad (7.65b)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{CD} = -D \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_{CD} (y_D - y_C) + D \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{CD} (x_D - x_C), \quad (7.65b)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{DA} = -D \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_{DA} (y_A - y_D) + D \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{DA} (x_A - x_D). \quad (7.65g)$$

Искомые величины φ заданы в центрах ячеек, поэтому для расчета производных $\partial \varphi / \partial x$ и $\partial \varphi / \partial y$ воспользуемся формулами (7.33) и (7.34) применительно к заштрихованному на рис. 7.11 объему (он обозначен V_{AB})

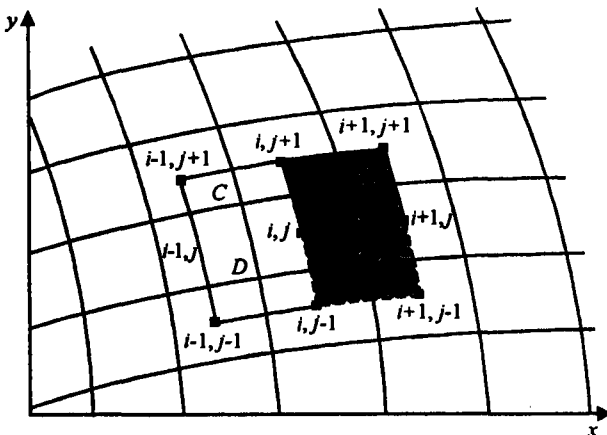


Рис. 7.11. Криволинейная конечно-разностная сетка

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_{AB} = \frac{1}{2V_{AB}} \left[(\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i+1,j-1})(y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}) + \right. \\ \left. + (\varphi_{i+1,j-1} + \varphi_{i+1,j+1})(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1}) + \right. \\ \left. + (\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i,j+1})(y_{i,j+1} - y_{i+1,j+1}) + \right. \\ \left. + (\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1})(y_{i,j-1} - y_{i,j+1}) \right]; \quad (7.66)$$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{AB} = -\frac{1}{2V_{AB}} \left[(\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i+1,j-1})(x_{i+1,j-1} - x_{i,j-1}) + \right. \\ \left. + (\varphi_{i+1,j-1} + \varphi_{i+1,j+1})(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1}) + \right. \\ \left. + (\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i,j+1})(x_{i,j+1} - x_{i+1,j+1}) + \right. \\ \left. + (\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1})(x_{i,j-1} - x_{i,j+1}) \right]. \quad (7.67)$$

Аналогично строятся расчетные соотношения для средних производных, ассоциируемых с гранями CD, DA и CB

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_{CD} = \frac{1}{2V_{CD}} \left[(\varphi_{i-1,j-1} + \varphi_{i,j-1})(y_{i,j-1} - y_{i-1,j-1}) + \right. \\ \left. + (\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + \right. \\ \left. + (\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j+1})(y_{i-1,j+1} - y_{i,j+1}) + \right. \\ \left. + (\varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1})(y_{i-1,j-1} - y_{i-1,j+1}) \right], \quad (7.68)$$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{CD} = -\frac{1}{2V_{CD}} \left[(\varphi_{i-1,j-1} + \varphi_{i,j-1})(x_{i,j-1} - x_{i-1,j-1}) + \right. \\ \left. + (\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \right. \\ \left. + (\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j+1})(x_{i-1,j+1} - x_{i,j+1}) + \right. \\ \left. + (\varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1})(x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j+1}) \right], \quad (7.69)$$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_{DA} = \frac{1}{2V_{DA}} \left[(\varphi_{i-1,j-1} + \varphi_{i+1,j-1})(y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j-1}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (\varphi_{i+1,j-1} + \varphi_{i+1,j})(y_{i+1,j} - y_{i+1,j-1}) + \\
& + (\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j})(y_{i-1,j} - y_{i+1,j}) + \\
& + (\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-1,j-1})(y_{i-1,j-1} - y_{i-1,j}), \quad (7.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{DA} = & -\frac{1}{2V_{DA}} \left[(\varphi_{i-1,j-1} + \varphi_{i+1,j-1})(x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j-1}) + \right. \\
& + (\varphi_{i+1,j-1} + \varphi_{i+1,j})(x_{i+1,j} - x_{i+1,j-1}) + \\
& + (\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j})(x_{i-1,j} - x_{i+1,j}) + \\
& \left. + (\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-1,j-1})(x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j}) \right], \quad (7.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_{BC} = & \frac{1}{2V_{BC}} \left[(\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i+1,j+1})(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j}) + \right. \\
& + (\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i-1,j+1})(y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j+1}) + \\
& + (\varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j})(y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1}) + \\
& \left. + (\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) \right], \quad (7.72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{BC} = & -\frac{1}{2V_{BC}} \left[(\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i+1,j+1})(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}) + \right. \\
& + (\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i-1,j+1})(x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j+1}) + \\
& + (\varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j})(x_{i-1,j} - x_{i-1,j+1}) + \\
& \left. + (\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j})(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \right]. \quad (7.73)
\end{aligned}$$

Итоговая формула получается подстановкой (7.66)–(7.73) в (7.65), а затем в (7.50):

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_{i,j}^{p+1} - \varphi_{i,j}^p}{\Delta t} V_{i,j} = & \varphi_{i-1,j-1}^s (LL)_{i,j} + \varphi_{i,j-1}^s (LC)_{i,j} + \varphi_{i+1,j-1}^s (LR)_{i,j} + \\
& + \varphi_{i+1,j}^s (MR)_{i,j} + \varphi_{i+1,j+1}^s (HR)_{i,j} + \varphi_{i,j+1}^s (HC)_{i,j} + \\
& + \varphi_{i-1,j+1}^s (HL)_{i,j} + \varphi_{i-1,j}^s (ML)_{i,j} - \varphi_{i,j}^s C_{i,j} + G_{i,j} V_{i,j}, \quad (7.74)
\end{aligned}$$

где коэффициенты $(LL)_{i,j}, (LC)_{i,j}, (LR)_{i,j}, (MR)_{i,j}, (HR)_{i,j}, (HC)_{i,j}, (HL)_{i,j}, (ML)_{i,j}, C_{i,j}$ зависят только от координат центров и узлов ячеек. Как и ранее (см. уравнение (7.63)) верхний индекс «s» означает возможность решения задачи в явной и неявной постановках.

Производные (7.66) – (7.73) преобразуем к виду

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\rangle_{AB} = \frac{1}{2V_{AB}} \left[\Phi_{i,j-1} (y_{i+1,j-1} - y_{i,j+1}) + \Phi_{i+1,j-1} (y_{i+1,j+1} - y_{i,j-1}) + \Phi_{i+1,j+1} (y_{i,j+1} - y_{i+1,j-1}) + \Phi_{i,j+1} (y_{i,j-1} - y_{i+1,j+1}) \right], \quad (7.75)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\rangle_{AB} = -\frac{1}{2V_{AB}} \left[\Phi_{i,j-1} (x_{i+1,j-1} - x_{i,j+1}) + \Phi_{i+1,j-1} (x_{i+1,j+1} - x_{i,j-1}) + \Phi_{i+1,j+1} (x_{i,j+1} - x_{i+1,j-1}) + \Phi_{i,j+1} (x_{i,j-1} - x_{i+1,j+1}) \right], \quad (7.76)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\rangle_{CD} = \frac{1}{2V_{CD}} \left[\Phi_{i-1,j-1} (y_{i,j-1} - y_{i-1,j+1}) + \Phi_{i,j-1} (y_{i,j+1} - y_{i-1,j-1}) + \Phi_{i,j+1} (y_{i-1,j+1} - y_{i,j-1}) + \Phi_{i-1,j+1} (y_{i-1,j-1} - y_{i,j+1}) \right], \quad (7.77)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\rangle_{CD} = -\frac{1}{2V_{CD}} \left[\Phi_{i-1,j-1} (x_{i,j-1} - x_{i-1,j+1}) + \Phi_{i,j-1} (x_{i,j+1} - x_{i-1,j-1}) + \Phi_{i,j+1} (x_{i-1,j+1} - x_{i,j-1}) + \Phi_{i-1,j+1} (x_{i-1,j-1} - x_{i,j+1}) \right], \quad (7.78)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\rangle_{DA} = \frac{1}{2V_{DA}} \left[\Phi_{i-1,j-1} (y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j}) + \Phi_{i+1,j-1} (y_{i+1,j} - y_{i-1,j-1}) + \Phi_{i+1,j} (y_{i-1,j} - y_{i+1,j-1}) + \Phi_{i-1,j} (y_{i-1,j-1} - y_{i+1,j}) \right], \quad (7.79)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\rangle_{DA} = -\frac{1}{2V_{DA}} \left[\Phi_{i-1,j-1} (x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j}) + \Phi_{i+1,j-1} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j-1}) + \Phi_{i+1,j} (x_{i-1,j} - x_{i+1,j-1}) + \Phi_{i-1,j} (x_{i-1,j-1} - x_{i+1,j}) \right], \quad (7.80)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\rangle_{BC} = \frac{1}{2V_{BC}} \left[\varphi_{i+1,j} (y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j}) + \varphi_{i+1,j+1} (y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j}) + \right. \\ \left. + \varphi_{i-1,j+1} (y_{i-1,j} - y_{i+1,j+1}) + \varphi_{i-1,j} (y_{i+1,j} - y_{i-1,j+1}) \right], \quad (7.81)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\rangle_{BC} = -\frac{1}{2V_{BC}} \left[\varphi_{i+1,j} (x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j}) + \varphi_{i+1,j+1} (x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j}) + \right. \\ \left. + \varphi_{i-1,j+1} (x_{i-1,j} - x_{i+1,j+1}) + \varphi_{i-1,j} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j+1}) \right]. \quad (7.82)$$

Поток на грани AB в соответствии с (7.65а), (7.75), (7.76)

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{AB} = - \left[\varphi_{i,j-1} (AB)_{i,j-1} + \varphi_{i+1,j-1} (AB)_{i+1,j-1} + \right. \\ \left. + \varphi_{i+1,j+1} (AB)_{i+1,j+1} + \varphi_{i,j+1} (AB)_{i,j+1} \right], \quad (7.83)$$

где

$$(AB)_{i,j-1} = \frac{D}{2V_{AB}} \left[(y_B - y_A)(y_{i+1,j-1} - y_{i,j+1}) + (x_B - x_A)(x_{i+1,j-1} - x_{i,j+1}) \right];$$

$$(AB)_{i+1,j-1} = \frac{D}{2V_{AB}} \left[(y_B - y_A)(y_{i+1,j+1} - y_{i,j-1}) + (x_B - x_A)(x_{i+1,j+1} - x_{i,j-1}) \right];$$

$$(AB)_{i+1,j+1} = \frac{D}{2V_{AB}} \left[(y_B - y_A)(y_{i,j+1} - y_{i+1,j-1}) + (x_B - x_A)(x_{i,j+1} - x_{i+1,j-1}) \right];$$

$$(AB)_{i,j+1} = \frac{D}{2V_{AB}} \left[(y_B - y_A)(y_{i,j-1} - y_{i+1,j+1}) + (x_B - x_A)(x_{i,j-1} - x_{i+1,j+1}) \right].$$

Поток на грани CD в соответствии с (7.65в), (7.77), (7.78)

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{CD} = - \left[\varphi_{i-1,j-1} (CD)_{i-1,j-1} + \varphi_{i,j-1} (CD)_{i,j-1} + \right. \\ \left. + \varphi_{i,j+1} (CD)_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j+1} (CD)_{i-1,j+1} \right], \quad (7.84)$$

где

$$(CD)_{i-1,j-1} = \frac{D}{2V_{CD}} \left[(y_D - y_C)(y_{i,j-1} - y_{i-1,j+1}) + (x_D - x_C)(x_{i,j-1} - x_{i-1,j+1}) \right];$$

$$(CD)_{i,j-1} = \frac{D}{2V_{CD}} \left[(y_D - y_C)(y_{i,j+1} - y_{i-1,j-1}) + (x_D - x_C)(x_{i,j+1} - x_{i-1,j-1}) \right];$$

$$(CD)_{i,j+1} = \frac{D}{2V_{CD}} \left[(y_D - y_C)(y_{i-1,j+1} - y_{i,j-1}) + (x_D - x_C)(x_{i-1,j+1} - x_{i,j-1}) \right];$$

$$(CD)_{i-1,j+1} = \frac{D}{2V_{CD}} \left[(y_D - y_C)(y_{i-1,j-1} - y_{i,j+1}) + (x_D - x_C)(x_{i-1,j-1} - x_{i,j+1}) \right].$$

Поток на грани BC в соответствии с (7.65б), (7.81), (7.82)

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{BC} = - \left[\varphi_{i+1,j} (BC)_{i+1,j} + \varphi_{i+1,j+1} (BC)_{i+1,j+1} + \right. \\ \left. + \varphi_{i-1,j+1} (BC)_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j} (BC)_{i-1,j} \right], \quad (7.85)$$

где

$$(BC)_{i+1,j} = \frac{D}{2V_{BC}} \left[(y_C - y_B)(y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j}) + (x_C - x_B)(x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j}) \right];$$

$$(BC)_{i+1,j+1} = \frac{D}{2V_{BC}} \left[(y_C - y_B)(y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j}) + (x_C - x_B)(x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j}) \right];$$

$$(BC)_{i-1,j+1} = \frac{D}{2V_{BC}} \left[(y_C - y_B)(y_{i-1,j} - y_{i+1,j+1}) + (x_C - x_B)(x_{i-1,j} - x_{i+1,j+1}) \right];$$

$$(BC)_{i-1,j} = \frac{D}{2V_{BC}} \left[(y_C - y_B)(y_{i+1,j} - y_{i-1,j+1}) + (x_C - x_B)(x_{i+1,j} - x_{i-1,j+1}) \right].$$

Поток на грани AD в соответствии с (7.65г), (7.79), (7.80)

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{DA} = - \left[\varphi_{i-1,j-1} (DA)_{i-1,j-1} + \varphi_{i+1,j-1} (DA)_{i+1,j-1} + \right. \\ \left. + \varphi_{i+1,j} (DA)_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} (DA)_{i-1,j} \right], \quad (7.86)$$

где

$$(DA)_{i-1,j-1} = \frac{D}{2V_{DA}} \left[(y_A - y_D)(y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j}) + (x_A - x_D)(x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j}) \right];$$

$$(DA)_{i+1,j-1} = \frac{D}{2V_{DA}} \left[(y_A - y_D)(y_{i+1,j} - y_{i-1,j-1}) + (x_A - x_D)(x_{i+1,j} - x_{i-1,j-1}) \right];$$

$$(DA)_{i+1,j} = \frac{D}{2V_{DA}} \left[(y_A - y_D)(y_{i-1,j} - y_{i+1,j-1}) + (x_A - x_D)(x_{i-1,j} - x_{i+1,j-1}) \right];$$

$$(DA)_{i-1,j} = \frac{D}{2V_{DA}} \left[(y_A - y_D)(y_{i-1,j-1} - y_{i+1,j}) + (x_A - x_D)(x_{i-1,j-1} - x_{i+1,j}) \right].$$

Балансовое расчетное соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{i,j}^{p+1} - \varphi_{i,j}^p}{\Delta t} V_{i,j} = & \left[\varphi_{i,j-1} (AB)_{i,j-1} + \varphi_{i+1,j-1} (AB)_{i+1,j-1} + \right. \\ & \left. + \varphi_{i+1,j+1} (AB)_{i+1,j+1} + \varphi_{i,j+1} (AB)_{i,j+1} \right] + \\ & + \left[-\varphi_{i-1,j-1} (CD)_{i-1,j-1} - \varphi_{i,j-1} (CD)_{i,j-1} - \right. \\ & \left. - \varphi_{i,j+1} (CD)_{i,j+1} - \varphi_{i-1,j+1} (CD)_{i-1,j+1} \right] + \\ & + \left[\varphi_{i+1,j} (BC)_{i+1,j} + \varphi_{i+1,j+1} (BC)_{i+1,j+1} + \right. \\ & \left. + \varphi_{i-1,j+1} (BC)_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j} (BC)_{i-1,j} \right] + \\ & + \left[-\varphi_{i-1,j-1} (DA)_{i-1,j-1} - \varphi_{i+1,j-1} (DA)_{i+1,j-1} - \right. \\ & \left. - \varphi_{i+1,j} (DA)_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j} (DA)_{i-1,j} \right] + G_{i,j} V_{i,j}, \quad (7.87) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{i,j}^{p+1} - \varphi_{i,j}^p}{\Delta t} V_{i,j} = & \varphi_{i-1,j-1} (LL)_{i,j} + \varphi_{i,j-1} (LC)_{i,j} + \varphi_{i+1,j-1} (LR)_{i,j} + \\ & + \varphi_{i+1,j} (MR)_{i,j} + \varphi_{i+1,j+1} (HR)_{i,j} + \varphi_{i,j+1} (HC)_{i,j} + \\ & + \varphi_{i-1,j+1} (HL)_{i,j} + \varphi_{i-1,j} (ML)_{i,j} - \varphi_{i,j} C_{i,j} + G_{i,j} V_{i,j}, \quad (7.88) \end{aligned}$$

где:

$$(LL)_{i,j} = (CD)_{i-1,j-1} + (DA)_{i-1,j-1};$$

$$(LC)_{i,j} = (AB)_{i,j-1} + (CD)_{i,j-1};$$

$$(LR)_{i,j} = (AB)_{i+1,j-1} + (DA)_{i+1,j-1};$$

$$\begin{aligned}
 (MR)_{i,j} &= (BC)_{i+1,j} + (DA)_{i+1,j}; \\
 (HR)_{i,j} &= (AB)_{i+1,j+1} + (BC)_{i+1,j+1}; \\
 (HC)_{i,j} &= (AB)_{i,j+1} + (CD)_{i,j+1}; \\
 (HL)_{i,j} &= (CD)_{i-1,j+1} + (BC)_{i-1,j+1}; \\
 (ML)_{i,j} &= (BC)_{i-1,j} + (DA)_{i-1,j}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что площади (протяженности) граней и величины объемов (площадей) ячейки (i,j) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 S_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \quad S_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}, \\
 S_{CD} &= \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}, \quad S_{DA} = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2},
 \end{aligned} \quad (7.89)$$

$$V_{i,j} = \frac{1}{2} [x_A(y_B - y_D) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_D - y_B) + x_D(y_A - y_C)],$$

$$\begin{aligned}
 V_{AB} &= \frac{1}{2} [x_{i,j-1}(y_{i+1,j-1} - y_{i,j+1}) + x_{i+1,j-1}(y_{i+1,j+1} - y_{i,j-1}) + \\
 &\quad + x_{i+1,j+1}(y_{i,j+1} - y_{i+1,j-1}) + x_{i,j+1}(y_{i,j-1} - y_{i+1,j+1})],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{BC} &= \frac{1}{2} [x_{i-1,j}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j+1}) + x_{i+1,j}(y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j}) + \\
 &\quad + x_{i+1,j+1}(y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j}) + x_{i-1,j+1}(y_{i-1,j} - y_{i+1,j+1})],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{CD} &= \frac{1}{2} [x_{i-1,j-1}(y_{i,j-1} - y_{i-1,j+1}) + x_{i,j-1}(y_{i,j+1} - y_{i-1,j-1}) + \\
 &\quad + x_{i,j+1}(y_{i-1,j+1} - y_{i,j-1}) + x_{i-1,j+1}(y_{i-1,j-1} - y_{i,j+1})],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{DA} &= \frac{1}{2} [x_{i-1,j-1}(y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j}) + x_{i+1,j-1}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j-1}) + \\
 &\quad + x_{i+1,j}(y_{i-1,j} - y_{i+1,j-1}) + x_{i-1,j}(y_{i-1,j-1} - y_{i+1,j})].
 \end{aligned}$$

Расчетные формулы (7.88), (7.89) представляют собой замкнутую двумерную вычислительную модель МКО в объеме произвольной геометрии.

ГЛАВА 8

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ

Метод предложен Виком (Wick G.C., 1943) и детально исследован Чадрасекхаром (Чандрасекхар С., 1953). Подробное изложение метода дано в книге (Гринспен Х. и др. (ред.), 1972). Ниже представлено краткое описание одномерной и трехмерной формулировок, представляющие, по сути, различные методы, а также даны примеры использования этих методов.

8.1. Одномерная формулировка

Сначала рассмотрим классическую простейшую формулировку метода дискретных ординат для неизлучающей среды, заключенной в бесконечный плоский слой. Как уже неоднократно отмечалось, эта модель широко применяется в астрофизике и в задачах динамики излучающего газа.

За основу возьмем уравнение переноса для изотропно рассеивающего плоского слоя без собственного излучения (символ частотной зависимости опущен)

$$\mu \frac{\partial J(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J(\tau, \mu) = \frac{\bar{\omega}}{2} \int_{-1}^1 J(\tau, \mu') d\mu'. \quad (8.1)$$

Интегральное слагаемое в этом уравнении аппроксимируется квадратурной формулой, например, гауссовой квадратурой (Корн Г. и др., 1974)

$$\int_{-1}^1 J(\tau, \mu') d\mu' = \sum_{j=1}^N a_j J(\tau, \mu'_j) = \sum_{j=1}^N a_j J_j(\tau), \quad (8.2)$$

где a_j – квадратурные весовые коэффициенты; μ_j – корни полиномов Лежандра, определяемые из условия $P_N(\mu) = 0$.

Корни многочленов Лежандра и квадратурные весовые коэффициенты приведены в (Абрамовиц М. и др. (ред.), 1979) вплоть до $N = 96$. Приведем для примера узлы и весовые коэффициенты гауссовой формулы для некоторых первых значений:

$$n = 1, m = 2$$

$$\mu_{+1} = +0.5773503,$$

$$\mu_{-1} = -0.5773503,$$

$$a_{+1} = a_{-1} = 1;$$

$$n = 2, m = 4$$

$$\mu_{+1} = +0.3399810,$$

$$\mu_{-1} = -0.3399810,$$

$$a_{+1} = a_{-1} = 0.6521452;$$

$$\mu_{+2} = +0.8611363,$$

$$\mu_{-2} = -0.8611363,$$

$$a_{+2} = a_{-2} = 0.3478548.$$

Подчеркнем, что значения коэффициентов a_j и μ_j не зависят от подынтегрального выражения. Уравнение (8.1) необходимо решить для каждого μ_j

$$\mu_i \frac{dJ_i(\tau)}{d\tau} + J_i(\tau) = \frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{j=1}^N a_j J_j(\tau). \quad (8.3)$$

Представим интенсивность $J_i(\tau)$ в виде экспоненциальной функции

$$J_i(\tau) = A_i \exp(k\tau), \quad (8.4)$$

тогда (8.3) примет вид

$$(1 + \mu_i k) A_i = \frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{j=1}^N a_j A_j \equiv \frac{\tilde{\omega}}{2} c \quad (8.5)$$

или

$$A_i = \frac{(\tilde{\omega}/2)c}{1 + \mu_i k}. \quad (8.6)$$

Подставив (8.6) в сумму тождества (8.5), получим характеристическое уравнение

$$\frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{1 + \mu_j k} = 1. \quad (8.7)$$

Уравнение (8.7) определяет набор чисел k_m , при которых экспоненциальное представление (8.4) будет удовлетворять уравнению (8.3). Пусть число таких чисел M . Тогда решение (8.4) представим в виде ряда

$$J_i(\tau) = \sum_{m=1}^M A_{i,m} \exp(-k_m \tau), \quad (8.8)$$

где коэффициенты $A_{i,m}$ подлежат определению из граничных условий. Таким образом, фактически решение поставленной задачи сводится к отысканию корней характеристического уравнения (8.7). Исследование свойств корней характеристического уравнения выполнено в (Дэвисон Б., 1960). Предложен следующий вычислительный алгоритм поиска корней.

Если предположить неограниченное увеличение порядка приближения N , то вместо (8.7) можно записать

$$\frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{1 + \mu k} = 1 = \frac{\tilde{\omega}}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k}. \quad (8.9)$$

Это означает, что при $N \rightarrow \infty$ имеются два решения k_{+1} и k_{-1} , стремящиеся соответственно к τ_H^{-1} и $-\tau_H^{-1}$. Поиск промежуточных значений k упрощается при использовании особых свойств квадратурной формулы:

1) она симметрична относительно средней точки интервала, т.е.

$$\mu_j = -\mu_{N+1-j}, \quad a_j = a_{N+1-j}; \quad (8.10)$$

- 2) она дает точное значение интеграла, если подынтегральное выражение является полиномом порядка, не превосходящего $Z(N)$, т.е., если n – положительное целое число:

$$\sum_{j=1}^N a_j \mu_j^n = \begin{cases} 2/(n+1), & \text{для нечетных } n \leq Z(N), \\ 0, & \text{для четных } n; \end{cases} \quad (8.11)$$

- 3) если подынтегральное выражение положительно в интервале $(-1,1)$, то интеграл (8.2) также положителен, а это означает, что

$$a_j > 0; \quad (8.12)$$

- 4) все μ_j различны;

- 5) используются только приближения с четным числом N , т.е.

$$\mu_j \neq 0. \quad (8.13)$$

Использование соотношений (8.10)–(8.13) позволяет установить следующие свойства корней: между двумя последовательными значениями μ_j^{-1} одного и того же знака лежит только один корень, причем

$$|k_{\pm m}| > 1, \text{ для } m \geq 2.$$

Вычислительная процедура становится замкнутой при формулировке граничных условий: на свободных поверхностях $x=0$ и $x=H$ считается известной интенсивность падающего на слой излучения

$$\text{при } x=0, \mu_j > 0: J(\tau=0, \mu_j) = J_j^+, \quad (8.14)$$

$$\text{при } x=H, \mu_j < 0: J(\tau=\tau_H, \mu_j) = J_j^-, \quad (8.15)$$

где положительные и отрицательные значения μ_j определяются выбранной квадратурной формулой, а соответствующие значения J_j^+, J_j^- определяются по известному закону распределения падающего на слой излучения.

Заметим, что недостатком приведенной формулировки метода дискретных ординат является сложность учета собственного

излучения среды. Развитие этого метода дано ниже применительно к общему виду уравнения переноса. Сначала метод формулируется для прямоугольной декартовой системы координат в общем трехмерном случае. Затем будут рассмотрены некоторые частные случаи.

8.2. Трехмерная формулировка

Рассматривается перенос излучения в трехмерной области, показанной на рис. 8.1.

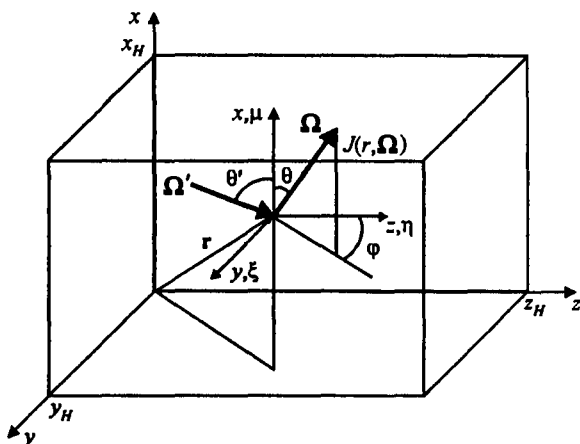


Рис. 8.1. Направления распространения излучения в трехмерной геометрии

Уравнение переноса излучения формулируется для произвольной индикатрисы рассеяния в приближении ЛТР (символ частотной зависимости опущен)

$$\begin{aligned}
 (\Omega \cdot \nabla) J(\mathbf{r}, \Omega) + \beta(\mathbf{r}) J(\mathbf{r}, \Omega) = \\
 = \kappa(\mathbf{r}) J_b(\mathbf{r}) + \frac{\sigma(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{4\pi} J(\mathbf{r}, \Omega') \gamma(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) d\Omega' \quad (8.16)
 \end{aligned}$$

с граничными условиями следующего вида:

$$\text{при } \mathbf{r} = S: J(\mathbf{r}, \Omega) = \varepsilon J_b(\mathbf{r}) + \frac{\rho}{\pi} \int_{(n \cdot \Omega') < 0} |n \cdot \Omega'| J(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega', \quad (8.17)$$

где ϵ – полусферическая степень черноты поверхности; ρ – полусферическая отражательная способность; \mathbf{n} – вектор единичной нормали к поверхности (направленный вовнутрь объема).

В подавляющем большинстве расчетных случаев индикатриса рассеяния может быть представлена в виде ряда по полиномам Лежандра P_n , с добавлением слагаемого, описывающего преимущественное рассеяние вперед (так называемое дельта-рассеяние)

$$\gamma(\mu^*) = (1 - \bar{\mu}) \sum (2n+1) b_n P_n(\mu^*) + 2\bar{\mu} \delta(1 - \mu^*), \quad (8.18)$$

где $\mu^* = \cos\theta^*$ – косинус угла рассеяния в системе координат, связанной с рассеивающим центром; $\bar{\mu}$ – средний косинус рассеяния; δ – дельта-функция Дирака; $b_n = (a_n - \bar{\mu}) / (1 - \bar{\mu})$ – коэффициенты разложения индикатрисы по полиномам Лежандра с учетом среднего косинуса рассеяния; a_n – коэффициент разложения индикатрисы без учета среднего косинуса рассеяния ($\bar{\mu} = 0$).

Поскольку угловые координаты произвольного вектора Ω в трехмерной лабораторной системе координат задаются направляющими косинусами (см. рис. 8.1)

$$\begin{aligned} \omega_x = \mu = \cos\theta, \quad \omega_y = \xi = \sin\theta \sin\varphi, \\ \omega_z = \eta = \sin\theta \cos\varphi, \end{aligned} \quad (8.19)$$

то следует иметь в виду связь между угловыми координатами в лабораторной системе координат и в системе координат центра рассеяния

$$\mu^* = \mu\mu' + \xi\xi' + \eta\eta', \quad (8.20)$$

где штрихами помечены направляющие косинусы единичного вектора, отвечающего падающему излучению на рассеивающий центр.

С учетом разложения (8.18) уравнение переноса излучения принимает вид

$$(\Omega \cdot \nabla) J(\mathbf{r}, \Omega) + \tilde{\beta}(\mathbf{r}) J(\mathbf{r}, \Omega) = \kappa(\mathbf{r}) J_b(\mathbf{r}) +$$

$$+ \frac{\tilde{\sigma}}{4\pi} \int \sum_{4\pi n=0}^M (2n+1) b_n P_n(\mu^*) J'(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega', \quad (8.21)$$

где $\tilde{\sigma} = (1 - \bar{\mu}) \sigma$, $\tilde{\beta} = \kappa + \tilde{\sigma}$.

Пусть задан набор угловых направлений $\Omega_m = \{\mu_m, \xi_m, \eta_m\}$ на основе выбранной квадратурной формулы.

Уравнение переноса для m -го направления формулируется в виде

$$\mu_m \frac{\partial J^m}{\partial x} + \xi_m \frac{\partial J^m}{\partial y} + \eta_m \frac{\partial J^m}{\partial z} + \tilde{\beta} J^m = \kappa J_b + \frac{\tilde{\sigma}}{4\pi} S^m, \quad (8.22)$$

где $J^m = J(\mathbf{r}, \Omega_m)$; зависимость от аргументов всех функций для краткости опущена;

$$S^m \equiv \sum_{m'} w_{m'} \sum_{n=0}^M (2n+1) b_n P_n(\mu^*) J^{m'}, \quad (8.23)$$

где m' – индекс направления падающего излучения, w_m – элемент телесного угла в направлении m .

Учитывая (8.20), сумму (8.23) перепишем в виде

$$S^m \equiv \sum_{m'} w_{m'} \gamma(m', m) J^{m'}, \quad (8.24)$$

$$\text{где } \gamma(m', m) = \sum_{n=0}^M (2n+1) b_n P_n(\mu_m \mu_{m'} + \xi_m \xi_{m'} + \eta_m \eta_{m'}). \quad (8.25)$$

Граничные условия для прямоугольной расчетной области формулируются на каждой грани:

$$\text{при } x=0 \quad J^m = \varepsilon J_b + \frac{R}{\pi} \sum_{\substack{m' \\ \mu_{m'} < 0}} w_{m'} |\mu_{m'}| J^{m'}, \quad (8.26.1)$$

$$\text{при } x=x_H \quad J^m = \varepsilon J_b + \frac{R}{\pi} \sum_{\substack{m' \\ \mu_{m'} > 0}} w_{m'} |\mu_{m'}| J^{m'}, \quad (8.26.2)$$

$$\text{при } y=0 \quad J^m = \varepsilon J_b + \frac{R}{\pi} \sum_{\xi_{m'} < 0} w_{m'} |\xi_{m'}| J^{m'}, \quad (8.26.3)$$

$$\text{при } y=y_H \quad J^m = \varepsilon J_b + \frac{R}{\pi} \sum_{\xi_{m'} > 0} w_{m'} |\xi_{m'}| J^{m'}, \quad (8.26.4)$$

$$\text{при } z=0 \quad J^m = \varepsilon J_b + \frac{R}{\pi} \sum_{\eta_{m'} < 0} w_{m'} |\eta_{m'}| J^{m'}, \quad (8.26.5)$$

$$\text{при } z=z_H \quad J^m = \varepsilon J_b + \frac{R}{\pi} \sum_{\eta_{m'} > 0} w_{m'} |\eta_{m'}| J^{m'}. \quad (8.26.6)$$

Конечно-разностная схема для решения уравнения (8.22) получается интегрированием по элементарному объему в пространстве физических координат (рис. 8.2). Центр объема обозначен точкой P . В этой точке ищется решение уравнения переноса. Шесть граней прямоугольника, содержащего точку P , обозначены индексами f (ближняя), b (дальняя), w (левая), e (правая), n (верхняя) и s (нижняя). За перечисленными гранями находятся соседние по отношению к точке P узлы расчетной ячейки (соответственно F, B, W, E, N, S).

Интегрирование (8.22) по объему ячейки дает связь между интенсивностями на гранях

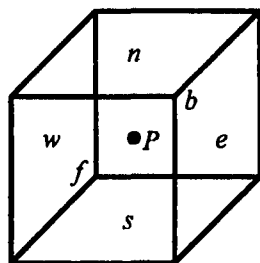


Рис. 8.2. Объем ячейки

$$\begin{aligned} \mu_m F_{ew} (J_e^m - J_w^m) + \xi_m F_{ns} (J_n^m - J_s^m) + \eta_m F_{fb} (J_f^m - J_b^m) = \\ = \tilde{\beta} V_P J_P^m + \kappa V_P J_{b,P} + V_P \frac{\bar{\sigma}}{4\pi} \sum_{m'} w_{m'} \gamma(m', m) J_P^{m'}, \end{aligned} \quad (8.27)$$

где F_{ew}, F_{ns}, F_{fb} — площади граней; V_P — объем ячейки с индексом P .

Для расчета интенсивности в центре ячейки используется линейная интерполяция

$$J_p^m = \alpha J_n^m + (1 - \alpha) J_s^m = \alpha J_e^m + (1 - \alpha) J_w^m = \alpha J_f^m + (1 - \alpha) J_b^m, \quad (8.28)$$

где весовой коэффициент α , как правило, полагается равным 0.5.

Соотношения (8.28) позволяют исключить из (8.27) три значения интенсивности. Исходя из структуры этого уравнения (в нем присутствуют разности между интенсивностями на противоположных гранях), вместо J_e^m , J_n^m и J_f^m подставим (8.28)

$$J_p^m = \frac{\mu_m F_{ew} J_w^m + \xi_m F_{ns} J_s^m + \eta_m F_{fb} J_b^m + \alpha (S_1 + S_2) V_P}{\mu_m F_{ew} + \xi_m F_{ns} + \eta_m F_{fb} + \alpha \bar{\beta} V_P}, \quad (8.29)$$

где
$$S_1 = \kappa J_{b,p}, \quad S_2 = \frac{\bar{\sigma}}{4\pi} \sum_{m'} w_{m'} \gamma(m', m) J_p^{m'}$$

Расчетная формула (8.29) не может быть использована для непосредственного расчета интенсивности излучения по двум причинам:

- 1) сумма S_2 включает в себя искомую интенсивность, поэтому необходимо реализовать итерационное решение задачи;
- 2) в случае появления в знаменателе отрицательных направляющих косинусов, могут возникнуть проблемы вычислительного характера.

Поэтому в целях обеспечения вычислительной реализуемости формулы (8.29) ее преобразуют к следующему виду:

$$J_p^m = \frac{|\mu_m| F_{ew} J_w^m + |\xi_m| F_{ns} J_s^m + |\eta_m| F_{fb} J_b^m + \alpha (S_1 + S_2) V_P}{|\mu_m| F_{ew} + |\xi_m| F_{ns} + |\eta_m| F_{fb} + \alpha \bar{\beta} V_P}, \quad (8.30)$$

где

$$\begin{aligned} J_p^m &= \alpha J_{xe}^m + (1 - \alpha) J_{xr}^m; \\ J_p^m &= \alpha J_{ye}^m + (1 - \alpha) J_{yr}^m; \\ J_p^m &= \alpha J_{ze}^m + (1 - \alpha) J_{zr}^m. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Здесь индексами e и r обозначены значения концевых и опорных граней вычислительной ячейки так, что в формулу для интенсивности J_P^m входят значения интенсивностей на опорных гранях (r). Для пояснения этого допустим, что все направляющие косинусы (μ_m', ξ_m', η_m') положительны, т.е. излучение входит в объем через одну из граней w, s, b и выходит через одну из граней e, n, f . Тогда опорные грани имеют индексы w, s, b , а концевые — e, n, f .

Если направление Ω_m' имеет хотя бы один отрицательный направляющий косинус, например $\eta_m' < 0$, то опорными гранями являются w, s, f , а концевыми — e, n, b .

Таким образом, для каждого ординатного направления Ω_m интенсивность в точке J_P^m определяется по известным интенсивностям на опорных гранях. После этого, с использованием (8.31) находятся значения интенсивности на концевых гранях.

Итерационный процесс организуется следующим образом:

1) обход пространственных ячеек осуществляется в таком порядке, чтобы можно было лучшим образом воспользоваться заданными граничными условиями;

2) на первой итерации источники слагаемые S_2 полагаются равными нулю;

3) фиксируется ординатное направление $\Omega_m = \{\mu_m, \xi_m, \eta_m\}$, и обходятся все пространственные ячейки;

4) затем обходятся все ординатные направления;

5) рассчитываются источники слагаемые S_2 ;

6) вычисления повторяются, начиная с пункта 3.

В процессе вычислений могут возникнуть различные численные неустойчивости:

1) при экстраполяционном нахождении интенсивности на концевых гранях по формулам (8.31) последняя может оказаться отрицательной. В этом случае рекомендуется полагать ее равной нулю;

2) установлено, что получаемые с помощью (8.30), (8.31) интенсивности численно устойчивы, если выполняются следующие условия:

$$\Delta x < \frac{|\mu|}{\bar{\beta}(1-\alpha)} \varphi, \quad \Delta y < \frac{|\xi|}{\bar{\beta}(1-\alpha)} \varphi, \quad \Delta z < \frac{|\eta|}{\bar{\beta}(1-\alpha)} \varphi, \quad (8.32)$$

где

$$\varphi = \frac{\alpha^3 + (1-\alpha)^2 (2-5a)}{\alpha}.$$

Что касается выбора ординатных направлений, то здесь рекомендуется использовать симметричную систему ординат, т.е. желательно, чтобы квадратурные ряды были инвариантны относительно любого поворота на 90° . Требуется также, чтобы они давали правильные значения нескольких выделенных моментов интенсивности излучения (Fiveland W.A., 1987):

- 1) нулевого момента по полной сфере ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$);
- 2) первого момента по полусфере ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$);
- 3) первого момента по полной сфере ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$).

8.3. Расчет переноса излучения без учета эффектов рассеяния

Расчетный алгоритм метода дискретных ординат существенно упрощается при пренебрежении процессами рассеяния. В этом случае требуется решить уравнение переноса следующего вида:

$$(\Omega \cdot \nabla) J(\mathbf{r}, \Omega) + \kappa(\mathbf{r}) J(\mathbf{r}, \Omega) = \kappa(\mathbf{r}) J_b(\mathbf{r}), \quad (8.33)$$

при граничных условиях (8.17), или в ординатном представлении

$$\mu_m \frac{\partial J^m}{\partial x} + \xi_m \frac{\partial J^m}{\partial y} + \eta_m \frac{\partial J^m}{\partial z} + \kappa J^m = \kappa J_b, \quad (8.34)$$

с граничными условиями (8.26).

Рассмотрим частные случаи применения метода дискретных ординат.

Задача 1. Дать формулировку уравнений первого приближения метода дискретных ординат для плоского светорассеивающего не поглощающего слоя.

В первом приближении $n = 1$, $a_{+1} = a_{-1} = 1$, $3\mu^2 - 1 = 0$, следовательно, $\mu_{+1} = -\mu_{-1} = 1/\sqrt{3}$. Тогда вместо уравнения

$$\mu_i \frac{dJ_i}{d\tau} = -J_i + \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^n a_j J_j$$

получаем

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dJ_{+1}(\tau)}{d\tau} = -J_{+1}(\tau) + \frac{1}{2} [J_{+1}(\tau) + J_{-1}(\tau)],$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dJ_{-1}(\tau)}{d\tau} = -J_{-1}(\tau) + \frac{1}{2} [J_{+1}(\tau) + J_{-1}(\tau)]$$

или
$$\frac{dJ_{+1}(\tau)}{d\eta} = -J_{+1}(\tau) + J_{-1}(\tau),$$

$$\frac{dJ_{-1}(\tau)}{d\eta} = -J_{-1}(\tau) + J_{+1}(\tau),$$

где $d\eta = (\sqrt{3}/2) d\tau$.

Задача 2. Дать формулировку N -го приближение метода дискретных ординат для плоского нерассеивающего слоя.

В работе (Четверушкин Б.Н., 1985) анализируется одна из конечно-разностных схем, которую можно использовать при интегрировании (8.34) в одномерном плоском случае. В предположении, что интенсивность собственного излучения J_b и коэффициент поглощения κ являются кусочно-постоянными на интервале (x_{i-1}, x_i) , $J_b = J_{b,i-1/2}$, $\kappa = \kappa_{i-1/2}$, формулируется система расчетных соотношений:

$$\mu_m \frac{J_{i,m} - J_{i-1,m}}{x_i - x_{i-1}} + \kappa_{i-1/2} \frac{J_{i-1,m} + J_{i,m}}{2} = \kappa_{i-1/2} J_{b,i-1/2}, \quad (8.35)$$

$$\mu_m \geq 0, \quad i = 2, 3, \dots, N_i$$

$$\mu_m \frac{J_{i,m} - J_{i+1,m}}{x_i - x_{i+1}} + \kappa_{i+1/2} \frac{J_{i+1,m} + J_{i,m}}{2} = \kappa_{i+1/2} J_{b,i+1/2}, \quad (8.36)$$

$$\mu_m < 0, \quad i = N_i - 1, \dots, 1.$$

Данная конечно-разностная схема является устойчивой с локальной погрешностью аппроксимации $O(\Delta x^2)$ на гладких решениях и легко реализуется в виде явной расчетной схемы.

8.4. Метод характеристик

Метод характеристик (фактически семейство *характеристических методов*) определен в книге (Четверушкин Б.Н., 1985) как метод, в котором интегрирование уравнения переноса в ординатном представлении производится вдоль направлений полета фотонов. Важным отличием конечно-разностных схем, разработанных для характеристических методов, от дискретно-ординатных схем является то, что в криволинейной геометрии (например, цилиндрической и сферической) линия траектории фотона не является прямой. Для плоского слоя методы характеристик и дискретных ординат идентичны.

8.4.1. Метод характеристик для одномерной сферической геометрии

Рассмотрим решение уравнения переноса излучения в одномерном сферическом объеме нерассеивающей среды (рис. 8.3)

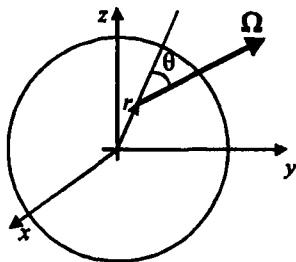


Рис. 8.3. Геометрия сферической области

$$\mu \frac{\partial J}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial J}{\partial \mu} + \kappa J = \kappa J_b \quad (8.37)$$

при заданной интенсивности излучения на внешней поверхности сферы

$$r = R, \quad \mu < 0, \quad J(r = R, \mu) = \mathcal{J}(\mu), \quad (8.38)$$

воспользуемся конечно-разностной схемой Самарского (Самарский А.А., 1987)

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{J_{i,m} - J_{i+1,m}}{r_i - r_{i+1}} + \frac{1 - \mu_m^2}{r_i} \frac{J_{i,m} - J_{i,m-1}}{\mu_m - \mu_{m-1}} + \kappa_{i+1/2} J_{i,m} = \\ = \kappa_{i+1/2} J_{b,i+1/2}, \end{aligned} \quad (8.39)$$

$$i = N_i - 1, N_i - 2, \dots, 1; \quad m = 2, 3, \dots, \frac{N_m + 1}{2}; \quad \mu_m \leq 0;$$

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{J_{i,m} - J_{i-1,m}}{r_i - r_{i-1}} + \frac{1 - \mu_m^2}{r_i} \frac{J_{i,m} - J_{i,m-1}}{\mu_m - \mu_{m-1}} + \kappa_{i-1/2} J_{i,m} = \\ = \kappa_{i-1/2} J_{b,i-1/2}, \end{aligned} \quad (8.40)$$

$$i = 2, 3, \dots, N_i; \quad m = \frac{N_m + 3}{2}, \frac{N_m + 4}{2}, \dots, N_m; \quad \mu_m > 0.$$

Данная конечно-разностная схема применяется непосредственно к уравнению переноса в сферической системе координат на следующих сетках:

по радиусу

$$\varpi_r = \{r_i, i = 1, 2, \dots, N_i; \Delta r_i = r_i - r_{i-1}\};$$

по углу (точнее, по косинусу угла)

$$\varpi_\mu = \{\mu_m, m = 1, 2, \dots, N_m; N_m = 2k + 1; \Delta \mu_m = \mu_m - \mu_{m-1}\}.$$

Реализация схемы (8.39), (8.40) начинается от внешней поверхности сферы заданием граничных значений интенсивности:

$$i = N_i; \quad m = 2, 3, \dots, \frac{N_m + 1}{2}; \quad \mu_m < 0: \quad J_{N_i, m} = \mathcal{J}(\mu_m)$$

и от луча $\mu_{m=1} = -1$, $i = N_i - 1, N_i - 2, \dots, 1$, на котором уравнение переноса излучения для сферически симметричного случая имеет вид

$$-\frac{\partial J}{\partial r} + \kappa J = \kappa J_b \quad (8.41)$$

и реализуется по схеме

$$-\frac{J_{i,1} - J_{i+1,1}}{r_i - r_{i+1}} + \kappa_{i+1/2} J_{i,1} = \kappa_{i+1/2} J_{b,i+1/2}. \quad (8.42)$$

Затем расчет ведется по рекуррентным формулам (8.39) и (8.40).

8.4.2. Метод характеристик с интерполяцией

Данная схема предложена и подробно исследована в работе (Гольдин В.Я., 1960). Решается уравнение переноса (8.37) в сферической системе координат (рис.8.3) на следующей сетке:

по радиусу

$$\varpi_r = \{r_i, i = 1, 2, \dots, N_i; \Delta r_i = r_i - r_{i-1}\};$$

по косинусу угла

$$\varpi_\mu = \{\mu_m, m = 1, 2, \dots, N_m; \Delta \mu = h_\mu = \mu_{m+1} - \mu_m = \mu_m - \mu_{m-1}; \\ \mu_1 = -1, \mu_{(N_m+1)/2} = 0, \mu_{N_m} = 1\}.$$

Исходное расчетное соотношение записывается в *характеристических координатах* s (т.е. вдоль прямолинейной траектории полета фотона)

$$\frac{dJ}{ds} + \kappa J = \kappa J_b \quad (8.43)$$

на отрезке характеристики $[s_0, s_1]$, где коэффициенты поглощения и интенсивность излучения абсолютно черного тела принимаются постоянными. Значения интенсивности в точке s_1 определяется по формуле

$$J_1 = J_0 \exp[-\kappa(s_1 - s_0)] + \kappa J_b \{1 - \exp[-\kappa(s_1 - s_0)]\}. \quad (8.44)$$

Далее эта формула применяется для интегрирования уравнения переноса вдоль луча $m = 1$ ($\mu_1 = -1$)

$$J_{i,1} = J_{i+1,1} \exp \left[-\kappa_{i+1/2} (r_{i+1} - r_i) \right] + \kappa_{i+1/2} J_{b,i+1/2} \times \\ \times \left\{ 1 - \exp \left[-\kappa_{i+1/2} (r_{i+1} - r_i) \right] \right\}, \quad i = N_i - 1, N_i - 2, \dots, 1, \quad (8.45)$$

$$J_{N_i,1} = \mathcal{J}(\mu_1).$$

Следующий шаг вычислительного алгоритма состоит в определении интенсивности в узлах сетки $m = 2, 3, \dots$, причем считается, что при расчете $J_{i,m}$ значения функций $J_{i+1,m}$, $J_{i,m-1}$, $J_{i+1,m-1}$ уже известны:

$$J_{i,m} = \bar{J} \exp \left[-\kappa_{i+1/2} (x_{i,m} - \tilde{x}_{i,m}) \right] + \\ + \kappa_{i+1/2} J_{b,i+1/2} \left\{ 1 - \exp \left[-\kappa_{i+1/2} (x_{i,m} - \tilde{x}_{i,m}) \right] \right\}, \quad (8.46) \\ i = N_i - 1, N_i - 2, \dots, 1,$$

где
$$x_{i,m} = r_i \mu_m; \quad (8.47)$$

$$\tilde{x}_{i,m} = \begin{cases} r_{i+1} \tilde{\mu}_{i,m} & \tilde{\mu}_{i,m} \geq \mu_{m-1}, \\ r_i \sqrt{1 - \mu_m^2} \frac{\mu_{m-1}}{\sqrt{1 - \mu_{m-1}^2}}, & \tilde{\mu}_{i,m} < \mu_{m-1}; \end{cases} \quad (8.48)$$

$$\tilde{\mu}_{i,m} = - \frac{\sqrt{r_{i+1}^2 - r_i^2 (1 - \mu_m^2)}}{r_{i+1}}; \quad (8.49)$$

$$\tilde{J}^{(1)} = J_{i+1,m-1} \frac{\mu_m - \mu}{\mu_m - \mu_{m-1}} + J_{i+1,m} \frac{\mu - \mu_{m-1}}{\mu_m - \mu_{m-1}}; \quad (8.50)$$

$$\tilde{J}^{(2)} = J_{i,m-1} \frac{r_{i+1} - r}{r_{i+1} - r_i} + J_{i+1,m-1} \frac{r - r_i}{r_{i+1} - r_i}. \quad (8.51)$$

После достижения центральной точки необходимо определить значение интенсивности $J_{1,(N_m+1)/2}$ при $\mu = 0$. Для этого

используется условие симметрии при $r = 0$: независимость интенсивности от угла. Вычисления интенсивности в положительных направлениях осуществляется по формулам:

$$J_{i,m} = \bar{J} \exp \left[-\kappa_{i-1/2} (x_{i,m} - \bar{x}_{i,m}) \right] + \kappa_{i-1/2} J_{b,i-1/2} \left\{ 1 - \exp \left[-\kappa_{i-1/2} (x_{i,m} - \bar{x}_{i,m}) \right] \right\}, \quad (8.52)$$

где

$$x_{i,m} = r_i \mu_m; \quad (8.53)$$

$$\bar{x}_{i,m} = \begin{cases} \bar{r}_{i,m} \mu_{m-1}, & \bar{r}_{i,m} \geq r_{i-1}, \\ \sqrt{r_{i-1}^2 - r_i (1 - \mu_m^2)}, & \bar{r}_{i,m} < r_{i-1}; \end{cases} \quad (8.54)$$

$$\bar{r}_{i,m} = r_i \frac{\sqrt{1 - \mu_m^2}}{\sqrt{1 - \mu_{m-1}^2}}; \quad (8.55)$$

$$\bar{J}^{(1)} = J_{i-1,m-1} \frac{\mu_m - \mu}{\mu_m - \mu_{m-1}} + J_{i-1,m} \frac{\mu - \mu_{m-1}}{\mu_m - \mu_{m-1}}; \quad (8.56)$$

$$\bar{J}^{(2)} = J_{i-1,m-1} \frac{r_i - r}{r_i - r_{i-1}} + J_{i,m-1} \frac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}}. \quad (8.57)$$

Данная конечно-разностная схема имеет второй порядок точности на гладких решениях, однако является неконсервативной.

8.4.3. Консервативный метод характеристик с интерполяцией

Данный метод предложен и исследован в работе (Никифорова А.В. и др., 1972).

В случае плоского слоя задача решается особенно просто, поскольку нет необходимости в интерполяции. Для отрицательных и положительных значений μ_m на сетке ω_μ соответственно используются следующие формулы:

$$J_{i,m} = J_{i+1,m} \exp\left(-\kappa_{i+1/2} \frac{r_i - r_{i+1}}{\mu_m}\right) + \kappa_{i+1/2} J_{b,i+1/2} \left[1 - \exp\left(-\kappa_{i+1/2} \frac{r_i - r_{i+1}}{\mu_m}\right)\right], \mu_m < 0; \quad (8.58)$$

$$J_{i,m} = J_{i-1,m} \exp\left(-\kappa_{i+1/2} \frac{r_i - r_{i-1}}{\mu_m}\right) + \kappa_{i-1/2} J_{b,i-1/2} \left[1 - \exp\left(-\kappa_{i-1/2} \frac{r_i - r_{i-1}}{\mu_m}\right)\right], \mu_m > 0. \quad (8.59)$$

Достоинства данного метода проявляются при решении задач в криволинейных системах координат.

В случае одномерной цилиндрической геометрии решается уравнение переноса вида

$$\sqrt{1-\gamma^2} \left(\mu \frac{\partial J}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial J}{\partial \mu} \right) + \kappa J = \kappa J_b, \quad (8.60)$$

где $\gamma = \cos\varphi$ (рис. 8.4).

Расчетная сетка вводится не только по r и μ , но также и по γ

$$\omega_\gamma = \{\gamma_k, k = \overline{1, N_k}; \Delta\gamma_k = \gamma_k - \gamma_{k-1}\}.$$

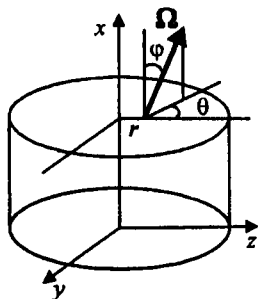


Рис.8.4. Геометрия цилиндрической области

Конечно-разностная схема формулируется в виде аналогичном характеристической схеме с интерполяцией

$$J_{i,m,k} = \tilde{J} \exp \left(-\kappa_{i+1/2} \frac{x_{i,m} - \bar{x}_{i,m}}{\sqrt{1-\gamma_k^2}} \right) + \kappa_{i+1/2} J_{b,i+1/2} \left[1 - \exp \left(-\kappa_{i+1/2} \frac{x_{i,m} - \bar{x}_{i,m}}{\sqrt{1-\gamma_k^2}} \right) \right], \mu_m \leq 0; \quad (8.61)$$

$$J_{i,m,k} = \tilde{J} \exp \left(-\kappa_{i-1/2} \frac{x_{i,m} - \bar{x}_{i,m}}{\sqrt{1-\gamma_k^2}} \right) + \kappa_{i-1/2} J_{b,i-1/2} \left[1 - \exp \left(-\kappa_{i-1/2} \frac{x_{i,m} - \bar{x}_{i,m}}{\sqrt{1-\gamma_k^2}} \right) \right], \mu_m > 0, \quad (8.62)$$

где величина \tilde{J} определяется по интерполяционным формулам, аналогичным (8.50), (8.51) и (8.56), (8.57); координаты узловых точек определяются по формулам (8.47), (8.48) и (8.53), (8.54).

Используется следующий алгоритм:

1) сначала уравнение (8.60) решается при $\mu_{m=1} = -1$. Расчет для каждого узла сетки по радиусу проводится в порядке уменьшения индекса $i = N_i - 1, N_i - 2, \dots, 1$;

2) производится последовательный расчет искомой функции в порядке увеличения индекса $m = 1, 2, 3, \dots, [(N_m + 1)/2] - 1$, причем для каждого μ_m последовательность расчетов по индексу i сохраняется;

3) при достижении значения индекса $m = (N_m + 1)/2$ решается уравнение переноса при $\mu = 0$;

4) расчеты интенсивности излучения при положительных значениях косинуса $\mu_m > 0$ проводятся в порядке возрастания индекса i .

8.5. S_n -метод

Метод предложен в работе (Карлсон Б., Бем Д.Ж., 1958) и подробно исследован в работах (Марчук Г.И., Лебедев В.И., 1981; Трощев В.Е. и др., 1968; Четверушкин Б.Н., 1985).

8.5.1. Применение S_n -метода для решения одномерных задач

Уравнение переноса излучения формулируется в форме, предложенной Самарским А.А. и Гольдиным В.В. для сферически-симметричной одномерной задачи переноса

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mu J) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{r} J \right) + \kappa J = \kappa J_b. \quad (8.63)$$

Для численного решения вводится конечно-разностная сетка

$$\varpi_r = \{r_i, i = \overline{1, N_i}; \Delta r_i = r_{i+1} - r_i\},$$

$$\varpi_\mu = \left\{ \mu_m, m = \overline{1, N_m}; \Delta \mu = h_\mu = \mu_{m+1} - \mu_m; \mu_{\frac{N_m+1}{2}} = 0, N_m = 2k + 1 \right\}.$$

Разностная схема строится для расчетной ячейки $V_{i,m}$, образованной соседними сеточными узлами (рис. 8.5). В диапазоне $[r_i, r_{i+1}]$ свойства среды полагаются постоянными.

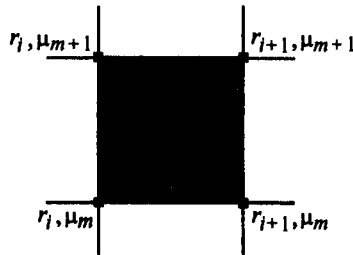


Рис. 8.5. Расчетная ячейка в области пространственно-угловых переменных

К уравнению (8.63) применим интегральный оператор

$$\Lambda \{ \} = \int_{\mu_m}^{\mu_{m+1}} d\mu \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 \{ \} dr, \quad (8.64)$$

в результате чего получится следующее уравнение:

$$r_{i+1}^2 \int_{\mu_m}^{\mu_{m+1}} \mu J(r_{i+1}, \mu) d\mu - r_i^2 \int_{\mu_m}^{\mu_{m+1}} \mu J(r_i, \mu) d\mu +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 - \mu_{m+1}^2\right) \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(r, \mu_{m+1}) r dr - \left(1 - \mu_m^2\right) \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(r, \mu_m) r dr + \\
& + \kappa_{i,m} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 dr \int_{\mu_m}^{\mu_{m+1}} J d\mu = \kappa_i J_{b,i} \Delta\mu_m \frac{r_{i+1}^3 - r_i^3}{3}. \quad (8.65)
\end{aligned}$$

Зависимость интенсивности излучения от угловой и пространственной переменным вводится следующим образом:

$$J(r, \mu) = \frac{(\mu_{m+1} - \mu) f_m + (\mu - \mu_m) f_{m+1}}{\Delta\mu_m}, \quad (8.66)$$

где $f_m = \frac{(r - r_i) J_{i+1,m} + (r_{i+1} - r) J_{i,m}}{\Delta r_i}$, $J_{i,m} = J(r_i, \mu_m)$. (8.67)

При подстановке интерполяционной формулы (8.66) в (8.65) получается четырехточечное конечно-разностное соотношение вида

$$A_{i,m} J_{i+1,m+1} + B_{i,m} J_{i,m+1} + C_{i,m} J_{i+1,m} + D_{i,m} J_{i,m} = F_{i,m}, \quad (8.68)$$

где $F_{i,m} = \frac{1}{3} \kappa_i J_{b,i} \Delta\mu_m (r_{i+1}^3 - r_i^3)$,

коэффициенты $A_{i,m}$, $B_{i,m}$, $C_{i,m}$, $D_{i,m}$ выражаются через координаты узлов конечно-разностной сетки и усредненный в ячейке коэффициент поглощения κ_i .

Алгоритм расчета с использованием формулы (8.68) аналогичен методу характеристик с интерполяцией.

8.5.2. Применение S_n -метода для решения двумерных задач

В двумерной постановке в прямоугольной декартовой системе координат уравнение переноса имеет вид (рис. 8.6)

$$\sqrt{1 - \gamma^2} \left(\mu \frac{\partial J}{\partial x} + \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial J}{\partial y} \right) + \kappa J = \kappa J_b, \quad (8.69)$$

где $\mu = \cos\theta$, $\gamma = \cos\varphi$.

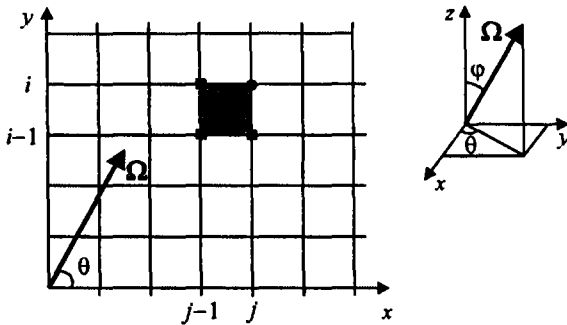


Рис. 8.6. Расчетная область в двумерной геометрии

Для конечно-разностного решения уравнения (8.69) вводятся следующие разностные сетки:

$$\varpi_x = \{x_j, j = 1, 2, \dots, N_j; \Delta x_j = x_j - x_{j-1}\},$$

$$\varpi_y = \{y_i, i = 1, 2, \dots, N_i; \Delta y_i = y_i - y_{i-1}\},$$

$$\varpi_\mu = \{\mu_m, m = 1, 2, \dots, N_m; \Delta \mu = \mu_m - \mu_{m-1}; \mu_1 = 1\},$$

$$\varpi_\gamma = \{\gamma_k, k = 1, 2, \dots, N_k; \Delta \gamma_k = \gamma_k - \gamma_{k-1}; \gamma_1 = 1\}.$$

При фиксированных значениях μ_m и γ_m уравнение (8.69) интегрируется по объему элементарной расчетной ячейки (см. рис. 8.6), в результате чего получается следующее разностное соотношение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt{1 - \gamma_k^2} \mu_m (J_{i,j} - J_{i,j-1} + J_{i-1,j} - J_{i-1,j-1}) \Delta y_i + \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \gamma_k^2} \sqrt{1 - \mu_m^2} (J_{i,j-1} - J_{i-1,j-1} + J_{i,j} - J_{i-1,j}) \Delta x_j + \\ & + \frac{\Delta x_j \Delta y_i}{4} \kappa_{i,j} (J_{i,j} + J_{i,j-1} + J_{i-1,j-1} - J_{i-1,j}) = \\ & = \Delta x_j \Delta y_i \kappa_{i,j} J_{b,i,j}, \quad (8.70) \end{aligned}$$

$$i = 2, 3, \dots, N_i, j = 2, 3, \dots, N_j.$$

Расчет по схеме (8.70) начинается от границ, на которых задана интенсивность падающего на объем излучения. Например, если граничное условие задано при $x = y = 0$, то из формулы (8.70) по трем значениям функций можно найти величину $J_{i,j}$ (на рис. 8.6 узлы сетки, в которых известна интенсивность, помечены квадратиками, а узел, в котором ищется интенсивность — кружочком).

8.5.3. DS_n -метод

Об алгоритме использования DS_n -метода применительно к двумерной геометрии сообщается в работах (Марчук Г.И., Лебедев В.И., 1981; Четверушкин Б.Н., 1985). Отличие DS_n -метода от S_n -метода состоит в том, что интенсивность излучения определяется не в узлах расчетной сетки, а в серединах расчетных ячеек. На рис. 8.7 изображена элементарная расчетная ячейка, на гранях которой показаны известные значения интенсивности (квадратики) и обозначены определяемые значения интенсивности (кружочки).

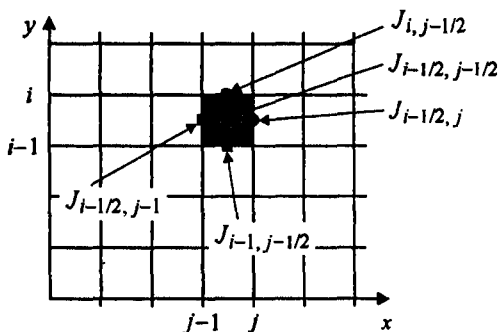


Рис. 8.7. Интенсивности излучения на гранях и в центре ячейки

Уравнение переноса вида (8.69) также интегрируется по объему ячейки, но конечно-разностное уравнение формулируется несколько в ином виде, чем (8.70):

$$\sqrt{1 - \gamma_k^2} \mu_m (J_{i-1/2,j} - J_{i-1/2,j-1}) \Delta y_i +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{1 - \gamma_k^2} \sqrt{1 - \mu_m^2} (J_{i,j-1/2} - J_{i-1,j-1/2}) \Delta x_j + \\
 & + \kappa_{i,j} J_{i-1/2,j-1/2} \Delta x_j \Delta y_i = \kappa_{i,j} J_{b,i,j} \Delta x_j \Delta y_i, \quad (8.71) \\
 & i = 2, 3, \dots, N_i, \quad j = 2, 3, \dots, N_j,
 \end{aligned}$$

где $J_{i-1/2,j-1/2}$ — интенсивность в центре расчетной ячейки.

Связывая интенсивность в центре расчетной ячейки с интенсивностями на гранях по интерполяционным формулам следующего вида:

$$\begin{aligned}
 J_{i-1/2,j-1/2} &= a J_{i-1/2,j} + (1-a) J_{i-1/2,j-1}, \\
 J_{i-1/2,j-1/2} &= b J_{i,j-1/2} + (1-b) J_{i-1,j-1/2}, \quad (8.72)
 \end{aligned}$$

где

$$a = \frac{x_c - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, \quad b = \frac{y_c - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}},$$

можно исключить из уравнения (8.71) неизвестные интенсивности на верхней и правой гранях и сформулировать его относительно $J_{i-1/2,j-1/2}$.

На заключительном этапе расчетов по найденной интенсивности в центре расчетной ячейки и известных значениях интенсивности на левой и нижней гранях, с использованием (8.72) находятся интенсивности на правой и верхней гранях. Конечно-разностная схема DS_n -метода при $a = b = 0.5$ называется *ромбической*.

Расчеты по изложенному алгоритму проводятся для всех узловых значений μ_m и γ_k , после чего определяются интегральные по угловым переменным функции радиационного переноса.

8.6. Методы непосредственного численного интегрирования угловой зависимости интенсивности излучения

Суть этих методов состоит в том, что для отыскания интенсивности излучения в любой наперед заданной точке расчетной области, производится испускание из этой точки лучей, для каж-

дого из которых находится формальное решение уравнения переноса (см. п. 3.2). При отсутствии рассеяния это формальное решение является точным решением уравнения переноса вдоль луча, выраженном в интегральном виде. С использованием формул численного интегрирования искомое решение для интенсивности излучения находится без принципиальных трудностей, хотя при этом необходимо учитывать особенность интегрирования на оптически толстых расчетных интервалах (см. п. 3.2, задача 2; Лосев С.А. и др., 1990; Чарахчьян А.А., 1976). Выбор пространственных направлений, в которых испускаются лучи, производится с учетом особенностей решаемой задачи. При этом, конечно, могут применяться и формализованные алгоритмы, например, использующие гауссовы квадратуры (см. метод дискретных ординат).

При увеличении числа лучей, испускаемых из каждой пространственной расчетной точки, решение должно сходиться к точному значению интеграла по угловым переменным. Указанный метод получил название *метода дискретных направлений* (МДН) или *Ray-Tracing Method*.

Подчеркнем, что отличительной чертой методов непосредственного численного интегрирования является использование формул формального решения уравнения переноса вдоль луча. Этот факт приобретает особое значение при решении уравнения переноса селективного теплового излучения с учетом спектральных линий атомов и молекул. Вычислительный алгоритм, основанный на совместном использовании метода дискретных направлений и различных моделей полос атомных и молекулярных линий, оказывается весьма эффективным (Суржиков С.Т., 1992, 1993). Подробно этот алгоритм рассмотрен в главе 14.

Алгоритм метода дискретных направлений рассмотрим на примере расчета радиационных потоков к поверхности космического аппарата сложной формы, входящего в плотные слои атмосферы (рис. 8.8). Для того чтобы рассчитать плотности радиационного теплового потока, к элементу поверхности вводится локальная сферическая система координат с нормалью \mathbf{n} . В этой системе координат каждый луч Ω определяется двумя угловыми координатами: углом широты $\theta \in [0, \pi/2]$ и азимутальным углом

$\varphi \in [0, 2\pi]$. Плотность спектрального радиационного потока на поверхности определяется по формуле

$$W(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} J(\mathbf{r}, \Omega) \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad (8.73)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки на поверхности в лабораторной системе координат; $J(\mathbf{r}, \Omega)$ – спектральная интенсивность излучения, соответствующая лучу Ω .

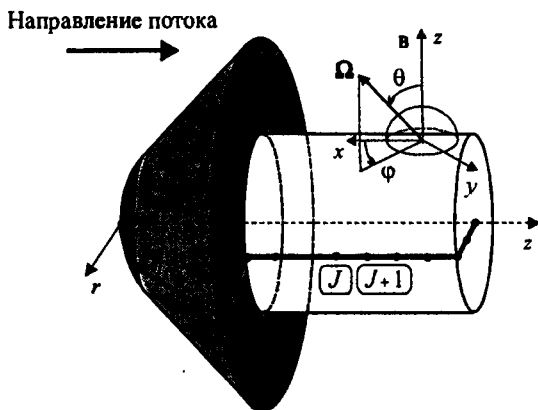


Рис. 8.8. Схема космического аппарата

Введение расчетной сетки угловых направлений позволяет провести интегрирование спектральной интенсивности излучения на поверхности по пространству угловых переменных и найти спектральную плотность потока

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{N_\varphi-1} (\varphi_{m+1} - \varphi_m) \sum_{n=1}^{N_\theta-1} J(\Omega_{m,n}) \times (\sin \theta_{n+1} \cos \theta_{n+1} - \sin \theta_n \cos \theta_n) (\theta_{n+1} - \theta_n) \quad (8.74)$$

или

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{N_\varphi-1} (\varphi_{m+1} - \varphi_m) \sum_{n=1}^{N_\theta-1} J(\Omega_{m,n}) \frac{(\cos^2 \theta_{n+1} - \cos^2 \theta_n)}{2}, \quad (8.75)$$

где N_φ, N_θ – числа дискретных угловых направлений.

Направляющие косинусы вектора

$$\Omega_{m,n} = (\omega_x)_{m,n} \mathbf{i} + (\omega_y)_{m,n} \mathbf{j} + (\omega_z)_{m,n} \mathbf{k}$$

рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} (\omega_z)_{m,n} &= \bar{\mu}_n, \\ (\omega_x)_{m,n} &= \sqrt{1 - \bar{\mu}_n^2} \cdot \cos \bar{\varphi}_m, \\ (\omega_y)_{m,n} &= \sqrt{1 - \bar{\mu}_n^2} \cdot \sin \bar{\varphi}_m, \end{aligned} \quad (8.76)$$

$$\text{где } \bar{\mu}_n = \frac{1}{2}(\mu_n + \mu_{n+1}); \quad \mu_n = \cos \theta_n; \quad \bar{\varphi}_n = \frac{1}{2}(\varphi_n + \varphi_{n+1}). \quad (8.77)$$

Ось z системы координат угловых направлений совпадает с локальной нормалью к поверхности.

Для того чтобы определить величину $J(\Omega_{m,n})$, необходимо проинтегрировать уравнение переноса вдоль неоднородного оптического луча. Здесь целесообразно воспользоваться формальным решением уравнения переноса следующего вида:

$$J(\tau) = \int_0^\tau J_b(\tau') \exp[-(\tau - \tau')] d\tau', \quad (8.78)$$

где $s=0$ и $s=L$ начальная (на поверхности) и конечная (на внешней границе расчетной области) координаты отрезка луча $\Omega_{m,n}$, вдоль которого проводится интегрирование уравнения (8.78).

Конечно-разностная сетка по пространственной переменной s , с использованием которой проводится численное интегрирование (8.78), находится для каждого луча $\Omega_{m,n}$. С этой целью отыскиваются координаты пересечения в лабораторной системе координат луча $\Omega_{m,n}$ со всеми встречающимися на его пути поверхностями конечно-разностной сетки, начиная от первой точки (на

поверхности, $s = 0$) и кончая последней точкой (на внешней границе расчетной области или на сопряженной поверхности, $s = L$). Этот алгоритм иллюстрируется графически на рис. 8.9 (луч а). Заметим, что для определения координат пересечения следует использовать соотношения аналитической геометрии. Однако такой алгоритм оказывается неэкономичным применительно к криволинейным (а особенно – неструктурированным) расчетным сеткам.

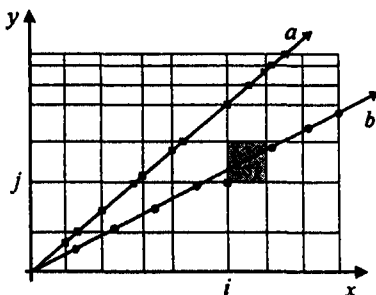


Рис. 8.9. Два способа введения расчетной сетки вдоль луча

В работе (Surzhikov S.T., 2004 (a)) применен алгоритм *кваслучайной выборки* координат расчетной сетки. Этот алгоритм состоит в следующем. Отрезок луча с направляющим вектором $\Omega_{m,n}$, заключенный между первой и последней точками, делится на $N_s - 1$ одинаковых участков, как это показано на рис. 8.9 (луч b). Очевидно, что требование однородности расчетной сетки на участке $s \in [0, L]$ необязательно для используемого алгоритма. Хорошо работает также алгоритм случайной выборки координат точек вдоль луча. Затем для каждого узла расчетной сетки вдоль луча $\Omega_{m,n}$ отыскивается ближайший узел пространственной расчетной сетки (или ячейка, которой принадлежит этот узел), на которой заданы теплофизические и оптические свойства среды. Температура и спектральный коэффициент поглощения найденного узла (или ячейки) присваиваются текущему узлу расчетной сетки вдоль луча. Таким образом, в каждом узле расчетной сетки вдоль луча $\Omega_{m,n}$ становятся известными температура и оптические свойства газа.

Численное интегрирование формального решения уравнения переноса (8.78) производится по формуле

$$J(\tau_{NS}, \Omega_{m,n}) = \exp(-\tau_{NS}) \left\{ \sum_{k=1}^{N_S-1} \bar{J}_{b,k} \exp(\tau_k) [\exp(\tau_{k+1} - \tau_k) - 1] \right\},$$

$$\bar{J}_{b,k} = \frac{(J_{b,k} + J_{b,k+1})}{2}, \quad \tau_l = \sum_{i=1}^{l-1} \frac{(\kappa_i + \kappa_{i+1})}{2} (s_{i+1} - s_i), \quad (8.79)$$

$$l = 1, \dots, N_S,$$

где $\bar{J}_{b,k}$ – спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела, рассчитанная по температуре отрезка $[s_k, s_{k+1}]$.

В заключение подчеркнем, что метод дискретных направлений выгодно отличается от ранее рассмотренных методов дискретных ординат, характеристических методов, S_n и DS_n -методов возможностью численного интегрирования уравнения переноса излучения в задачах с произвольной геометрией с учетом линейчатой структуры спектра посредством статистических моделей. В последнем случае, уравнение переноса излучения аналитически интегрируется по спектру электромагнитного излучения в спектральных группах вдоль каждого из выделенных направлений. Дополнительные затраты компьютерного времени на расчеты по несколько усложненным формулам (см. главу 14) многократно окупаются тем, что вместо сотен и тысяч спектральных точек внутри каждого спектрального диапазона, расчет производится сразу для всего спектрального диапазона, то есть как бы для одной спектральной точки.

Главным недостатком метода дискретных направлений, по сравнению с упомянутыми методами, является его относительно большая трудоемкость, обусловленная необходимостью введения большого числа лучей, вдоль которых производится интегрирование уравнения переноса. Однако, с внедрением в практику расчетов параллельных компьютерных технологий, этот недостаток легко преодолевается распараллеливанием вычислительных процессов не только по спектральным группам, но и по дискретным направлениям. Обоснованием эффективности такого распараллеливания является независимость вычислительных процедур, как

для отдельных спектральных диапазонов, так и отдельных направлений.

Результаты расчетов плотности радиационных тепловых потоков вдоль поверхности космического аппарата (КА) MSRO (Mars Sampler Return Orbiter) показаны на рис. 8.10 (Surzhikov S.T., 2004 (a)). Решалась задача о входе КА MSRO в атмосферу Марса со скоростью $V_\infty = 5.223$ км/с.

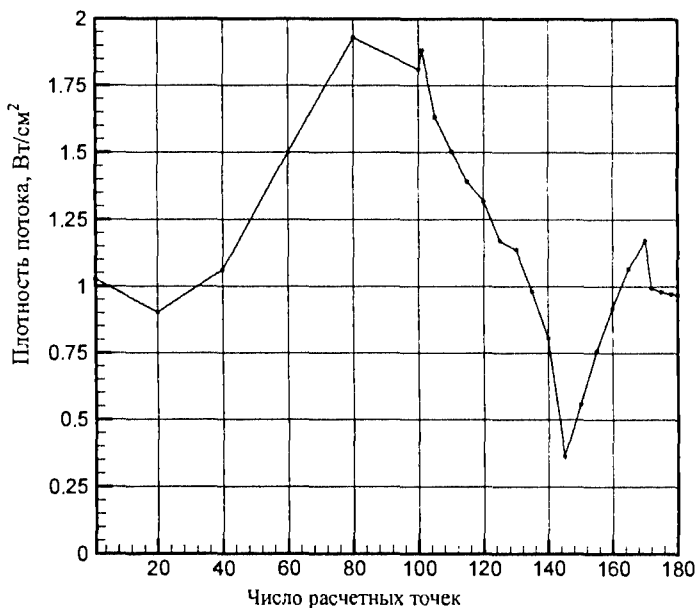


Рис. 8.10. Распределение плотности интегрального радиационного потока вдоль поверхности MSRO от передней до задней критической точки. Параметры газа в набегающем потоке: $\rho_\infty = 2.93 \times 10^{-7}$ г/см³, $p_\infty = 78.7$ эрг/см³, $V_\infty = 5223$ м/с, $T_\infty = 140$ К. Атмосфера Марса моделировалась смесью газов 97% CO₂ – 3% N₂ (объемные доли). Число спектральных групп $N_g = 42$, число расчетных точек вдоль каждого луча $N_s = 100$, число угловых направлений по широте и азимуту $N_\theta = 11$, $N_\phi = 11$

Для получения указанных распределений использовался радиационно-газодинамический программный код, разработанный в работе (Surzhikov S.T., 2004 (a)). Последовательно интегрировались системы двумерных нестационарных уравнений Навье–Стокса, химической кинетики и радиационного переноса. Решалась задача о входе КА MSRO в атмосферу Марса со скоростью

$V_\infty = 5.223$ км/с. Рассчитанное температурное поле представлено на рис. 8.11. Параметры выбранной точки траектории даны в подписочных подписях. Расчет производился на 42-х спектральных участках (в 42-х спектральных группах).

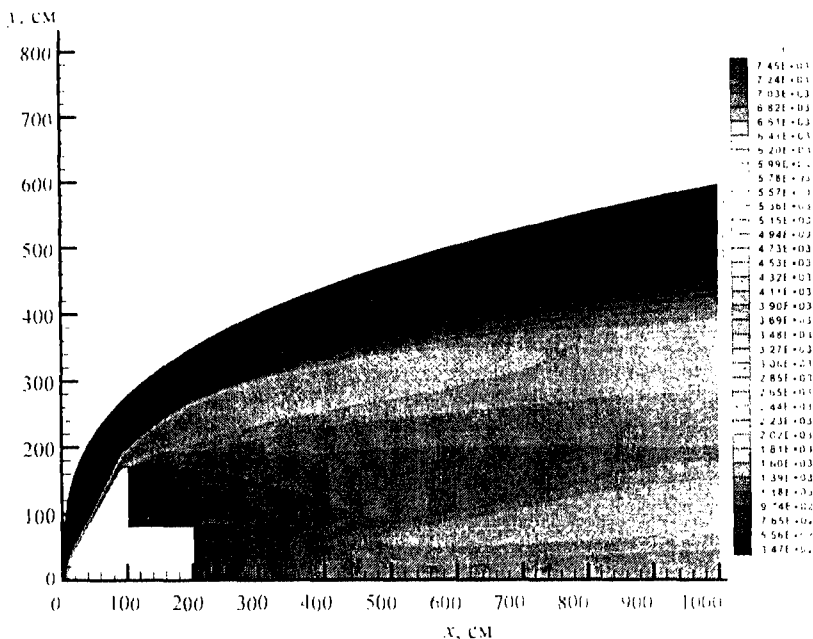


Рис. 8.11. Распределение температуры (K) в ударном слое и следе за космическим аппаратом MSRO. Параметры газа в набегающем потоке: $\rho_\infty = 2.93 \times 10^{-7}$ г/см³, $p_\infty = 78.7$ эрг/см³, $V_\infty = 5223$ м/с, $T_\infty = 140$ К. Атмосфера Марса моделировалась смесью газов 97% CO₂ – 3% N₂ (объемные доли)

На рис. 8.12 показано распределение номеров точек вдоль поверхности MSRO, в которых производился расчет интегральных радиационных потоков. Используя данный график легко установить, что плотность интегрального радиационного теплового потока ~ 1.9 Вт/см² отвечает 80-й точке (см. рис. 8.10) и осевой координате лобовой поверхности ~ 70 см (см. рис. 8.11). Первая точка соответствует передней критической точке, а 180-я точка – задней критической точке.

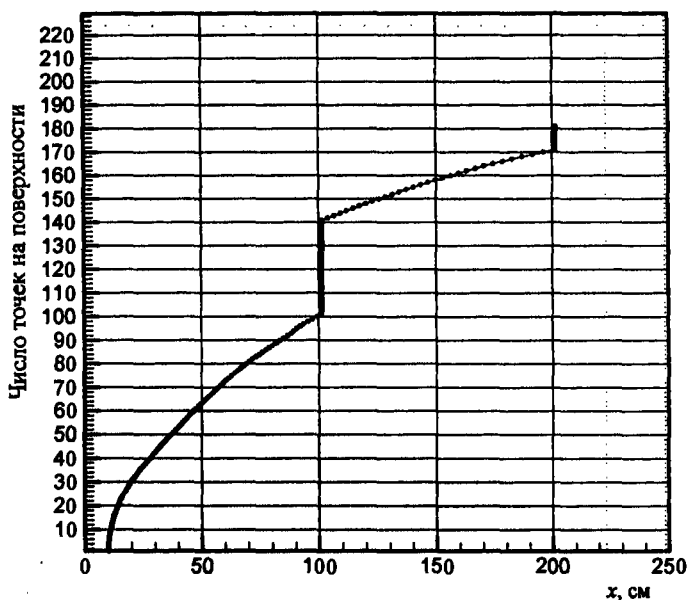


Рис. 8.12. Соответствие номера расчетной точки ее продольной координате на поверхности космического аппарата

В качестве еще одного примера использования метода дискретных направлений рассмотрим задачу определения плотности радиационных тепловых потоков на внутренней поверхности канала цилиндрической геометрии, на оси симметрии которого имеется излучающая плазменная область. Эта задача рассматривалась ранее (см. п. 6.3, рис. 6.5 и 6.15) и, как уже отмечалось, может быть использована как тестовая.

Распределение плотностей радиационных тепловых потоков вдоль внутренней поверхности цилиндрической камеры для сферической излучающей области показано на рис. 8.13 (коэффициент поглощения $\kappa = 0.1 \text{ см}^{-1}$; $N_\theta = N_\varphi = 11$) и на рис. 8.14 ($\kappa = 1 \text{ см}^{-1}$). На этих же рисунках приведены результаты расчетов по P_1 -приближению метода сферических гармоник. Представленные данные иллюстрируют влияние оптической толщины на плотность радиационных тепловых потоков и позволяют оценить относительные погрешности используемых методов.

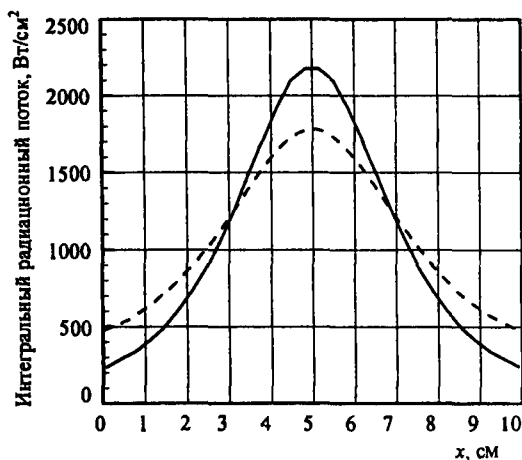


Рис. 8.13. Распределение плотностей радиационных тепловых потоков вдоль внутренней поверхности цилиндрического канала: $\kappa = 0.1 \text{ см}^{-1}$; распределение температуры показано на рис. 6.5; сплошная кривая – расчет методом дискретных направлений, штриховая кривая – P_1 -приближение метода сферических гармоник

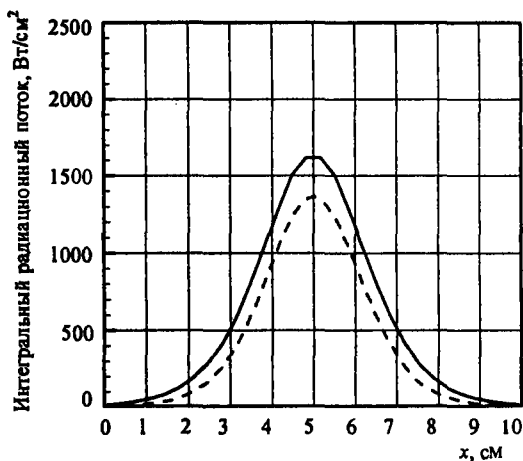


Рис. 8.14. Распределение плотностей радиационных тепловых потоков вдоль внутренней поверхности цилиндрического канала: $\kappa = 1 \text{ см}^{-1}$; распределение температуры показано на рис. 6.5; сплошная кривая – расчет методом дискретных направлений, штриховая кривая – P_1 -приближение метода сферических гармоник

Аналогичные результаты расчетов для эллипсоидального распределения температуры в цилиндрическом канале показано на рис. 8.15 и 8.16.

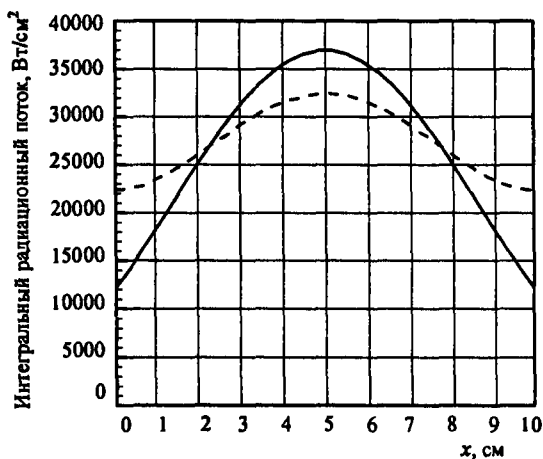


Рис. 8.15. Распределение плотностей радиационных тепловых потоков вдоль внутренней поверхности цилиндрического канала: $\kappa = 0.1 \text{ см}^{-1}$; распределение температуры показано на рис. 6.15; сплошная кривая – расчет методом дискретных направлений, штриховая кривая – P_1 -приближение метода сферических гармоник

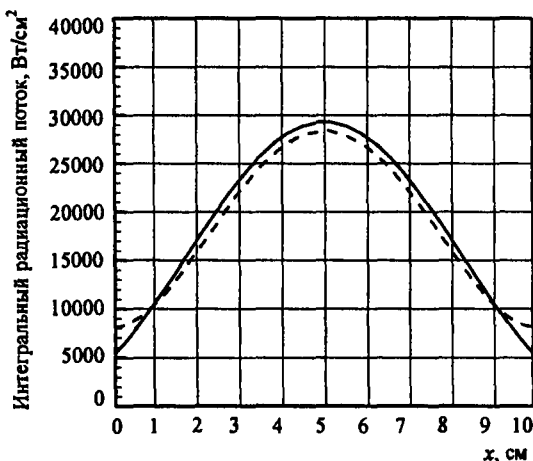


Рис. 8.16. Распределение плотностей радиационных тепловых потоков вдоль внутренней поверхности цилиндрического канала: $\kappa = 1 \text{ см}^{-1}$; распределение температуры показано на рис. 6.15; сплошная кривая – расчет методом дискретных направлений, штриховая кривая – P_1 -приближение метода сферических гармоник

Следует иметь в виду, что использование метода дискретных направлений для решения задач переноса теплового излучения в областях с локализованными источниками излучения, необходимо особенно тщательно выбирать сетки по угловым переменным и вдоль каждого рассчитываемого луча. Здесь необходима оптимизация расчетных алгоритмов.

Эти алгоритмы должны, с одной стороны, учитывать специфику неоднородности расчетной области, а с другой стороны, являться как можно более экономичными. Конечно, простейшим решением этой задачи является задание большого числа угловых направлений и подробной расчетной сетки вдоль луча. Однако это приведет к чрезмерным затратам расчетного компьютерного времени. Весьма эффективными являются алгоритмы предварительного анализа наиболее предпочтительных направлений расчета распространения излучения и построения расчетной сетки вдоль луча, основанной на поведении оптических толщин вдоль луча. Например, шаг такой расчетной сетки может выбираться из условия равенства оптической толщины каждой расчетной ячейки фиксированной величине.

ГЛАВА 9

ПОТОКОВЫЕ МЕТОДЫ

К этой группе относятся методы аппроксимации угловой зависимости интенсивности излучения не в полном телесном угле, а в некоторой его части. Выбор диапазона изменения угловых переменных, в котором производится указанная аппроксимация, диктуется решаемой задачей. Наиболее наглядным является использование таких методов в задачах о плоском слое, где полный телесный угол разделяется на сумму двух полусфер, в пределах каждой из которых применяется своя аппроксимация угловой зависимости интенсивности. Простейшим из потоковых методов применительно к плоскому слою является метод Шварцшильда—Шустера (см. п. 5.2.2).

Обобщение потоковых методов в форме так называемого *тензорного приближения* было выполнено в работе (Адрианов В.Н., 1972). В этом методе используется тензорное представление вектора плотности потока излучения, используемое в задачах астрофизики (Амбарцумян В.А., 1934; Росселанд С., 1936). Уравнения метода тензорного приближения получаются путем интегрирования уравнения переноса излучения, предварительно умноженного на некоторые весовые функции по всему телесному углу. В качестве этих весовых функций выбираются направляющие косинусы вектора Ω . Так же как и в других подобных методах, здесь возникает проблема замыкания получающейся бесконечной системы дифференциальных уравнений. С этой целью формулируются дополнительные условия, связывающие компоненты тензора теплового излучения. Метод оказывается весьма удобным для прямоугольной декартовой системы координат. Од-

нако его использование в случае криволинейных геометрий представляется проблематичным и требует дальнейших исследований.

Потоковые методы обладают двумя важными преимуществами, отличающими их от других методов:

- 1) адекватностью описания граничных условий (внешнего по отношению к исследуемому объему излучения);
- 2) удобством введения усредненных по спектру эффективных коэффициентов поглощения.

9.1. Методы модифицированных сферических гармоник.

DP_N-методы

Наиболее детально метод модифицированных сферических гармоник (DP_N-метод) исследован в работе (Галишев В.С., 1980). Несмотря на то, что в 50-х годах этот метод был предложен и исследован рядом авторов (Gerstl S.A.W., 1969, 1971; Mertens R., 1954; Yvon J., 1957; Ziering S., Schiff D., 1958), в литературе часто этот метод называется методом Ивона – Мертенсона (см., например, работу (Николайшвили Ш.С., 1966)).

Методу модифицированных сферических гармоник присущи две отличительные особенности:

1) интенсивность излучения в светорассеивающей среде представляется в виде суммы двух составляющих, одна из которых отвечает нерассеянному излучению, а другая – рассеянному;

2) интегрирование по угловым переменным при отыскании интенсивности, отвечающей рассеянному излучению, выполняется с использованием ее аппроксимации в виде ряда по модифицированным сферическим гармоникам. Другими словами, интенсивность рассеянного излучения разлагается в ряд по сферическим функциям, ортогональным не на полном телесном угле 4π , а на некоторой его части (в данном случае – в полусфере, т.е. на половине телесного угла). Заметим, что при решении задачи о переносе излучения в плоском слое модифицированные сферические гармоники совпадают с модифицированными полиномами Лежандра.

В работе (Галишев В.С., 1980) приводятся данные, свидетельствующие о более высокой точности DP_N -метода по сравнению с соответствующим P_N -методом для задачи о плоском слое (по точности сопоставимы DP_N - и P_{2N} -методы).

Обобщение DP_N -метода на двумерную геометрию выполнено в работах (Галишев В.С., 1980; Gerstl S.A.W., 1969, 1971; Schiff D. et al., 1960). Суть указанного обобщения состоит во введении двух угловых зон аппроксимации вдоль каждой из переменных. Например, для двумерной цилиндрической геометрии интенсивность излучения отдельно аппроксимируется в полусферах, соответствующих положительному и отрицательному направлениям осевой и радиальной переменных.

Применительно к решению задач переноса теплового излучения аналогичный метод рассмотрен в (Menguc M.P., Iyer R.K., 1988).

9.2. Метод полумоментов

Метод полумоментов предложен в работах (Sherman M.P., 1967; Ozisik M.N. et al., 1975). В первой из них задача переноса излучения решается в плоскопараллельной геометрии с постоянной функцией источников, а во второй формулируются системы уравнений (без их решения) в случаях плоской и сферической геометрий и изотропного рассеяния. В настоящем разделе рассмотрено получение полумоментных уравнений и численный метод решения их первого приближения.

Исходное уравнение переноса излучения запишем в виде (Ozisik M.N. et al., 1975), опустив индексы селективности

$$\begin{aligned} \pm \mu \frac{\partial J^\pm}{\partial r} \pm \alpha \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial J^\pm}{\partial \mu} + \beta J^\pm = \\ = J^{em} + \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^1 \gamma(\mu') [J^+(\mu') + J^-(\mu')] d\mu', \quad (9.1) \end{aligned}$$

где $\beta = \sigma + \kappa$; κ, σ - коэффициенты поглощения и рассеяния, $\gamma(\mu') = \gamma(\mu', \mu)$ - индикатриса рассеяния; J^{em} - излучательная способность элементарного физического объема, равная в услови-

ях ЛТР $J^{em} = \kappa \cdot J_b$; J_b – интенсивность излучения абсолютного черного тела; J^\pm – интенсивность излучения в положительном Ω^+ и отрицательном Ω^- направлениях; $\alpha = 0$ для плоского слоя и $\alpha = 1$ для сферы.

Граничные условия к (9.1) сформулируем в виде, соответствующем горячему газовому облаку сферической формы со свободной границей или плоскому излучающему слою вблизи твердой поверхности с обобщенными граничными условиями:

$$\begin{aligned} r=0, \quad J^+(r=0, \mu) &= [1 + (1-\alpha)(\rho_0 - 1)] J^-(r=0, \mu) + \\ &+ (1-\alpha) \varepsilon(r=0) J_b(r=0), \\ r=R, \quad J^-(r=R, \mu) &= J_b(r=R), \end{aligned} \quad (9.2)$$

где ρ_0 – полусферическая направленная отражательная способность, J_b – интенсивность внешнего по отношению к среде излучения.

При задании конкретного вида функции $\gamma(\mu, \mu')$ воспользуемся *транспортным приближением*, когда реальная индикатриса аппроксимируется изотропным и дельта-рассеянием

$$\gamma(\mu') = (1 - \bar{\mu}) + 2 \cdot \bar{\mu} \cdot \delta(\mu' - 1),$$

где $\bar{\mu}$ – средний косинус рассеяния, $\delta(\mu' - 1)$ – дельта-функция.

Получить расчетные соотношения можно и с другим видом функции $\gamma(\mu')$, допускающим разложение в ряд по μ' . Однако эти соотношения получаются более сложными и не вносят в решение нового качества.

Применим к уравнению (9.1) интегральный оператор вида

$$L_m = \int_0^1 \mu^m d\mu, \quad m=0, 1, 2, \dots, \text{ , в результате чего приходим к беско-$$

нечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \pm \frac{dM_{m+1}^\pm}{dr} \pm \frac{\alpha}{r} \left[(m+2) M_{m+1}^\pm + m M_{m-1}^\pm - \delta_{m0} J^\pm(\mu=0) \right] + \beta M_m^\pm = \\ = \frac{J^{em}}{m+1} + \frac{\sigma}{2(m+1)} \left\{ (1-\bar{\mu})(M_0^+ + M_0^-) + 2\bar{\mu} \left[J^+(\mu) + J^-(\mu) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\text{где } M_m^+ = \int_0^1 J^+ \mu^m d\mu, \quad M_m^- = \int_0^1 J^- \mu^m d\mu, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Система (9.3) незамкнута, и ее можно решить, лишь ограничив число уравнений $m = 0, 1, 2, \dots, N$. В этом случае говорят о N -м приближении метода полумоментов. Однако в уравнении любого приближения N обязательно присутствуют полумоментные характеристики следующего $(N+1)$ -го приближения. Чтобы исключить функции M_{N+1}^\pm необходимо привлечь какое-либо дополнительное условие, связывающее M_{N+1}^\pm со всеми предыдущими характеристиками. Такое замыкающее условие представим в виде

$$M_{N+1}^\pm = \sum_{n=0}^N C_n M_n^\pm, \quad (9.4)$$

что эквивалентно аппроксимации интенсивности излучения рядом

$$J^\pm = \sum_{n=0}^N a_n^\pm(r) \mu^n, \quad (9.5)$$

где C_n – коэффициенты, подлежащие определению; $a_n^\pm(r)$ – неизвестные функции координат.

Используя (9.4) в (9.3), можно получить систему уравнений для определения коэффициентов C_n

$$\frac{C_0}{(n+1)+0} + \frac{C_1}{(n+1)+1} + \dots + \frac{C_N}{(n+1)+N} = \frac{C_0}{(n+1)+N+1}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Оценки, сделанные в работе (Лосев С.А. и др., 1990), показывают, что N -е приближение метода полумоментов примерно соответствует по точности $2N$ -му приближению метода моментов (и сферических гармоник). Поэтому для решения задач переноса теплового излучения можно рекомендовать 1-е приближение метода полумоментов

$$\pm \frac{dM_0^\pm}{dr} + 6\beta M_0^\pm - 6\beta M_1^\pm \pm \frac{15\alpha}{r} (2M_1^\pm - M_0^\pm) = 3F,$$

$$\pm \frac{dM_1^\pm}{dr} + \beta M_0^\pm \pm \frac{4\alpha}{r} (2M_1^\pm - M_0^\pm) = F, \quad (9.6)$$

где
$$F = J^{em} + S,$$

$$S = \frac{\sigma}{2} \left[(1 - \bar{\mu}) (M_0^+ + M_0^-) + 4\bar{\mu} (3M_1^+ - M_0^+ + 3M_1^- - M_0^-) \right].$$

Рассмотрим итерационный метод решения уравнений (9.6). В системе (9.6) перейдем к оптической толщине $d\tau = \beta dr$ и введем эффективные функции источников

$$\begin{aligned} \pm \frac{dM_0^\pm}{d\tau} + 6M_0^\pm - 6M_1^\pm &= R_0^\pm, \\ \pm \frac{dM_{10}^\pm}{d\tau} + M_0^\pm &= R_1^\pm, \end{aligned} \quad (9.7)$$

где
$$R_0^\pm = \frac{3F \mp 15\alpha (2M_1^\pm - M_0^\pm)/r}{\beta}; \quad R_1^\pm = \frac{F \mp 4\alpha (2M_1^\pm - M_0^\pm)/r}{\beta}.$$

Решение данной системы для полумоментных характеристик имеет вид

$$\begin{aligned} M_n^+(\tau) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{m=2}^2 [\beta_m - n(1 + \beta_m)] \times \\ &\times \left\{ (-1)^m \int_{\tau}^0 [(6 + \beta_m) R_1^+(\tau') - R_0^+(\tau)] \times \right. \\ &\times \exp[\beta_m(\tau - \tau')] d\tau' - E_m^+ \exp(\beta_m \tau) \left. \right\}, \quad n = 0, 1; \end{aligned} \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned} M_n^-(\tau) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{m=1}^2 [\beta_m - n(1 + \beta_m)] \times \\ &\times \left\{ (-1)^m \int_{\tau}^{\tau_0} [(6 + \beta_m) R_1^-(\tau') - R_0^-(\tau)] \times \right. \\ &\times \exp[\beta_m(\tau' - \tau)] d\tau' - E_m^- \exp[\beta_m(\tau_0 - \tau)] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$n = 0, 1,$$

где $\beta_1 = -3 + \sqrt{3}$, $\beta_2 = -3 + \sqrt{3}$;

$$E_1^+ = \frac{(\sqrt{3} + 1) M_0^+(\tau = 0)}{4\sqrt{3}}; \quad E_2^+ = \frac{(\sqrt{3} - 1) M_0^+(\tau = 0)}{4\sqrt{3}};$$

$$M_0^+(\tau = 0) = \xi_\alpha M_0^-(\tau = 0) + \eta_\alpha J_b(\tau = 0);$$

$$\xi_\alpha = 1 + (1 - \alpha)(\rho_0 - 1); \quad \eta_\alpha = (1 - \alpha)\varepsilon(\tau = 0);$$

$$E_1^- = -J_b(r = R) \frac{5 + \sqrt{3}}{4\sqrt{3}}; \quad E_2^- = J_b(r = R) \frac{5 - \sqrt{3}}{4\sqrt{3}}.$$

Отметим, что при $\alpha = 1$ и $r \rightarrow 0$ вследствие изотропности излучения в центре сферы $2M_1^\pm = M_0^\pm$, поэтому слагаемые вида $(2M_1^\pm - M_0^\pm)/r$ в R_n^\pm следует полагать равными нулю.

Алгоритм решения задачи теперь состоит в организации последовательных итераций между функциями $M_n^+(\tau)$ и $M_n^-(\tau)$. Для рассматриваемых граничных условий вычислительный процесс целесообразнее начинать с расчета функций $M_n^-(\tau)$.

По результатам расчета функций M_n^\pm определяются проекция плотности потока излучения на ось r

$$W_r = 2\pi (M_1^+ - M_1^-), \quad (9.10)$$

а также дивергенция вектора лучистого потока в прямоугольной декартовой системе координат

$$\operatorname{div} W = 2\pi\beta \left[2J^{em} - (M_0^+ + M_0^-) \right], \quad (9.11)$$

и в сферической системе координат

$$\operatorname{div} W = 2\pi\beta \left[2J^{em} - (M_0^+ + M_0^-) \right] + \frac{4\pi\beta}{r(M_1^+ - M_1^-)}. \quad (9.12)$$

Следует иметь в виду, что введенные указанным образом полумоментные функции знакопостоянны во всей области определения

$$M_0^+ \geq 0, M_1^+ \geq 0, M_0^- \geq 0, M_1^- \geq 0,$$

что является важным свойством рассматриваемого потокового метода, специально используемым при решении задач переноса селективного теплового излучения (см. главу 13).

Результаты тестовых расчетов переноса излучения методом полумоментов для неоднородного плоского слоя, имитирующего ударный слой у поверхности космического аппарата, входящего в плотные слои атмосферы (см. рис. 5.5), представлены на рис. 9.1 – 9.5. Для сравнения с результатами расчетов по другим методам граничные условия и коэффициенты поглощения выбраны такими же, как в п.п. 5.2 и 6.1.

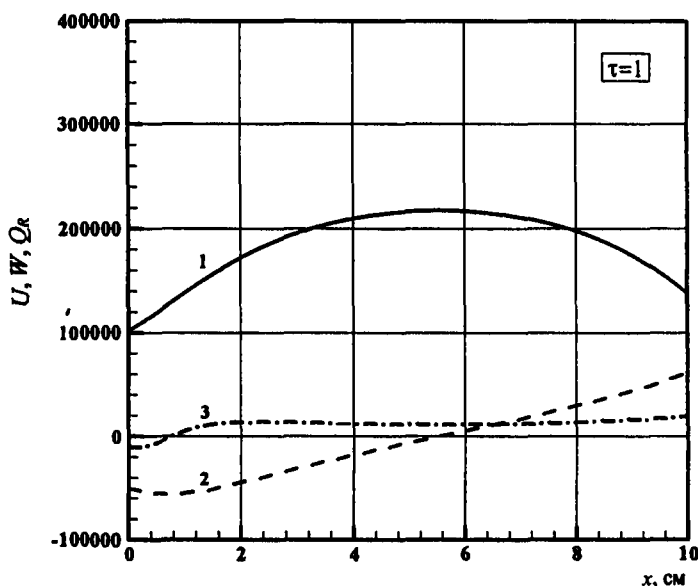


Рис. 9.1. Плотность радиационной энергии (1, U в Дж/см³), плотность радиационного теплового потока (2, W в Вт/см²) и дивергенция векторов плотности потока радиационной энергии (3, Q_R в Вт/см³) в плоском слое с оптической толщиной $\tau = 1$. Решение методом полумоментов для температурного распределения рис. 5.5

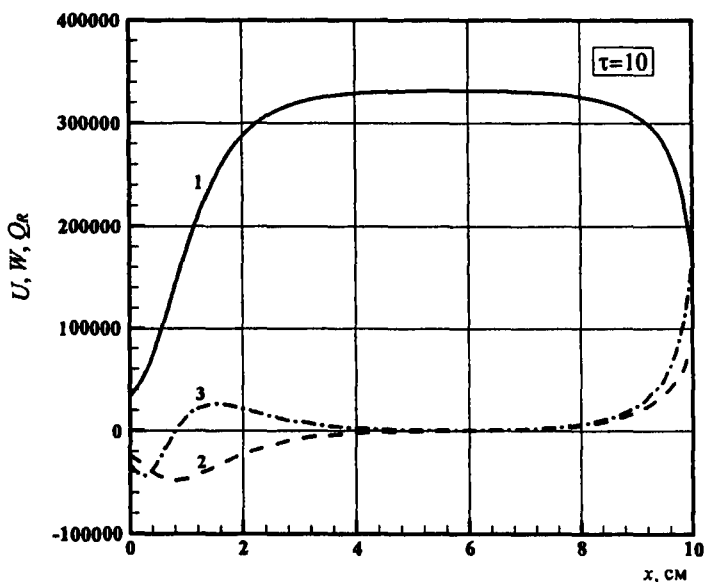


Рис. 9.2. Плотность радиационной энергии (1, U в Дж/см³), плотность радиационного теплового потока (2, W в Вт/см²) и дивергенция вектора плотности потока радиационной энергии (3, Q_R в Вт/см³) в плоском слое с оптической толщиной $\tau = 10$. Решение методом полумоментов для температурного распределения рис. 5.5

Расчеты переноса излучения проводились для нерассеивающего и светорассеивающего слоев. При отсутствии рассеяния излучения распределения радиационных характеристик в слое близки с погрешностью не более 3% результатам точных расчетов (п. 5.2). При этом время, необходимое для расчета примерно в сто раз меньше, чем при получении точного решения. Это различие в основном определяется необходимостью расчета интегро-экспоненциальных функций. Однако, если при точном решении уравнения переноса излучения в бесконечном плоском слое использовать предварительную табуляцию интегро-экспоненциальных функций, то времена расчета становятся сопоставимыми.

Расчетные данные, представленные на рис. 9.3–9.5, позволяют получить представление о влиянии процессов светорассеяния на распределение радиационных характеристик. Общая закономерность заключается в том, что с увеличением коэффициента

рассеяния плотность радиационной энергии в центральных областях расчетной области повышается, а на границах – снижается. Систематически снижаются также плотность полного радиационного потока и его дивергенция (см. последовательно рис. 9.3 – 9.5). Примечательно, что с увеличением коэффициента рассеяния резко возрастает число итераций решения системы уравнений (9.7). Указанные числа представлены в подрисуночных подписях. Сравнивая полученные решения с результатами расчетов по P_1 -приближению метода сферических гармоник для светорассеивающего слоя (см. п. 6.1), можно сделать заключение о близости получаемых распределений радиационных характеристик (кроме непосредственной близости от границ).

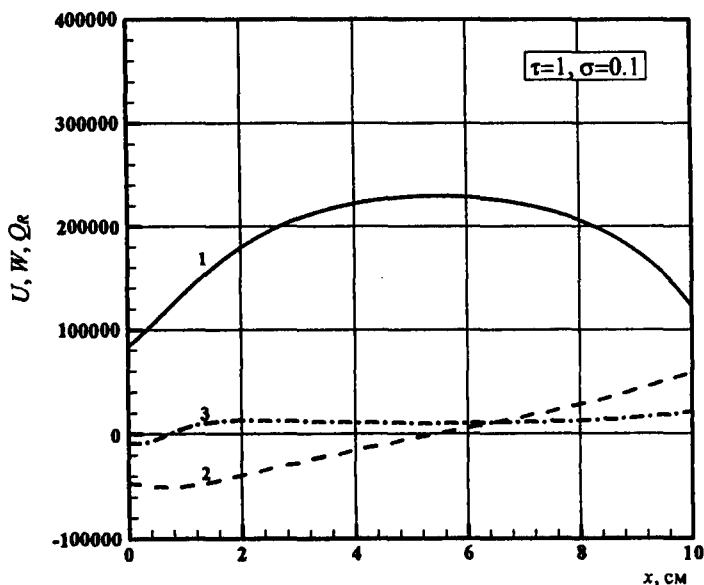


Рис. 9.3. Плотность радиационной энергии (1, U в Дж/см³), плотность радиационного теплового потока (2, W в Вт/см²) и дивергенция вектора плотности потока радиационной энергии (3, Q_R в Вт/см³) в плоском слое с оптической толщиной $\tau=1$ и коэффициентом рассеяния $\sigma=0.1$ см⁻¹. Решение методом полумоментов для температурного распределения рис. 5.5. Число итераций – 8

Однако следует иметь в виду, что численное решение по P_1 -приближению метода сферических гармоник оказывается су-

щественно более экономичным (в десятки раз). Это лишний раз подтверждает эффективность указанного метода для расчета переноса излучения в сильно рассеивающих средах, когда сглаживание угловой зависимости интенсивности излучения обусловлено физическими причинами.

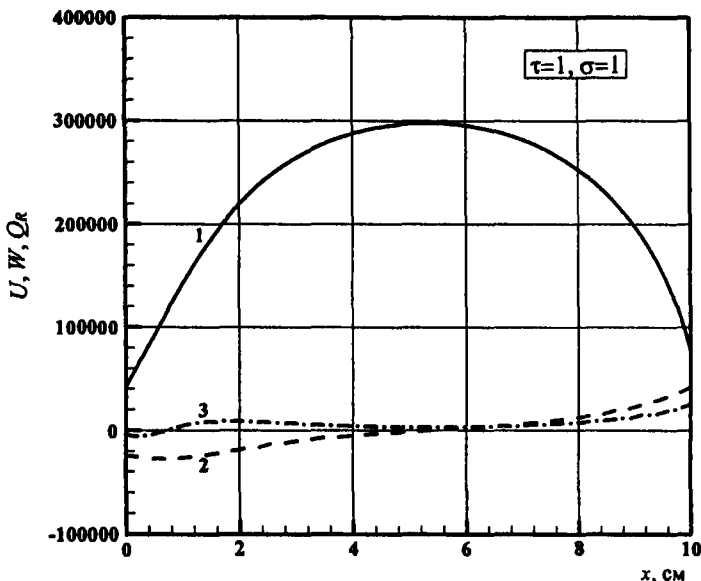


Рис. 9.4. Плотность радиационной энергии (1, U в Дж/см³), плотность радиационного теплового потока (2, W в Вт/см²) и дивергенция вектора плотности потока радиационной энергии (3, Q_R в Вт/см³) в плоском слое с оптической толщиной $\tau=1$ и коэффициентом рассеяния $\sigma=1$ см⁻¹. Решение методом m полумоментов для температурного распределения рис. 5.5. Число итераций — 35

Относительно итерационных методов решения задачи (9.8), (9.9) следует заметить, что изложенный алгоритм является наиболее простым, но, к сожалению, не самым эффективным. С увеличением вероятности светорассеяния, т.е. при стремлении альбедо однократного рассеяния $\tilde{\omega} = \sigma/\beta$ к единице, расчет по данному алгоритму становится все более трудоемким. В этом случае целесообразно использовать иные алгоритмы и методы решения системы уравнений (9.7).

Некоторые методы ускорения сходимости подобных систем уравнений применительно к задачам физики ядерных реакторов подробно анализируются в работах (Марчук Г.И., 1961; Марчук Г.И. и др., 1981).

Хорошо себя зарекомендовали также гибридные методы расчета, состоящие в использовании комбинации нескольких методов. Например, в пространственной области сильного светорассеяния используется диффузионное приближение уравнения радиационного переноса.

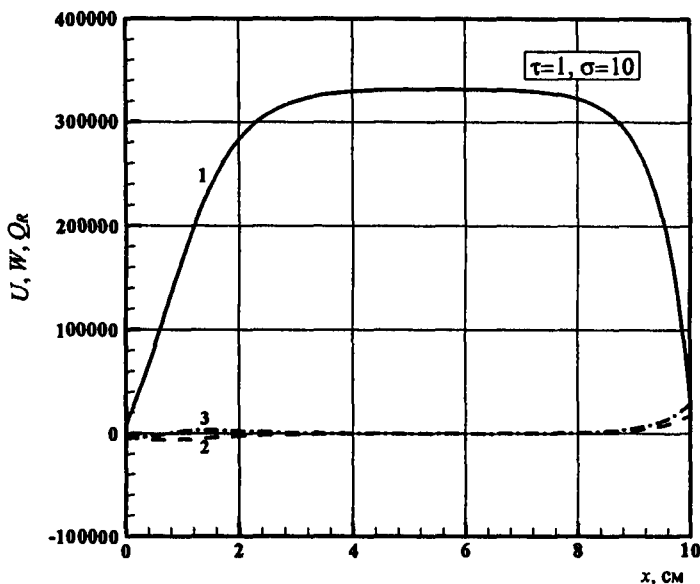


Рис. 9.5. Плотность радиационной энергии (1, U в Дж/см³), плотность радиационного теплового потока (2, W в Вт/см²) и дивергенция вектора плотности потока радиационной энергии (3, Q_R в Вт/см³) в плоском слое с оптической толщиной $\tau=1$ и коэффициентом рассеяния $\sigma=10$ см⁻¹. Решение методом полумоментов для температурного распределения рис. 5.5. Число итераций — 285

Недостатком подобных гибридных методов является необходимость дополнительной формулировки граничных условий (фактически — условий стыковки). Тем не менее, это удастся сделать не только для комбинации детерминированных методов, на-

пример метода полумоментов и P_1 -приближения, но также и для комбинации методов статистического моделирования (методов Монте-Карло) и детерминированных методов. По всей видимости, впервые указанные гибридные методы были исследованы в работах Дж. Хауэлла и его коллег (Howell J.R., 1998), где имитационный метод Монте-Карло был объединен с диффузионным приближением при решении трехмерной задачи о переносе излучения в сильно рассеивающей среде.

9.3. Итерационные методы решения уравнения переноса

9.3.1. Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений применяется для решения задач переноса излучения с учетом рассеяния и основан на представлении искомой интенсивности излучения в виде ряда

$$J(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\omega}^n J_n(\mathbf{r}, \Omega), \quad (9.13)$$

где $\tilde{\omega}$ – альбеда однократного рассеяния; J_n – интенсивность излучения, отвечающая учету n -кратного рассеяния.

Рассмотрим получение системы уравнений метода последовательных приближений на примере задачи о рассеивающем плоском слое, т.е. для уравнения

$$\mu \frac{\partial J(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J(\tau, \mu) = (1 - \tilde{\omega}) J_b(\tau) + \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 J(\tau, \mu') \gamma(\mu, \mu') d\mu'. \quad (9.14)$$

Подставив разложение (9.13) в уравнение (9.14) и приравняв слагаемые в полученном соотношении при одинаковых степенях $\tilde{\omega}$, получаем

$$\mu \frac{\partial J_0(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J_0(\tau, \mu) = J_b(\tau),$$

$$\mu \frac{\partial J_1(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J_1(\tau, \mu) = -J_b(\tau) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 J_0(\tau, \mu') \gamma(\mu, \mu') d\mu',$$

$$\mu \frac{\partial J_2(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J_2(\tau, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 J_1(\tau, \mu') \gamma(\mu, \mu') d\mu',$$

...

$$\mu \frac{\partial J_n(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J_n(\tau, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 J_{n-1}(\tau, \mu') \gamma(\mu, \mu') d\mu' \quad (9.15)$$

...

Система уравнений (9.15) решается при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \tau = 0, \quad \mu > 0: \quad J_0(0, \mu) &= J_0^+, \\ J_n(0, \mu) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots; \\ \tau = \tau_H, \quad \mu < 0: \quad J_0(\tau_H, \mu) &= J_0^-, \\ J_n(\tau_H, \mu) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.16)$$

Преимуществом метода последовательных приближений является то, что здесь удается в явном виде учесть вклад интенсивности n -кратного рассеяния. Кроме этого, система (9.15) содержит полностью подобные уравнения по своей структуре, что облегчает компьютерную реализацию данного метода. Тем не менее, как и прежде, с увеличением кратности рассеяния сходимость данного метода ухудшается.

9.3.2. Аналитические итерационные методы

Суть аналитических итерационных методов, типа методов Унзо́льда, Плачека, Унзо́льда – Майне (Чандрасекхар С., 1953; Kourganoff V., Busbridge I.W., 1963), состоит в подборе специальных функциональных зависимостей для функции источников излучения (функция первого приближения) и использовании их в интегральных уравнениях типа уравнения Милна. При удачном подборе функции первого приближения уже во втором приближении получается удовлетворительное решение.

9.3.3. Вариационные методы решения уравнения переноса излучения

Вариационные методы получили наибольшее развитие в астрофизике и физике ядерных реакторов в середине прошлого века (Владимиров В.С., 1958, 1961; Дэвисон Б., 1960; Марчук Г.И., 1961; Смелов В.В., 1978; Marshak R., 1947; Placzek G., 1946; Kurganoff V. et al., 1963). Главная идея вариационных методов заключается в подборе некоторой (пробной) функции, содержащей ряд подлежащих определению постоянных и достаточно близкой к искомому решению. Если такая функция задана и сформулирован некоторый функционал от невязки (разницы между истинной и пробной функцией), то из условия минимума этого функционала удастся получить уравнения для определения неизвестных постоянных. Как правило, погрешность вариационных методов уменьшается при удачном выборе пробной функции.

Использование вариационных методов представляется перспективным совместно с широко применяемыми численными методами для получения асимптотически точных решений многомерных задач.

9.4. Метод квадромоментов

Этот метод предложен и реализован в работах (Суржиков С.Т., 1988; Surzhikov S.T., 1996), где рассмотрен перенос излучения в двумерной цилиндрической геометрии (рис. 9.6).

Спектральная интенсивность излучения в этом случае зависит от четырех координат $J_v = J_v(x, r, \Omega) = J_v(x, r, \varphi, \theta)$ и в условиях ЛТР в нерассеивающей среде удовлетворяет уравнению (индекс спектральной зависимости опущен)

$$\sqrt{1-\mu^2} \left(\gamma \frac{\partial J}{\partial r} + \frac{1-\gamma^2}{r} \frac{\partial J}{\partial \gamma} \right) + \mu \frac{\partial J}{\partial x} + \kappa J = \kappa J_b, \quad (9.17)$$

где $\mu = \cos\theta$, $\gamma = \cos\varphi$, $\Omega = (\omega_x, \omega_r)$, $\omega_x = \mu$, $\omega_r = \gamma\sqrt{1-\mu^2}$ — направляющие косинусы вектора Ω по отношению к радиальной r

и осевой x координатам. Относительно плоскости, содержащей векторы \mathbf{x}^0 и \mathbf{r}^0 , задача является зеркально симметричной, если интенсивность излучения, падающего извне на поверхность S , ограничивающую объем, является четной по φ . Это позволяет ограничиться областью определения по азимутальной координате $0 \leq \varphi \leq \pi$.

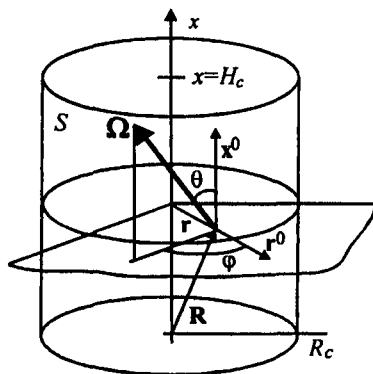


Рис. 9.6. К формулировке уравнений метода квадромоментов

Суть метода состоит во введении четырех пространственных зон (рис. 9.7) и применении в каждой из них процедуры интегрирования уравнения (9.17) с различными весовыми функциями, как это обычно делается в моментных методах. В каждой из этих угловых зон вводятся по определению объемные плотности спектрального излучения

$$\bar{U} = \bar{Q}^{\pm} \{J\} = \frac{1}{c} 2 \int_0^1 \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^1 J^{\pm} d\mu, \quad (9.18)$$

а также проекции плотности спектрального потока на радиальное направление

$$\bar{W}_r^{\pm} = \pm \bar{R}^{\pm} \{J\} = 2 \int_0^1 \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^1 J^{\pm} \sqrt{1-\mu^2} d\mu, \quad (9.19)$$

и осевое направление

$$\tilde{W}_x^+ = \tilde{X}^+ \{J\} = 2 \int_0^1 \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^1 J^+ \mu d\mu, \quad (9.20)$$

$$\tilde{W}_x^- = -\tilde{X}^- \{J\} = 2 \int_0^1 \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^1 J^- \mu d\mu \quad (9.21)$$

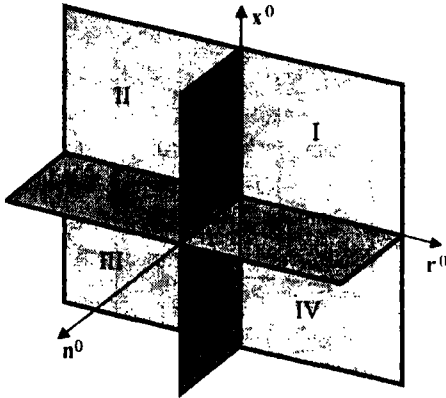


Рис. 9.7. Четыре квадранта расчетной области

В (9.18)–(9.21) использована система индексов $\{(\sim = \cap, \cup), +, -\}$, фиксирующих угловую зону: $(\cap) - \mu \geq 0$, $(\cup) - \mu < 0$, $(+) - \gamma \geq 0$, $(-) - \gamma < 0$. Последовательное применение операторов \tilde{Q}^\pm , \tilde{K}^\pm , \tilde{X}^\pm к (9.17) дает следующую систему уравнений:

$$\frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{L}_1^\pm) - \frac{m}{r} \tilde{L}_2^\pm + n \frac{\partial \tilde{L}_3^\pm}{\partial x} + \kappa \left(\tilde{W}_r^\pm - \frac{\pi}{2} J_b \right) = 0, \quad (9.22)$$

$$\frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{M}_1^\pm) - \frac{m}{r} \tilde{M}_2^\pm + n \frac{\partial \tilde{L}_3^\pm}{\partial x} + \kappa \left(\tilde{W}_x^\pm - \frac{\pi}{2} J_b \right) = 0, \quad (9.23)$$

$$\frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{W}_r^\pm) + n \frac{\partial \tilde{W}_x^\pm}{\partial x} - \frac{2m}{r} \int_0^1 J(\gamma=0) \sqrt{1-\mu^2} d\mu + \kappa (\tilde{U}^\pm - \pi J_b) = 0, \quad (9.24)$$

где

$$\tilde{L}_1^\pm = 2 \int_0^1 \frac{\gamma^2 d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^1 J^\pm \sqrt{1-\mu^2} d\mu; \quad (9.25)$$

$$\tilde{M}_1^\pm = 2 \int_0^1 \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^1 J^\pm \mu \sqrt{1-\mu^2} d\mu; \quad (9.26)$$

$$\tilde{L}_2^\pm = 2 \int_0^1 \sqrt{1-\gamma^2} d\gamma \int_0^1 J^\pm (1-\mu^2) d\mu; \quad (9.27)$$

$$\tilde{M}_2^\pm = 2 \int_0^1 J^\pm (\gamma=0) \mu \sqrt{1-\mu^2} d\mu; \quad (9.28)$$

$$\tilde{L}_3^\pm = 2 \int_0^1 \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^1 J^\pm \mu \sqrt{1-\mu^2} d\mu; \quad (9.29)$$

$$\tilde{M}_3^\pm = 2 \int_0^1 \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^1 J^\pm \mu^2 d\mu; \quad (9.30)$$

$\gamma > 0, m = 1; \gamma < 0, m = -1; \mu > 0, n = 1; \mu < 0, n = -1.$

Полученная система уравнений может являться исходной для построения группы расчетных методов. Несмотря на то что при ее выводе не делалось каких-либо упрощающих предположений, эту систему нельзя считать точным аналогом уравнения переноса. Точной являлась бы бесконечная система дифференциальных уравнений, получаемых последовательным применением к уравнению (9.17) операторов вида

$$L = \int_{\Delta\Omega} \omega_i^k d\Omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty, \quad i = r, x. \quad (9.31)$$

Ограничение числа дифференциальных уравнений относительно моментов интенсивности излучения означает, что в разложении интенсивности в ряд по ортонормированным функциям

удержано конечное число слагаемых. В полном телесном угле 4π удобным ортонормированным базисом является система сферических гармоник. Первые два слагаемых такого ряда (что соответствует P_1 -приближению метода сферических гармоник) с учетом четности по φ , дают:

$$J(x, r, \varphi, \theta) = c(x, r) + a(x, r)\mu + b(x, r)\gamma\sqrt{1-\mu^2}. \quad (9.32)$$

Аппроксимация интенсивности излучения полиномом ортогональным на половинных отрезках имеет вид

$$J(x, r, \varphi, \theta) = c(x, r) + a(x, r)\mu(2\mu^2 - 1) + \\ + 2b(x, r)\mu^2\sqrt{1-\mu^2}(2\gamma^2 - 1). \quad (9.33)$$

Заметим, что вопрос о правомерности ограничения конечным числом слагаемых разложения интенсивности в ряд по сферическим функциям до настоящего времени остается открытым и обсуждаемым в специальной литературе. Вместе с тем, из теории лучистого теплообмена известно, что в большинстве задач вид задаваемой угловой зависимости $J(\Omega)$ слабо сказывается на получаемых величинах плотностей лучистых потоков и объемной плотности лучистой энергии. Поэтому для практики решения задач теплообмена излучением и динамики излучающего газа аппроксимация (9.32) считается удовлетворительной. Поскольку разложение (9.33) определено только на четверти телесного угла, от его использования можно ожидать большей точности.

Определим дальнейшие пути возможного решения задачи. Если разложением (9.33) воспользоваться для расчета функций \bar{U}^\pm , \bar{W}_r^\pm , \bar{W}_x^\pm , \bar{L}_i^\pm , \bar{M}_i^\pm , то вместо (9.22)–(9.24) получится система уравнений относительно коэффициентов a, b, c . Естественно этот метод назвать *методом квадромоментов*, так как он имеет аналогию с моментными методами, но отвечает четверти телесного угла.

Разложение типа (9.33) можно использовать для расчета коэффициентов в (9.22), (9.23), предварительно преобразовав их так, чтобы под дифференциальными операторами появились искомые

функции. Если уравнения (9.22), (9.23) решать относительно функций \tilde{U}^{\pm} , то приходим к аналогу метода квазидиффузии (Гольдин В.Я., 1964). Если уравнения (9.22), (9.23) решать относительно потоков \tilde{W}_r^{\pm} и \tilde{W}_x^{\pm} , то получаются уравнения метода потоковой релаксации (Суржиков С.Т., 1987).

Рассмотрим простейший расчетный случай, когда все указанные методы тождественны (фактически это обобщение метода Шварцшильда – Шустера на случай 4-х пространственных зон)

$$\tilde{J}^{\pm}(x, r, \varphi, \theta) = \tilde{c}^{\pm}(x, r). \quad (9.34)$$

С учетом (9.34) уравнение (9.24) приобретает вид

$$\frac{m}{r} \frac{\partial r \tilde{c}^{\pm}}{\partial r} + n \frac{\partial \tilde{c}^{\pm}}{\partial x} - \frac{m}{r} \tilde{c}^{\pm} + 2k \tilde{c}^{\pm} = 2kJ_b, \quad (9.35)$$

$$\tilde{U}^{\pm} = \pi \tilde{c}^{\pm}, \quad \tilde{W}_r^{\pm} = \tilde{W}_x^{\pm} = \frac{\pi}{2} \tilde{c}^{\pm}. \quad (9.36)$$

Граничные условия формулируются для каждого из четырех направлений. Пусть на внешнюю поверхность цилиндра падает изотропное излучение интенсивностью J^0 , тогда

$$\begin{aligned} \text{при } r = R_c, \quad \tilde{c}^- = \tilde{c}^- = J^0, \\ \text{при } x = 0, \quad \tilde{c}^- = \tilde{c}^+ = J^0, \\ \text{при } x = H_c, \quad \tilde{c}^- = \tilde{c}^+ = J^0. \end{aligned} \quad (9.37)$$

На оси симметрии

$$\tilde{c}^+(r=0) = \tilde{c}^-(r=0), \quad \tilde{c}^+(r=0) = \tilde{c}^-(r=0). \quad (9.38)$$

Если внешнее излучение неизотропно, то его необходимо усреднить.

Заметим, что в приведенной записи уравнение (9.35) отвечает нулевому приближению метода квадромоментов. С учетом (9.36) его можно записать относительно функций \tilde{U}^{\pm} или $\tilde{W}_{r(x)}^{\pm}$.

Выполненный в работе (Суржиков С.Т., 1987) численный анализ решений системы уравнений (9.35)–(9.38) на примере решения задачи о переносе излучения в двумерной цилиндрической

области с высокотемпературной излучающей областью сферической формы (постановку задачи см. в п. 6.3) показал на удовлетворительное совпадение с результатами расчетов по P_1 -приближению метода сферических гармоник. При этом были определены основные недостатки и преимущества метода квадромоментов. К первому недостатку следует отнести относительно большую трудоемкость этого метода, что вполне очевидно, ибо метод требует, по крайней мере, четырехкратного прохождения расчетной области. Вторым недостатком присущим, очевидно, всем потокосым методам, применяемым для решения задачи переноса излучения в нерассеивающих криволинейных объемах, является разрывность решений на границах областей угловых направлений и образование немонотонностей в пространственных распределениях плотности радиационной энергии, которые удастся исключить лишь при введении искусственного (численного) сглаживания.

Важным достоинством метода квадромоментов является возможность введения неразрывных интегральных по спектру электромагнитного излучения эффективных коэффициентов поглощения, типа интегральных по Чандрасекхару коэффициентов поглощения, которые позволяют построить эффективный расчетный алгоритм решения селективных задач теории радиационного теплообмена. Наличие существенных недостатков и достоинств метода квадромоментов диктуют необходимость дальнейшего его исследования.

В заключение рассмотрения потокосых методов заметим, что их применение к решению задач переноса излучения в объемах криволинейных геометрий является в настоящее время не до конца решенной задачей.

ГЛАВА 10

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ ОБЪЕМАХ СВЕТОРАССЕИВАЮЩИХ ГОРЯЧИХ ГАЗОВ

В данной главе рассматриваются методы численного расчета направленных спектроэнергетических радиационных характеристик излучения неоднородных светорассеивающих объемов, а также радиационных тепловых потоков на границах этих объемов. Под *спектроэнергетическими* радиационными характеристиками будем понимать пространственное и спектральное распределения основных радиационных характеристик.

Наиболее сложные математические модели, описывающие процессы светорассеяния, составляют значительную часть задач теплообмена излучением в многокомпонентных многофазных газовых смесях и небольшую долю от общего числа моделей радиационного переноса в динамике низкотемпературной плазмы. В самом деле, при относительно низкой температуре среды ($T < 2000 + 3000$ К), когда еще существуют твердые и жидкие частицы, процессы взаимодействия излучения с веществом являются низкоэнергетическими и не оказывают влияния на газодинамическую структуру потока. Решение задач радиационной газовой динамики при этом существенно упрощается. Сначала решается газодинамическая часть задачи. По найденным полям температуры и концентраций газа и частиц производится однократный расчет переноса излучения. Однако решение самой задачи о переносе теплоты излучением является весьма сложным из-за наличия светорассеяния.

С ростом температуры среды начинают проявляться процессы взаимодействия излучения и вещества, но доля конденсированных и твердых частиц резко падает. Вместе с этим исчезают и светорассеивающие центры. Среда становится нерассеивающей. Однако на первый план выходят проблемы взаимного влияния излучения и динамики среды.

Взаимодействие излучения с веществом может оказаться заметным при высоких плотностях последнего. Так, например, скорость разрушения полупрозрачной теплозащиты космических аппаратов в значительной степени может определяться радиационно-коидуктивным взаимодействием. Однако здесь имеются упрощающие обстоятельства: во-первых, задача движения излучающей среды является достаточно простой, а во-вторых, как правило, в задачах теплообмена излучением можно пользоваться упрощенными моделями светорассеяния.

При высоких температурах в радиационной плазмодинамике может возникнуть необходимость учета эффектов светорассеяния, обусловленных другими физическими механизмами, например, комптоновским рассеянием (Имшенник В.С. и др., 1981; Грынь В.И., 1981).

В предыдущих главах основное внимание уделялось методам расчета переноса излучения, основанным на усреднении угловой зависимости интенсивности излучения, т.е. предназначенным, в первую очередь, для нахождения таких характеристик радиационного переноса, как: объемной плотности радиационной энергии, вектора плотности радиационного потока и его дивергенции. Однако в теории переноса излучения существует другой весьма важный круг задач – расчет угловой зависимости интенсивности излучения и, как частный случай, расчет направленной излучательной способности горячих газовых объемов.

Методы расчета переноса излучения, ориентированные на нахождение направленных излучательных характеристик, условно разделим на три группы.

К первой группе относятся такие методы расчета, которые позволяют получить точное решение уравнения переноса. Круг задач, допускающих точное решение, чрезвычайно узок. При этом

накладываются сильные ограничения на геометрию исследуемой области, оптические свойства среды и граничные условия.

Ко второй группе относятся приближенные детерминированные методы решения уравнения переноса: методы сферических гармоник, дискретных ординат, характеристик.

Третью группу составляют методы статистических испытаний или методы Монте-Карло. Среди них выделим статистические методы моделирования процесса переноса излучения и статистические методы решения интегральных уравнений переноса.

Остановимся на вычислительных моделях прямого статистического моделирования (имитации), нашедших широкое применение в практике решения задач определения спектроэнергетических характеристик излучения газовых объемов. Теоретические основы этого метода даны в работах (Соболь И.М., 1973; Ермаков С.М. и др., 1982; Зигель Р. и др., 1975; Суржиков С.Т., 1992).

10.1. Общие понятия о принципах имитационного моделирования распространения излучения в рассеивающей среде

Пусть в рассматриваемую замкнутую область G попадает поток частиц (фотонов). При этом вопрос о причинах, вызвавших появление этих частиц в области, пока обсуждать не будем. Рассмотрим одну из частиц. От точки своего рождения фотон будет двигаться по прямой до тех пор, пока не пересечет границу области (поверхность S) или не столкнется с материальными частицами вещества. Местоположение точки пересечения прямолинейного участка траектории с границей может быть определено с привлечением аппарата аналитической геометрии. Акт столкновения фотона с элементом вещества является существенно вероятностным процессом.

Предполагая, что закон распределения длин свободного пробега известен (эта величина определяется свойствами среды и длиной волны излучения фотона), можно выбрать случайную длину пробега. Эту процедуру называют *розыгрышем длины свободного пробега*.

Следующий этап рассмотрения истории движения частицы состоит в розыгрыше (вероятностном оценивании) типа столкновения. При этом определяется дальнейшая судьба частицы. Если фотон поглощается атомом, молекулой или конденсированной частицей вещества, то на этом его история заканчивается (в условиях локального термодинамического равновесия). Если фотон испытывает рассеяние, в результате чего он продолжает движение в новом направлении (в общем случае с новой энергией), то процедура рассмотрения истории фотона является аналогичной рассмотренной выше.

Важным моментом теории статистического моделирования физического процесса распространения излучения в веществе является использование расчетных и теоретических данных, отражающих количественную сторону моделируемых явлений. Речь идет об интерпретации оптических сечений физических процессов поглощения, испускания и рассеяния, вносящих основной вклад в процесс распространения излучения.

При решении задачи моделирования здесь имеются два пути. Первый из них заключается в том, что, основываясь на знании оптических сечений реальных процессов взаимодействия фотонов с атомами, молекулами и конденсированными частицами, можно при каждом акте разыгрывать типы столкновения, не только подразделяя их на поглощение и рассеяние, но и вводя детализацию по типам поглощения. Вероятность же того или иного типа поглощения определяется известными сечениями процессов и количеством частиц, с которыми происходит взаимодействие фотонов. Таким образом, в отличие от детерминированных методов расчета переноса излучения, оптическим сечениям элементарных радиационных процессов здесь придается смысл вероятностных характеристик, каковыми они и являются по своей природе.

Второй путь состоит во введении некоторых эффективных характеристик элементарного объема вещества: объемного коэффициента поглощения, испускания и рассеяния, а также усредненной по элементарному физическому объему индикатрисы рассеяния. В предыдущих главах обсуждалось, что эти коэффициенты являются макроскопическими характеристиками и присутст-

вуют в интегро-дифференциальном уравнении переноса излучения. Однако при моделировании траекторий фотонов эти величины носят также вероятностный характер, т.е. определяют вероятность поглощения и рассеяния фотона элементарным объемом вещества. При розыгрыше типа столкновения с учетом коэффициентов поглощения и рассеяния не только делается вывод о его типе (дается ответ на вопрос: есть поглощение или нет), а также определяется относительная вероятность процессов поглощения и рассеяния.

Указанные два способа моделирования типа взаимодействия фотонов излучения с веществом равноправны не во всех случаях. При наличии равновесия между термодинамическим состоянием среды и излучением оба обсуждаемых способа эквивалентны. В противном случае, вероятность рождения нового фотона в результате элементарных радиационных процессов в веществе не одинакова, что не позволяет использовать второй подход для розыгрыша вероятности поглощения.

Остановимся на вопросах розыгрыша типа рассеяния. Когда в гетерогенной смеси присутствуют частицы разных размеров, характер рассеяния фотонов на них существенно различается. Тем не менее, для того чтобы определить вероятность акта рассеяния, можно ввести суммарную характеристику рассеяния элементарного объема среды, проинтегрировав с некоторой весовой функцией сечения рассеяния всех частиц. Дальнейшим шагом моделирования траектории является розыгрыш угла рассеяния или, другими словами, определение нового направления, в котором фотон продолжает свой путь. Здесь также можно использовать два подхода.

Первый, наиболее сложный, состоит в дифференциации процессов рассеяния. Поскольку индикатриса рассеяния (функция, определяющая вероятность реализации произвольного угла рассеяния) сильно зависит от размеров частиц, то для выполнения процедуры моделирования надо сначала представить всю гетерогенную смесь в виде совокупности групп частиц с близкими параметрами. Затем следует разыграть номер группы частиц, на которых происходит рассеяние, принимая во внимание, что вероят-

ность рассеяния фотона фиксированной группой определяется величиной сечения рассеяния частиц с данными размерами. Угол рассеяния частицами данной группы определяется соответствующей индикатрисой рассеяния.

Второй способ моделирования углов рассеяния состоит в определении индикатрисы рассеяния полидисперсного элементарного объема. Определение суммарной индикатрисы рассеяния полидисперсного объема позволяет моделировать угол рассеяния фотона без розыгрыша актов столкновения с отдельными частицами.

История каждой вновь появившейся частицы прослеживается точно таким же образом. Анализируя большое количество историй, можно сделать необходимые выводы (с определенной степенью вероятности) относительно интересующих нас характеристик.

Подчеркнем, что основу применения метода Монте-Карло составляют допущения об отсутствии взаимодействия фотонов между собой и о линейности процессов переноса излучения относительно механизмов взаимодействия квантов энергии с веществом, что позволяет моделировать реальные процессы распространения излучения поведением небольших модельных групп частиц ($\sim 10^5$).

10.2. Исходная информация имитационного моделирования

В настоящем разделе излагается способ применения имитационного метода Монте-Карло на примере решения задачи определения силы излучения от конечномерного осесимметричного объема, расположенного в пространстве произвольным образом. В такой постановке удастся решить большой круг практически важных задач, в частности о переносе излучения в светорассеивающих объемах плоской, сферической и цилиндрической геометрии. Для решения этой задачи необходимо задать исходную информацию, которую условно можно подразделить на четыре группы.

В 1-ю группу входят данные, задающие геометрию излучающей области. Это есть числовые массивы, содержащие координаты цилиндрических поверхностей, охватывающих исследуемый объем, и плоскостей, перпендикулярных оси симметрии в цилиндрической системе координат. На рис. 10.1 показана используемая расчетная сетка и исследуемая область G .

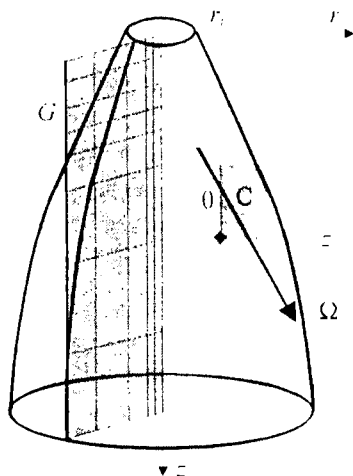


Рис. 10.1. Расчетная область

Во 2-ю группу исходных данных входят числовые массивы свойств среды в узлах расчетной $r-z$ сетки. Здесь задаются температурные поля газовой и конденсированной фазы, коэффициенты поглощения газа и полидисперсных объемов частиц, коэффициенты рассеяния полидисперсных элементарных объемов и соответствующие индикатрисы рассеяния. К этой же группе исходных данных относится шкала длин волн электромагнитного излучения, в которой требуется выполнить расчеты переноса излучения.

3-ю группу исходных данных составляют массивы угловых координат, предназначенных для дискретизации множества направлений, в которых моделируемые фотоны покидают расчетную область. Это необходимо для выполнения количественной регистрации. Таким образом, фотоны «сортируются» по дискретным направлениям, а в результате расчета получают массивы

чисел фотонов, покинувших область в каждой из выделенных угловых зон. Углы задаются в системе координат, связанной с местной нормалью к элементарной площадке, принадлежащей поверхности, охватывающей исследуемый объем.

В 4-ю группу исходных данных входят характеристики численного моделирования: число серий фотонов и число фотонов в каждой серии. Произведение числа серий и числа фотонов в серии дает полное количество разыгрываемых историй. Введение серий фотонов объясняется желанием снизить корреляцию данных, обусловленную квазислучайным характером чисел, выдаваемых программным генератором случайных чисел. Кроме этого, анализ результатов расчетов после розыгрыша каждой серии фотонов позволяет экспериментально установить степень сходимости результатов моделирования.

10.3. Расчет случайных чисел, распределенных по произвольным законам

Для решения задач статистического моделирования необходимо иметь генератор случайных чисел γ , равномерно распределенных на участке $[0, 1]$. Случайные числа, распределенные по другим законам, также моделируются при помощи чисел, равномерно распределенных на $[0, 1]$. Поясним, как это делается в общем виде. Пусть $p(x')$ — плотность вероятности распределения случайной величины, тогда

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^x p(x') dx', \quad (10.1)$$

где $F(x)$ — функция распределения случайной величины (так называемая *кумулятивная функция*), задающая вероятность реализации случайного события на интервале $(-\infty, x)$. Выборочное значение случайной величины t , распределенной по закону с $p(x)$, определяется по формуле

$$\gamma = \int_{-\infty}^t p(x') dx'. \quad (10.2)$$

Известны три метода получения случайных чисел: табличный метод, метод датчика случайных чисел и метод псевдослучайных чисел. Наибольшее распространение получил метод псевдослучайных чисел, под которыми понимают набор чисел, вычисляемых по заданной формуле, и которые могут быть использованы при решении задач статистического моделирования. Среди этих методов отметим метод Неймана и метод вычетов (сравнения) (Соболь И.М., 1973). Отметим, что вопросам получения псевдослучайных чисел посвящена обширная литература (Ермаков С.М. и др., 1982; Марчук Г.И. и др., 1976; Франк-Каменецкий А.Д., 1978). Имеются тексты программ (Ермаков С.М. и др., 1982; Франк-Каменецкий А.Д., 1978). Вместе с этим, следует учитывать, что все современные трансляторы программных языков включают в себя генераторы псевдослучайных чисел, качество работы которых вполне удовлетворяют требованиям прикладных задач теории статистического моделирования.

10.4. Моделирование изотропного случайного вектора

Необходимость в численном моделировании угловых характеристик изотропного случайного вектора возникает при определении направления движения частицы после акта изотропного рассеяния или в акте испускания фотона элементарным объемом. И в том, и в другом случае предполагается, что фотон может двигаться с равной степенью вероятности в любом из направлений телесного угла 4π . Плотность реализации этого события записывается в виде $1/4\pi$. Произведение плотности вероятности и элемента телесного угла равно $p(\Omega) = \sin\theta d\theta/4\pi$. Поэтому функция $F(\Omega)$ имеет вид:

$$F(\Omega) = \int_{\Omega} p(\Omega) d\Omega = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \right) / 4\pi. \quad (10.3)$$

Выбор граничных значений углов поясняется на рис. 10.2. Отсюда следует, что $\cos\theta$ равномерно распределен на $[-1, 1]$,

угол φ на отрезке $[0, 2\pi]$, а их моделирование можно производить по формулам $\cos\theta = 2\gamma_\theta - 1$, $\varphi = 2\pi\gamma_\varphi$.

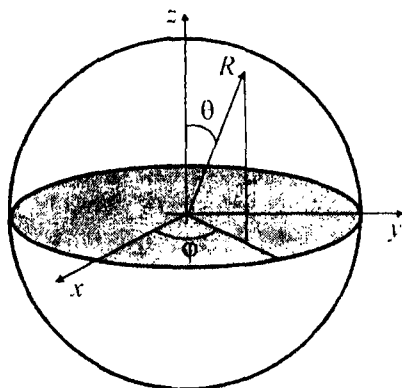


Рис. 10.2. К моделированию изотропного случайного вектора

В процессе численного моделирования необходимо иметь значения не самих углов φ , а функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, которые можно вычислять с использованием программ расчета тригонометрических функций или моделировать по алгоритму Неймана (Франк-Каменецкий А.Д., 1978):

1) рассчитываются два случайных числа γ_1 и γ_2 , равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$;

2) для указанных случайных чисел вычисляется величина

$$D = (2\gamma_1 - 1)^2 + \gamma_2^2;$$

3) если $D \geq 1$, то эта пара чисел отбрасывается и берется новая;

4) если $D < 1$, то

$$\cos\varphi = \left[(2\gamma_1 - 1)^2 - \gamma_2^2 \right] / D, \quad \sin\varphi = 2(2\gamma_1 - 1)\gamma_2 / D.$$

По вычисленным значениям тригонометрических функций определяются направляющие косинусы траектории

$$\omega_x = \sin\theta \cos\varphi, \quad \omega_y = \sin\theta \sin\varphi, \quad \omega_z = \cos\theta. \quad (10.4)$$

Практическими вычислениями установлено, что алгоритм Неймана оказывается более экономичным.

10.5. Дискретизация исследуемого объема

Заданием узлов расчетной сетки фактически производится дискретизация исследуемого объема на N_l зон. В качестве примера рассмотрим элементарный цилиндр с высотой $h = z_{j+1} - z_j$, $j = 1, 2, \dots, NJ - 1$, и ограниченный поверхностями r_i и r_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, NI - 1, NJ, NI$ – число узлов сетки вдоль осей z и r (см. рис. 10.1).

В любом сечении этого элементарного цилиндра плоскостью, содержащей в себе ось Oz , получится прямоугольник, изображенный на том же рисунке. Координаты вершин этого прямоугольника известны, кроме того, в этих точках заданы все необходимые свойства среды. Осредненные свойства в элементарном цилиндре определяются по формуле

$$\langle f \rangle = 0.25 [f(r_i, z_j) + f(r_{i+1}, z_j) + f(r_i, z_{j+1}) + f(r_{i+1}, z_{j+1})]. \quad (10.5)$$

Степень приближенности такого задания свойств элементарных объемов существенно зависит от качества задания расчетной сетки.

Важным моментом процедуры моделирования распространения фотонов в среде является способ расчета длины пробега фотона. Как отмечается в работе (Франк-Каменецкий А.Д., 1978), на вычисление этой величины при решении реакторных задач тратится около половины всего расчетного времени. Трудоемкость решения этой задачи обусловлена тем, что траектория частицы прослеживается отдельно в каждом элементарном объеме. Существуют более экономичные приемы моделирования траектории в неоднородной среде, например, *метод максимального сечения*.

Метод максимального сечения основан на том очевидном положении, что добавление любого количества δ -рассеивателя в исследуемый объем не изменит процесса распространения фотонов (δ -рассеяние – это рассеяние без изменения направления).

Введем максимальный полный коэффициент ослабления среды

$$\beta_{l,\max} = \max_l \{ \beta_{l,l} \}, \quad \beta_{l,l} = \kappa_{g,l} + \kappa_{p,l} + \sigma_l, \quad (10.6)$$

где l – номер элементарного объема, определяемый четырьмя индексами узлов расчетной сетки; $\kappa_{g,l}$, $\kappa_{p,l}$ – коэффициенты объемного поглощения газа и частиц; σ_l – коэффициент объемного рассеяния.

Для каждого l -го элементарного объема помимо истинного коэффициента ослабления $\beta_{l,l}$ можно ввести коэффициент δ -рассеяния

$$\beta_{\delta,l} = \beta_{l,\max} - \beta_{l,l}. \quad (10.7)$$

Использование характеристик $\beta_{l,\max}$, $\beta_{l,l}$ и $\beta_{\delta,l}$ позволяет выполнять моделирование распространения фотонов в среде с переменными свойствами так же, как и в однородной среде. При этом считается, что при столкновении с вероятностью $\beta_{\delta,l}/\beta_{l,\max}$ происходит δ -рассеяние, а с вероятностью $(1 - \beta_{\delta,l}/\beta_{l,\max})$ – реальное взаимодействие. Обоснование такого подхода дано в работах (Ермаков С.М., Михайлов Г.А., 1982). Приведем его здесь.

Уравнение для потока моделируемых частиц $\Phi(r, \Omega)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению переноса излучения

$$\Omega \operatorname{grad} \Phi(r, \Omega) = -\beta_l(r) \Phi(r, \Omega) + \Phi_0(r, \Omega) + \int \Phi(r, \Omega') \sigma(r) p(\Omega', \Omega, r) d\Omega', \quad (10.8)$$

где $p(\Omega', \Omega, r)$ – индикатриса рассеяния. Обратим внимание на то, что в данной главе для обозначения индикатрисы рассеяния используется не $\gamma(\Omega', \Omega, r)$, а $p(\Omega', \Omega, r)$. Это сделано во избежание путаницы, поскольку общепринятым обозначением для случайного числа является γ .

Отметим, что в методах Монте-Карло более естественно использовать не интенсивность, а поток частиц, которые связаны между собой энергией моделируемой частицы.

Запишем тождество

$$[\beta_{l,\max} - \beta_l(r)] \Phi(r, \Omega) = \int \Phi(r, \Omega') [\beta_{l,\max} - \beta_l(r)] \delta(\Omega' - \Omega) d\Omega'$$

и сложим его с (10.8):

$$\begin{aligned} \Omega \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}, \Omega) + \beta_{l, \max} \Phi(\mathbf{r}, \Omega) = & \Phi_0(\mathbf{r}, \Omega) + \\ & + \int \Phi(\mathbf{r}, \Omega') \sigma(\mathbf{r}) p(\Omega', \Omega, \mathbf{r}) d\Omega' + \\ & + \int \Phi(\mathbf{r}, \Omega') [\beta_{l, \max} - \beta_l(\mathbf{r})] \delta(\Omega' - \Omega) d\Omega'. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Отсюда видно, что уравнение (10.9) можно трактовать как уравнение переноса в некоторой фиктивной среде, для которой $\beta_{l, \max}$ – полный коэффициент ослабления, $\sigma(\mathbf{r})$ – коэффициент рассеяния с индикатрисой $p(\Omega', \Omega, \mathbf{r})$, и $[\beta_{l, \max} - \beta_l(\mathbf{r})]$ – коэффициент рассеяния без изменения направления.

10.6. Определение начальных координат траекторий

Если на исследуемый объем падает излучение от внешних источников, то начальные координаты траекторий всех фотонов принадлежат поверхности, ограничивающей объем. При рассмотрении актов испускания фотонов элементами самого объема, координаты соответствующих точек заранее неизвестны. Изложим один из возможных алгоритмов их нахождения.

Для решения этой задачи требуется назначить число моделируемых фотонов N_f , испускаемых во всем объеме, а затем распределить эти фотоны по всем излучающим элементарным цилиндрическим объемам. Число фотонов, излучаемых в каждом таком объеме, пропорционально отношению энергии, излучаемой этим объемом, к энергии, теряемой всей областью. Количество лучистой энергии, теряемой элементарным цилиндрическим объемом в приближении объемного высвечивания, вычисляется следующим образом:

$$H_l = 4\pi V_l \left(J_{b,l}^p \kappa_{p,l} + J_{b,l}^g \kappa_{g,l} \right), \quad V_l = \pi (z_{j+1} - z_j) (r_{i+1}^2 - r_i^2), \quad (10.10)$$

где $J_{b,l}^p$ и $J_{b,l}^g$ – спектральные интенсивности излучения абсолютно черного тела при температурах частиц и газа.

Суммированием величин H_l по всем l определяется общая энергия H_ν , теряемая областью. Тогда вероятность испускания

квантов энергии в объеме с номером l можно представить в виде $P_l = H_l/H_V$.

Распределение фотонов по излучающим зонам следует производить с учетом величин P_l , т.е. число фотонов, испускаемых в l -й зоне $N_{f,l}$, равно целой части произведения $[N_f P_l]$. Если просуммировать числа $N_{f,l}$ по всем l , то, как правило, не получится суммарное число фотонов N_f . Оставшееся число фотонов N_f^* следует распределить по всем зонам опять с учетом величин P_l . В работе (Франк-Каменецкий А.Д., 1978) приводятся несколько способов такого распределения. Например, используется алгоритм случайной выборки номера зоны: проводится N_f^* независимых испытаний, в каждом из которых номер зоны разыгрывается из условия

$$\sum_{j=1}^{l-1} W_j \leq N_f^* \gamma < \sum_{j=1}^l W_j, \quad W_j = N_f P_j - [N_f P_j]. \quad (10.11)$$

После того, как выполнено распределение общего числа фотонов по всем излучающим зонам, следует разыграть точные координаты рождения каждой частицы в пределах l -го объема. Причем, если распределение числа фотонов по излучающим элементарным объемам производится до начала моделирования траекторий, то определение координат рождения частиц целесообразно делать последовательно при моделировании движения каждой отдельной частицы. В этом случае в памяти ЭВМ необходимо хранить лишь N_l чисел $N_{f,l}$.

Для вычисления координат рождения фотонов, как и при распределении их по зонам, можно использовать как систематическую, так и случайную выборки (Франк-Каменецкий А.Д., 1978). При случайной выборке можно использовать следующие формулы для координат рождения частиц:

$$r_{em} = \sqrt{r_i^2 + \gamma (r_{i+1}^2 - r_i^2)}, \quad z_{em} = z_j + \gamma (z_{j+1} - z_j). \quad (10.12)$$

Определив начальные координаты траектории фотона, остается задать направляющие косинусы вектора скорости. Предпола-

гая, что в актах испускания нет какого-либо выделенного направления, для определения направляющих косинусов вектора направления траектории испущенного фотона можно использовать способ моделирования изотропного случайного вектора.

10.7. Построение прямолинейного участка траектории в замкнутой области

Как уже отмечалось, предполагается, что от места своего рождения фотон движется прямолинейно в заданном направлении до тех пор, пока не произойдет его столкновение с частицей вещества, или же он не пересечет границу рассматриваемой области. Рассмотрим способ нахождения величины пробега фотона до его пересечения с поверхностью ограничивающей области.

В силу специального задания расчетной сетки (в рассматриваемом случае – цилиндрическая осесимметричная система координат) можно считать, что фотон движется внутри кругового цилиндра, ограниченного двумя плоскостями $z = 0$ и $z = H$, нормальными к оси цилиндра. Очевидно, что в замкнутой круговой цилиндрической области фотон не может пройти расстояние больше, чем $L_{\max} = \sqrt{D^2 + H^2}$, где D и H – диаметр и высота цилиндра. Фотон может столкнуться с любой из плоскостей или с цилиндрической поверхностью. Координаты столкновения определяются с использованием аппарата аналитической геометрии. Уравнения траектории фотона, цилиндрической поверхности и плоскостей записываются в виде

$$\frac{x - x_c}{\omega_x} = \frac{y - y_c}{\omega_y} = \frac{z - z_c}{\omega_z} = t, \quad (10.13)$$

$$x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4}, \quad (10.14)$$

$$z = 0, \quad z = H, \quad (10.15)$$

где $x_c, y_c, z_c, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ – координаты и направляющие косинусы вектора направления траектории.

Длина пути фотона до пересечения с цилиндрической поверхностью l_c найдется из (10.13) и (10.14)

$$l_c = t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{E}}{2a}, \quad E = b^2 - 4ac, \quad (10.16)$$

$$a = \omega_x^2 + \omega_y^2, \quad b = 2(x_c \omega_x + y_c \omega_y), \quad c = x_c^2 + y_c^2 - \frac{D^2}{4}. \quad (10.17)$$

Но пересечение прямолинейного участка траектории фотона с цилиндрической поверхностью возможно лишь при выполнении следующих условий

$$a \neq 0, \quad 0 \leq -b + \sqrt{E} \leq 2aL_{\max},$$

поэтому только положительное значение $t_1 > 0$ соответствует реальному физическому процессу $l_c = t_1$.

Решая (10.13) и (10.15) при $\omega_z < 0$, находим длину пути l_p до точки пересечения траектории с плоскостью $z=0$, а при $\omega_z > 0$ – до точки пересечения траектории фотона с плоскостью $z=H$.

Заслуживает внимания случай $\omega_z = 0$ (с вычислительной точки зрения $\omega_z \rightarrow 0$). Чтобы избежать аварийных остановок компьютера при $\omega_z \rightarrow 0$, целесообразно использовать следующие условия:

$$0 \leq z_c \leq L_{\max} |\omega_z|, \quad \omega_z < 0, \quad (10.18)$$

$$0 \leq H - z_c \leq L_{\max} \omega_z, \quad \omega_z < 0. \quad (10.19)$$

Если соотношения (10.18) и (10.19) не выполняются, то пересечение траектории фотона с плоскостями невозможно.

10.8. Моделирование длины свободного пробега

Вероятность испытать столкновение в точке l для частицы, летящей вдоль вектора направления Ω от точки $l=0$, равна $1-F(l)$, где $F(l)$ – функция распределения случайной величины l . Поэтому вероятность столкновения в интервале $(l+l+dl)$ равна

$$F(l + \Delta l) - F(l) \cong [1 - F(l)][\beta_l \Delta l + O(\Delta l)], \quad (10.20)$$

где $\beta_l \Delta l$ характеризует вероятность столкновения на элементарном отрезке луча Δl (по определению коэффициента ослабления). Разделив на Δl и перейдя к пределу при $\Delta l \rightarrow 0$, получим

$$\frac{dF(l)}{dl} = [1 - F(l)]\beta_l. \quad (10.21)$$

Но $F(l=0) = 0$, откуда

$$F(l) = 1 - \exp\left(-\int_0^l \beta_l dl\right). \quad (10.22)$$

Учитывая, что $\beta_l = \text{const}$ (вследствие использования метода максимального сечения), получаем окончательно

$$F(l) = 1 - \exp(-\beta_l l).$$

Процедура моделирования длины свободного пробега основывается на том, что величина $F(l)$ является случайной и равномерно распределенной на $[0, 1]$, т.е. $F(l) = \gamma$. Из формулы (10.22), с учетом одинакового распределения γ и $(1 - \gamma)$ получаем

$$l = -\beta_l^{-1} \ln \gamma. \quad (10.23)$$

Моделирование пробега связано с получением экспоненциально распределенных случайных чисел, причем прямой расчет по формуле (10.23) достаточно трудоемок. В связи с этим разработаны специальные приемы сокращения времени расчетов. Например, может быть рекомендован алгоритм Вотау-Рафферти, который состоит в следующем. Вырабатываются γ_0 и γ_1 . Если $\gamma_1 < \gamma_0$, то вырабатывается γ_2 , если $\gamma_1 + \gamma_2 < \gamma_0$, то вырабатывается γ_3 и т.д. Как только выполнено условие $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n \geq \gamma_0$, анализируется число n . Если n - четное, то процесс повторяется снова, начиная с выработки чисел γ'_0 и γ'_1 . Если n - нечетное, то $-\ln(\gamma) = (t-1) + \gamma_0$, где t - полное число построенных последовательностей. Как утверждается в (Франк-Каменецкий А.Д., 1978), для получения одного значения $\ln \gamma$ требуется примерно 4.3 числа γ .

10.9. Розыгрыш столкновений

Если установлено, что фотон испытывает столкновение внутри среды, т.е. $l < (l_c, l_p)$, то необходимо выяснить: произошло ложное или истинное столкновение. В первом случае в вычислительной программе следует продолжить моделирование траектории без какого-либо изменения. При этом к счетчику ложных столкновений следует добавить единицу.

Во втором случае следует разыграть тип этого столкновения:

- если это поглощение, то увеличить счетчик поглощений на единицу и приступить к моделированию новой траектории фотона;
- если моделируется неравновесное излучение, то имеется вероятность переизлучения поглощенного фотона;
- если это рассеяние, то необходимо определить новое направление движения и прибавить единицу к счетчику числа рассеяний.

Вопрос о выборе типа столкновения решается следующим образом. Выше указывалось, что при использовании метода максимального сечения вероятность δ -рассеяния есть $p_\delta = \beta_\delta / \beta_{l, \max}$, а вероятность реального взаимодействия $p_{s, \kappa} = 1 - p_\delta$. Поэтому для моделирования типа столкновения следует проверить выполнение условия $p_\delta > \gamma$, означающего, что произошло δ -рассеяние. Иначе считается, что произошло истинное столкновение.

Истинное столкновение может быть как поглощением, так и рассеянием. Генерируя новое случайное число и сравнивая его с вероятностью рассеяния $p_s = \sigma / \beta_l$, делаем вывод относительно типа столкновения. Если $\gamma < p_s$, то произошло рассеяние, а при $\gamma > p_s$, или, что одно и то же, $\gamma < p_\kappa = 1 - p_s$, считается, что произошло поглощение.

10.10. Моделирование процессов поглощения и рассеяния

Пусть в результате взаимодействия фотона с веществом он поглощается. Если исследование процесса переноса излучения проводится в предположении о существовании радиационного равновесия, то поглощение частицы должно сопровождаться эк-

вивалентным актом испускания частицы с той же энергией (на той же частоте излучения), что и у поглощенной. Изучая эти явления на макроскопическом уровне взаимодействия фотона с элементарным объемом вещества можно считать, что среда испустит квант энергии в произвольном направлении.

Часто термодинамическое состояние среды определяется не радиационными процессами, а столкновительными. В этом случае на акте поглощения фотона его история должна заканчиваться, иначе излучательная способность элементарных объемов не будет соответствовать их термодинамически равновесному состоянию.

Сложность алгоритма моделирования рассеяния частицы элементом объема зависит от типа рассеяния. Если рассеяние изотропное, то новое направление движения разыгрывается посредством моделирования изотропного случайного вектора и к счетчику числа рассеяний прибавляется единица. Координаты начала нового отрезка траектории фотона совпадают с координатами столкновения.

Неизотропное рассеяние моделируется различными способами. Наиболее простой из них – транспортное приближение, описан в работе (Марчук Г.И. и др., 1976; Франк-Каменецкий А.Д., 1978). Этот метод получил широкое распространение в теории переноса излучения, в особенности в приближенных аналитических методах. Суть метода состоит в следующем. Как правило, рассеяние азимутально симметрично. Тогда коэффициент дифференциального рассеяния может быть представлен в виде

$$\sigma_s(\Omega', \Omega) = \frac{\sigma p(\mu)}{4\pi}, \quad (10.24)$$

где $p(\mu)$ – индикатриса рассеяния; $\mu = (\Omega' \cdot \Omega)$ – косинус рассеяния по широтному углу. Аппроксимируя $p(\mu)$ соотношением $p(\mu) = (1 - \bar{\mu}) + 2\bar{\mu}\delta(\mu - 1)$, т.е. используя транспортное приближение, формулу (10.24) перепишем в виде

$$\sigma_s(\Omega', \Omega) = \frac{\sigma(1 - \bar{\mu}) + 2\bar{\mu}\delta(\mu - 1)}{4\pi}, \quad (10.25)$$

где $\bar{\mu}$ – средний косинус рассеяния.

Дельта-рассеяние означает просто отсутствие рассеяния. Поэтому можно сделать важный практический вывод: рассеяние моделируется как изотропное, но с уменьшенным на $\bar{\mu}\sigma$ коэффициентом

$$\sigma_s(\Omega', \Omega) \cong \sigma(1 - \bar{\mu}).$$

Остановимся на физическом смысле формулы (10.25), для чего рассмотрим два крайних случая: а) $p(\mu) = 2\delta(\mu - 1)$, при $\bar{\mu} = 1$; б) $p(\mu) = 1$, при $\bar{\mu} = 0$. Отсюда следует, что если рассеяние близко к изотропному (случай б), то $\sigma_s(\Omega', \Omega) = \sigma$, а если рассеяние происходит в основном «вперед», то $\sigma_s(\Omega', \Omega) \ll \sigma$.

Алгоритм моделирования рассеяния при использовании транспортного приближения следующий:

$$\text{при } p_{\delta,s} = [\sigma - \sigma(1 - \bar{\mu})] / \sigma = \bar{\mu} > \gamma - \delta\text{-рассеяние,}$$

при $p_{\delta,s} < \gamma$ - реальное рассеяние.

Когда применяется метод максимального сечения, алгоритм расчета рассеяния в транспортном приближении еще более упрощается. В качестве коэффициента суммарного δ -рассеяния выбирается величина $\beta_\delta = \beta_{r,\max} - [\kappa + (1 - \bar{\mu})\sigma]$ или, по-другому, $\beta_\delta = \beta_{r,\max} - \beta_r + \sigma\bar{\mu}$. Следовательно, учет анизотропности рассеяния в транспортном приближении можно производить на уровне моделирования типа столкновения (истинное столкновение или нет).

Несмотря на кажущуюся простоту этого метода, он не избавляет от необходимости знания вида функции индикатрисы рассеяния, которая часто бывает очень сложной. В некоторых случаях, представляющих практический интерес, приходится отказаться от приближенных методов и моделировать истинную индикатрису рассеяния.

В общем случае индикатриса рассеяния $p(\Omega', \Omega)$ определяется так, что вероятность ухода рассеянного фотона в направлении Ω , лежащем в телесном угле с координатами (φ, θ) , отсчитываемыми от направления Ω , может быть записана в следующем виде (рис. 10.3):

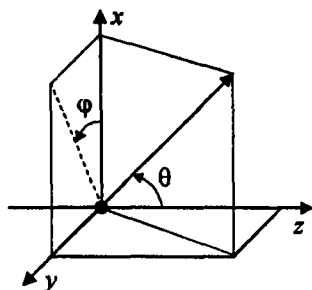


Рис. 10.3. Схема рассеяния фотона

$$dP(\Omega', \Omega) = \frac{p(\varphi, \theta) d\Omega}{4\pi}.$$

Считая распределение по азимутальной координате φ равновероятным и независимым от распределения по широте θ , получаем

$$dP(\Omega', \Omega) = dP_{\varphi} dP_{\theta} = \frac{p(\varphi) d\varphi}{2\pi} \frac{p(\theta) \sin\theta d\theta}{2},$$

$$\gamma_{\varphi} = \int_0^{\varphi} dP_{\varphi} = \frac{\varphi}{2\pi}, \quad \gamma_{\theta} = \int_0^{\theta} dP_{\theta}. \quad (10.26)$$

При изотропном рассеянии по широтному углу $p(\theta) = 1$, поэтому

$$\gamma_{\theta} = \frac{1 - \cos\theta}{2}. \quad (10.27)$$

Если же рассеяние анизотропное, то используется следующий алгоритм. На отрезке $[0, \pi]$ строится функция $\Phi(\theta) = p(\theta) \sin\theta$, после чего она аппроксимируется ломаной кусочно-линейной кривой. Очевидно, что аппроксимация должна быть достаточно аккуратной, чтобы сумма площадей всех треугольников и трапеций была близка к полной площади A_{Σ} под истинной кривой $\Phi(\theta)$. В этом случае можно положить $A(\theta) = \gamma_{\theta} A_{\Sigma}$. Это и есть уравнение для отыскания θ .

Пусть по углу θ индикатриса задана в N_θ точках. Тогда площадь всей фигуры определяется по формуле

$$A_\Sigma = \sum_{i=1}^{N_\theta-1} \frac{(\Phi_i + \Phi_{i+1})(\theta_{i+1} - \theta_i)}{2}. \quad (10.28)$$

В процессе построения суммарной площади A_Σ целесообразно определить массив

$$F_j = \sum_{i=1}^j \frac{(\Phi_i + \Phi_{i+1})(\theta_{i+1} - \theta_i)}{2}, \quad j=1, 2, \dots, N_\theta - 1. \quad (10.29)$$

Тогда последовательность расчета такова:

- 1) находится число j , для которого $F_j > A(\theta)$;
- 2) решается уравнение $F^* = A(\theta) - F_j$, откуда находится

$$\theta = \theta_j + (\theta_{j+1} - \theta_j) \frac{-\Phi_j + \sqrt{\Phi_j^2 + 2F^*(\Phi_{j+1} - \Phi_j) / (\theta_{j+1} - \theta_j)}}{\Phi_{j+1} - \Phi_j}.$$

Независимо от способа моделирования рассеяния, после того как определены координаты φ и θ , следует перейти от системы координат, связанной с центром масс системы «фотон – частица вещества» к лабораторной системе координат. Если в лабораторной системе координат вектор скорости до рассеяния $\Omega' = i\omega'_1 + j\omega'_2 + k\omega'_3$, а $\Omega = i\omega_1 + j\omega_2 + k\omega_3$ – после рассеяния, тогда

$$\omega_1 = \omega'_1 \mu - (\omega'_2 \sin \varphi + \omega'_1 \omega'_3 \cos \varphi) \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 - \omega_3'^2}}, \quad (10.30)$$

$$\omega_2 = \omega'_2 \mu - (\omega'_1 \sin \varphi - \omega'_2 \omega'_3 \cos \varphi) \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 - \omega_3'^2}},$$

$$\omega_3 = \omega'_3 \mu - (1 - \omega_2'^2) \cos \varphi \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 - \omega_3'^2}},$$

где $\mu = \cos \theta$.

10.11. Регистрация конца историй фотонов

В процессе моделирования траекторий фотонов в излучающей и рассеивающей средах накапливается большое количество информации, которая может быть использована для различных целей. Рассмотрим, какая информация требуется для вычисления направленной силы излучения и плотностей радиационных потоков. Для этого необходимо знать количество фотонов, покидающих поверхность, которая ограничивает объем, а также их угловое распределение на произвольно выбранной элементарной площадке. Для определения условного количества энергии, переносимого одной частицей, необходимо знание общего числа частиц испускаемых объемом (напомним, что речь идет о моделируемых квазичастицах), количество актов поглощения и рассеяния, имевших место при имитации движения всех частиц вместе взятых.

Чтобы избежать в дальнейшем неясности в вопросе нахождения энергии частиц, определим это понятие подробнее. Исходя из физического смысла, энергия излучения определяется температурой среды (находящейся в локальном термодинамическом равновесии с излучением) и длиной волны излучения. Несмотря на то, что при моделировании распространения излучения мы используем термин частица или фотон, физически более обосновано подразумевать под этим ансамбль невзаимодействующих частиц, энергия которого определяется не только энергией, переносимой одной частицей, но и числом этих частиц в ансамбле.

10.12. Регистрация актов поглощения

Эта регистрация состоит в подсчете общего числа поглощений. Для этого в программу вводится специальный счетчик, который регистрирует каждое поглощение частицы. Существенным моментом здесь является то, что неважно, в какой зоне излучающего объема произошло поглощение.

Число поглощений, которое, если это диктуется физикой процесса, определяет и число испусканий фотонов в актах взаимодействия с веществом, вместе с числом исходных частиц и составляет общее число фотонов, испущенных объемом.

10.12.1. Регистрация частиц, покидающих исследуемый объем через цилиндрическую поверхность

Каждая частица, достигающая поверхности, является носителем информации, необходимой для расчета направленной излучательной способности цилиндрической поверхности или плотности радиационного потока к ней. Регистрируются следующие данные:

- номер зоны по высоте (вдоль оси z) цилиндрического объема;
- направление полета частицы в системе координат, связанной с нормалью к элементарной площадке, принадлежащей поверхности ограничивающей объем.

По оси z целесообразно использовать шкалу, введенную для дискретизации всего объема. Если частица имеет координату пересечения с цилиндрической поверхностью $z_c \in [z_j, z_{j+1}]$, то в дальнейшем координата z_c не используется, а запоминается лишь номер зоны j , т.е. все частицы, которые покидают j -ю зону, отождествляются между собой по значениям осевой координаты.

Аналогично вводится дискретизация угловых координат. Поскольку исследуемый объем обладает осевой симметрией, то достаточно ввести два массива дискретных значений широты θ_m ($m=1, 2, \dots, N_\theta$) и азимута χ_n ($n=1, 2, \dots, N_\chi$). На рис. 10.4 показаны соответствующие угловые координаты. На этом рисунке $\Omega_{s,n}$ – проекция вектора Ω на площадку S_n .

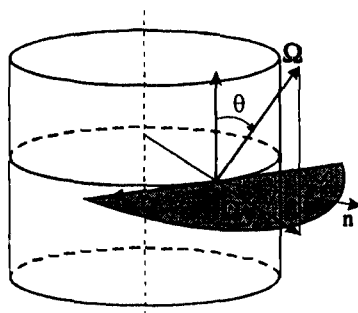


Рис. 10.4. Схема регистрации фотонов, покидающих расчетную область

Алгоритм регистрации частиц на цилиндрической поверхности состоит в следующем. Для каждой вылетающей частицы известны координаты x_c, y_c, z_c , $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. По направляющим косинусам вектора скорости частицы рассчитываются значения косинусов углов

$$\cos\chi = \cos\varphi \cos\beta - \sin\varphi \sin\beta, \quad \cos\theta = \omega_z,$$

где

$$\cos\varphi = \frac{\omega_x}{\sqrt{1-\omega_z^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\omega_y}{\sqrt{1-\omega_z^2}}, \quad (10.31)$$

$$\sin\beta = \frac{y_c}{R}, \quad \cos\beta = \frac{x_c}{R}, \quad R = \frac{D}{2}.$$

Элементы массива чисел фотонов в дискретных зонах определяются при анализе неравенств для каждого вылетающего фотона

$$\cos\theta_m \leq \cos\theta < \cos\theta_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots, N_\theta - 1,$$

$$\cos\chi_n \leq \cos\chi < \cos\chi_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N_\chi - 1,$$

$$z_j \leq z < z_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, NJ.$$

Формируются следующие массивы. В первом массиве регистрируются частицы, вектор скорости которых имеет произвольную азимутальную угловую координату χ , но фиксированный направляющий косинус $\omega_z = \cos\theta$. Это позволяет получить *силу излучения* цилиндра от участка длиной $(z_{j+1} - z_j)$ в любом из заданных углов наблюдения θ . Расстояние наблюдения должно быть много больше диаметра цилиндра.

Под *силой излучения* понимают интеграл от направленной излучательной способности поверхности, испускающей излучение, по площади этой поверхности, видимой с большого расстояния под заданным углом θ .

Второй массив нужен для регистрации фотонов, вылетающих с цилиндрической поверхности под заданными углами χ и θ .

Направленная сила излучения, получающаяся при использовании этого массива чисел, может быть интерпретирована как экспериментально замеренная сила излучения объема, т.е. когда приемник излучения находится в непосредственной близости от поверхности.

10.12.2. Регистрация фотонов на плоскостях $z = 0$ и $z = H$

Регистрация фотонов на любой плоскости, нормальной к оси симметрии, производится одинаково, поэтому рассмотрим лишь плоскость $z = H$. В описываемом варианте алгоритма моделирования переноса излучения определяется общее количество фотонов, покидающих кольцевые площадки с радиусами границ r_i и r_{i+1} в выделенном направлении. В силу этого оказывается достаточно регистрировать фотоны только по угловой координате θ вектора скорости. Подчеркнем, что это справедливо лишь при наличии осевой симметрии задачи.

По аналогии с регистрацией на цилиндрической поверхности вводится дискретизация углов наблюдения θ_m . Точно таким же образом ищется и номер угловой зоны, соответствующей рассматриваемому вектору скорости.

10.13. Определение спектральной силы излучения по результатам моделирования

Предположим, что термодинамическое состояние среды определяется условием локального термодинамического равновесия. Тогда энергия одного фотона (ансамбля частиц) определяется из условия

$$e_f = \frac{4\pi}{N_f} \sum_{l=1}^{N_l} \left(\kappa_{p,l} J_{b,l}^p + \kappa_{g,l} J_{b,l}^g \right) V_l. \quad (10.32)$$

Зная общее число фотонов, двигающихся в заданном направлении, можно вычислить спектральную силу излучения. Сила излучения единичной площадки вычисляется с использованием теоремы о среднем

$$S(\chi^*, \theta^*) = \frac{N_f(\Delta\Omega)e_f}{A(\chi_{n+1} - \chi_n)(\cos\theta_m - \cos\theta_{m+1})}, \quad (10.33)$$

где $\chi^* \in [\chi_n, \chi_{n+1}]$, $\theta^* \in [\theta_m, \theta_{m+1}]$; $N_f(\Delta\Omega)$ – число фотонов, покидающих элемент поверхности площадью A в пределах телесного угла $\Delta\Omega$; $\chi_n, \chi_{n+1}, \theta_m, \theta_{m+1}$ – угловые координаты, определяющие телесный угол $\Delta\Omega$.

Спектральная интенсивность излучения определяется как

$$J(\chi^*, \theta^*) = \frac{2N_f(\Delta\Omega)e_f}{A(\chi_{n+1} - \chi_n)(\cos^2\theta_m - \cos^2\theta_{m+1})}. \quad (10.34)$$

10.14. Определение плотностей радиационных потоков

Расчет плотностей спектральных потоков излучения к поверхности, ограничивающей исследуемую область, производится также с использованием величины энергии одной частицы. Достаточно подсчитать общее количество фотонов N_A , достигающих выделенную площадку на поверхности под любыми углами.

Плотность одностороннего потока излучения найдется из формулы

$$W_A = \frac{N_A e_f}{A}. \quad (10.35)$$

10.15. Особенности имитационного моделирования в твердых и жидких средах

Изложенные алгоритмы прямого численного моделирования при незначительной модификации могут применяться для расчета радиационного теплообмена в твердых и жидких средах, а также при решении сопряженных задач сложного (лучисто-конвективного и лучисто-кондуктивного) теплообмена, возникающих при анализе тепловой защиты и различных технологических процессов.

При рассмотрении указанных задач необходимо учитывать следующие особенности:

- 1) отражение и пропускание излучения поверхностями в случаях, когда излучение падает на среду с относительным показателем преломления (n), большим единицы;
- 2) отражение и пропускание излучения поверхностями в случаях, когда излучение выходит из среды с $n > 1$.

Методы Монте-Карло предоставляют большие возможности по учету оптических свойств границ раздела, частными случаями которых являются диффузные и гладкие поверхности. Поясним отмеченные особенности для случая преломления и отражения плоской волны на гладкой границе раздела двух изотропных сред (рис. 10.5).

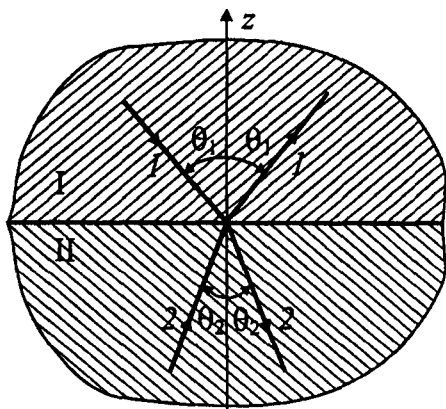


Рис. 10.5. Прохождение излучения через границу раздела сред

Рассмотрим неполяризованное излучение. Имитация прохождения фотонов через границу раздела сред I–II состоит в определении вероятности каждому из моделируемых фотонов отразиться от поверхности или пройти через нее, изменив первоначальное направление (преломление плоского фронта волны). Вероятность отражения луча I отождествляется с коэффициентом отражения, даваемым формулой Френеля (Борн М. и др., 1973)

$$R = 0.5 \left[\frac{(n^2 - 1 + \cos^2 \theta_1)^{1/2} - 1 + \cos \theta_1}{(n^2 - 1 + \cos^2 \theta_1)^{1/2} + 1 - \cos \theta_1} \right]^2 \times \\ \times \left[\frac{(n^2 - 1 + \cos^2 \theta_1)^{1/2} - \cos \theta_1}{(n^2 - 1 + \cos^2 \theta_1)^{1/2} + \cos \theta_1} \right]^2, \quad (10.36)$$

а направление вектора траектории после преломления определяется законом Снелла

$$\sin \theta_2 = \sin \theta_1 / n. \quad (10.37)$$

Отражательная способность неполяризованного света, падающего на границу раздела изнутри (луч 2), определяется по формуле

$$R = 0.5 \left\{ \left[\frac{\mu(1 - n^2 + n^2 \mu^2)^{1/2} - n(1 - \mu^2)}{\mu(1 - n^2 + n^2 \mu^2)^{1/2} + n(1 - \mu^2)} \right]^2 + 1 \right\} \times \\ \times \frac{n\mu - (1 - n^2 + n^2 \mu^2)^{1/2}}{n\mu + (1 - n^2 + n^2 \mu^2)^{1/2}}, \quad \mu = \cos \theta. \quad (10.38)$$

При численном моделировании процессов отражения фотонов от внутренней границы образца материала могут возникнуть особенности, связанные с наличием угла полного внутреннего отражения. Поэтому формулу (10.38) следует применять только при

$$\mu > \left[(n^2 - 1) / n^2 \right]^{1/2},$$

что эквивалентно условию положительности подкоренного выражения (10.38). В противном случае, $R = 1$.

Моделирование отражения фотонов от границы можно вести по схеме, предложенной в работе (Франк-Каменецкий А.Д., 1978).

Поскольку отражательная способность меняется от 0 до 1, то ее можно моделировать непосредственно случайным числом γ , равномерно распределенным на отрезке $[0, 1]$. Отражательная способность рассчитывается для каждого фотона, достигшего поверхности, и сравнивается с величиной γ . Если $R > \gamma$, то фотон пропускается поверхностью, иначе – фотон отражается.

Для фотона, вылетевшего из твердого диэлектрика, угол вылета θ_1 определяется по формуле

$$\cos \theta_1 = \left[1 - n^2 (1 - \cos^2 \theta_2) \right]^{1/2}. \quad (10.39)$$

Так как падающий, отраженный и преломленный лучи лежат в одной плоскости, то азимутальный угол вылета равняется азимутальному углу падения.

Наличие угла полного внутреннего отражения необходимо учитывать при численной имитации поведения фотонов собственного излучения. Если поглощательная способность материала велика, то фактически никаких дополнительных мер предусматривать не следует, поскольку фотоны достаточно быстро поглощаются. Если же поглощательная способность мала, то во избежание чрезмерных затрат машинного времени требуется использовать специальные приемы. Например, если решается задача определения испускательной способности нерассеивающего материала, то фотоны, претерпевающие полное внутреннее отражение, можно не моделировать.

В заключение отметим, что при моделировании излучательной способности материала с $n > 1$ необходимо учитывать соотношение между интенсивностями излучения абсолютно черного тела в среде $J_b(T)$ и в вакууме $J_b^0(T) = J_b(T)/n^2$.

10.16. Оценка достоверности имитации и некоторые другие алгоритмы статистического моделирования

Все методы Монте-Карло имеют своим преимуществом то, что допускают оценку статистической ошибки в процессе моделирования. Пусть по результатам N независимых опытов получе-

на цепочка значений случайной величины (случайные реализации) $\xi_i, i=1, 2, \dots, N$. Наша задача состоит в определении не только наиболее вероятного значения искомой величины ξ , но и в получении количественных характеристик качества статистического моделирования.

Приближенное значение искомой величины, определяемое по конечному числу испытаний, называется ее оценкой и обозначается $\bar{\xi}$. Очевидно, что оценка есть также случайная величина. Наиболее вероятным значением искомой величины ξ является ее математическое ожидание, оценка которого дается средним арифметическим

$$\bar{M}[\xi] = \sum_{i=1}^N \xi_i / N. \quad (10.40)$$

К оценке $\bar{\xi}$ случайной величины ξ предъявляется ряд требований: она должна быть *состоятельной, несмещенной и эффективной*. Состоятельность оценки определяется как ее вероятностная сходимость к искомой величине при бесконечном увеличении N . Несмещенность оценки означает отсутствие систематической ошибки, т.е. $M[\bar{\xi}] = \xi$. И, наконец, эффективность оценки определяется условием минимальности ее дисперсии, $D[\bar{\xi}] = \min$.

Дисперсия случайной величины ξ определяется по формуле

$$D[\xi] = M[(\xi - M(\xi))^2] = M[\xi^2] - (M[\xi])^2, \quad (10.41)$$

поэтому ее оценка может быть представлена как

$$\bar{D}[\xi] = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 / N - (\bar{M}[\xi])^2. \quad (10.42)$$

Однако оценка (10.42) хотя и состоятельная, но не является несмещенной (Вентцель Е.С. и др., 1988). Несмещенная оценка дисперсии получается при следующей коррекции (несущественной при больших значениях N):

$$\bar{D}[\xi] = \frac{N}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N \xi_i^2 / N - (\bar{M}[\xi])^2 \right]. \quad (10.43)$$

Еще раз подчеркнем, что \tilde{M} и \tilde{D} – вероятностные величины. Надежность оценок числовых характеристик \tilde{M} и \tilde{D} позволяет установить центральная предельная теорема, которая гласит, что сумма большого числа N независимых случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному, с математическим ожиданием $M[\tilde{M}] = M$ и дисперсией $D[\tilde{M}] = D[\xi]/N$, а значит, и средним квадратическим отклонением $\sigma[\tilde{M}] = \sqrt{D[\tilde{M}]} = \sqrt{D[\xi]/N}$. Следовательно, вероятность отклонения оценки $M[\xi]$ от своего математического ожидания в пределах наперед заданного числа ε приближенно равна

$$P\left\{\left|\tilde{M} - M\right| < \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\varepsilon/\sigma[\tilde{M}]\right), \quad (10.44)$$

где Φ – функция Лапласа.

Рассмотрим оценку достоверности результатов моделирования, когда наиболее вероятностные величины оцениваются по частоте их реализации (Вентцель Е.С. и др., 1988), как это делается, например, при расчете силы излучения поверхности. Пусть из N опытов событие A , состоящее в вылете фотона в заданном направлении, наступает в n случаях. Тогда частота события A определяется по формуле $p^* = n/N$. Так как опыты независимы, случайная величина n распределена по биномиальному закону с параметрами N и p (p – вероятность события A). Ее математическое ожидание равно Np , а дисперсия – $Np(1-p)$.

Остается выяснить степень близости величин p^* и p . Для этого представим n в виде суммы случайных величин δ_i

$$n = \sum_{i=1}^N \delta_i, \quad (10.45)$$

где $\delta_i = 1$, если событие A произошло, и $\delta_i = 0$ в противном случае. Тогда, в соответствии с центральной предельной теоремой, случайная величина n распределена нормально с $M = pN$ и $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$. Но величина p^* есть линейная функция от n , поэтому

$$M[p^*] = p, \quad \sigma[p^*] = \sqrt{D[p^*]} = \sqrt{(1-p)p/N}. \quad (10.46)$$

Приближенно положив $p = p^*$ и задав произвольное число ε , получим искомую количественную характеристику

$$P\{|p^* - p| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\varepsilon/\sigma[p^*]\right) = 2\Phi\left(\varepsilon N/\sqrt{p^*(1-p^*)}\right). \quad (10.47)$$

Более подробно с этими и другими оценками случайных величин можно познакомиться в работах по приложениям теории вероятностей и статистическому анализу, например (Вентцель Е.С. и др., 1988; Ермаков С.М. и др., 1982; Соболев И.М., 1973).

Изложенный выше алгоритм расчета излучательной способности светорассеивающих объемов является простейшим. Его применение оправдано наглядностью и эффективностью получения больших объемов информации в одном расчете. Однако он обладает и серьезными недостатками, которые не позволяют рассматривать его как универсальный. Для примера достаточно привести задачу нахождения мало-углового рассеяния направленного пучка света, падающего на светорассеивающий слой (Домбровский Л.А. и др., 1990). Использование конечной величины телесного угла при регистрации вылетающих из объема фотонов приводит к очень большой погрешности в той угловой зоне, которой будут принадлежать фотоны нерассеянного излучения. А уменьшение размеров этой угловой зоны приведет к потере точности из-за того, что все меньшее число фотонов будут в нее попадать.

При решении задач, связанных с поиском узконаправленных потоков излучения, а также задач определения энергии, поглощаемой в объемах малых размеров (по сравнению с моделируемой областью), расчетом прохождения излучения через слои очень больших оптических толщин и т.п., использование изложенных алгоритмов без модификации является нецелесообразным.

Альтернативные алгоритмы статистического моделирования процессов переноса излучения изложены в работах (Ермаков С.М. и др., 1982; Марчук Г.И. и др., 1976; Мельниченко А.С. и др., 1977; Соболев И.М., 1973), поэтому здесь отметим лишь их качественные стороны.

Собственно один из таких алгоритмов – метод максимального сечения, уже был рассмотрен выше. Основное его преимущество состоит в том, что он позволяет избежать многократного решения уравнений (10.13)–(10.15) в пределах каждой из пространственных зон. Поскольку геометрический расчетный блок, реализующий решение указанных уравнений, является самым трудоемким в программе, то применение метода максимального сечения дает экономию по времени расчета в десятки раз.

Метод максимального сечения не эффективен, по крайней мере, в двух случаях. Во-первых, когда моделируемый объем содержит участки с сильно различающимися свойствами, и введение максимального сечения является чрезмерной оценкой оптических свойств с реально малыми сечениями поглощения. Во-вторых, при имитации переноса излучения в спектральных диапазонах, содержащих атомные или молекулярные линии. Специфика линейчатого спектра состоит в том, что пропускание всего участка физического пути до столкновения фотона с частицей среды не является аддитивной функцией пропускания отдельных его отрезков. В указанных расчетных случаях более эффективным может оказаться способ прямого моделирования траекторий фотонов внутри каждой из пространственных зон.

Теоретической предпосылкой математически строгого анализа методов статистического моделирования процессов переноса является установление соответствия между двумя фактами. С одной стороны, уравнение переноса излучения может быть представлено в виде интегрального уравнения Фретгольма 2-го рода, а его решение представлено в виде ряда Неймана (Ермаков С.М. и др., 1982). С другой стороны, по своему физическому смыслу процесс блуждания фотонов по светорассеивающей, поглощающей и излучающей среде имеет своим математическим прообразом однородные цепи Маркова, главной особенностью которых является независимость вероятности перехода моделируемой величины из одного состояния в другое от номера этого состояния.

В теории методов Монте-Карло разработаны способы решения интегральных уравнений посредством моделирования цепей Маркова. Так что процедура имитации движения фотона в среде

всегда может быть поставлена в прямое соответствие процедуре решения интегрального уравнения переноса. Введение любой модификации в алгоритм моделирования может анализироваться на примере соответствующего изменения ядра интегрального уравнения и следствий по сходимости ряда Неймана, к которым это изменение приведет. Примером этому может служить обоснование метода максимального сечения.

Введение модификаций в алгоритмы имитации всегда приводит к тому, что моделируется уже не реальный, а некоторый фиктивный процесс (часто эти методы называют *неимитационными*). Задача теории при этом состоит в поиске наиболее оптимального фиктивного процесса и в доказательстве сходимости его результатов к истинным результатам. Среди наиболее развитых модифицирующих алгоритмов выделим *весовые методы* и *локальные оценки*. Если в этот перечень включить рассмотренный выше алгоритм имитации, то по способу регистрации конца траекторий фотонов его следует отнести к методам *нелокальных оценок* (методы интегральной выборки).

Суть весового метода состоит в том, что вместо прекращения имитации траектории фотона (при его поглощении или вылете из расчетной области) ему приписывается некоторый вес, отвечающий вероятности продолжать движение внутри среды, и процесс имитации продолжается. В работе (Соболь И.М., 1973) предложено интерпретировать весовой метод следующим наглядным способом. Пусть в начальной точке траектории элементарным объемом среды испущен не один фотон, а пакет, состоящий из большого числа W_0 . Тогда при столкновении фотона (пакета фотонов) с частицей среды поглощается kW_0/β фотонов, а $\sigma W_0/\beta$ — рассеивается. Значит, следующий отрезок траектории проходят уже $W_1 = \sigma W_0/\beta$ фотонов и т.д. Таким образом, при каждом столкновении нет необходимости разыгрывать вероятность поглощения, а следует лишь изменить его вес (количество фотонов в пакете). Процесс моделирования можно закончить, когда вес фотона станет меньше наперед заданного числа, обусловленного решаемой задачей. Отмечается, что дисперсия результатов указанного весового метода не хуже дисперсии результатов прямого

имитационного моделирования. Оптимизация весовых методов рассматривается в работах (Михайлов Г.А., 1974, 1987).

Своеобразной разновидностью весовых методов являются: метод подобных траекторий (зависимых испытаний), когда результаты одной серии моделирования применяются к нескольким геометрически подобным задачам, а также метод аналитического интегрирования части случайных переменных. Последний метод с успехом используется при решении задач теплообмена излучением в полубесконечных объемах: бесконечный цилиндр моделируется конечным цилиндром с зеркальными плоскостями $z=0$ и $z=H$, а бесконечный плоский слой – конечным цилиндром с зеркальной цилиндрической границей.

При решении ряда задач весьма полезными могут оказаться методы аналитического интегрирования (при разделении фотонов на испытавшие и не испытавшие столкновения), а также метод локальной выборки. Метод локальной выборки, применяемый для нахождения направленной излучательной способности, состоит в оценке вероятности для фотона вылететь из объема в заданном направлении после каждого акта рассеяния. Очевидно, что этот метод может использоваться совместно с другими весовыми методами. Кроме перечисленных методов, обратим внимание на работу (Золотухин В.Г., Усиков Д.А., 1979), в которой изложена теория возмущений применительно к методам имитационного моделирования, позволяющая путем модификации стандартных алгоритмов учитывать эффекты, дающие относительно малый вклад в итоговое решение.

В заключение рассмотрения особенностей статистического моделирования переноса излучения в излучающих, поглощающих и рассеивающих средах отметим, что во многих работах, посвященных аналогичным вопросам (Марчук Г.И. и др., 1976; Поляченко А.А., 1987; Франк-Каменецкий А.Д., 1978; Хисамутдинов А.И. и др., 1985), уделяется внимание проблемам организации вычислительного процесса и создания комплексов программ.

ГЛАВА 11

МЕТОДЫ УЧЕТА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОГЛОЩЕНИЯ В ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ

Интегрирование по частоте является одной из наиболее сложных задач в проблеме интегрирования уравнения переноса из-за сильной зависимости оптических свойств от частоты излучения. Развитие методов интегрирования уравнения переноса излучения по спектру непосредственно связано с двумя факторами: совершенствованием моделей и методов расчета спектральных оптических свойств (создания так называемых *спектральных оптических моделей*) и увеличением производительности компьютеров.

Разнообразие спектральных оптических моделей порождает большое число способов учета спектральной зависимости коэффициентов и функций, входящих в уравнение переноса излучения. Систематизация оптических моделей дана в следующем разделе.

Заметим, что спектральная зависимость коэффициентов и функций далее будет обозначаться индексом ω – волнового числа излучения. Как отмечалось в главе 1, между единицами измерения спектральной зависимости существуют взаимно однозначное соответствие, поэтому в принципе нет разницы в том, какую переменную использовать. Тем не менее, такая запись часто представляется более предпочтительной, поскольку в этом случае пространственные и частотные переменные имеют схожие размерности (см и см^{-1}), а местоположение спектральных линий испускания нагретых газов определяется простой разностью табличных значений энергий квантовых состояний. Немаловажное значение имеет также сложившаяся в литературе по теплообмену излучением традиция.

11.1. Классификация спектральных оптических моделей

При решении задач радиационного и сложного теплообмена в газах и низкотемпературной плазме всегда приходится использовать те или иные модели переноса теплового излучения, составными элементами которых являются модели оптических свойств среды и радиационного переноса. Для того чтобы создать модель оптических свойств смесей газов и низкотемпературной плазмы сложного химического состава необходимо иметь возможность определять состав смеси в каждой точке исследуемого объема, установить закон распределения частиц по возбужденным энергетическим состояниям (сформулировать термодинамическую модель среды), принять во внимание многообразие элементарных радиационных процессов, протекающих с участием каждой из частиц смеси и определить вклад каждого из этих процессов в суммарное поглощение или испускание данного элементарного физического объема в выделенном спектральном диапазоне. Столь большое разнообразие задач делает проблему построения оптических моделей нагретых газов и низкотемпературной плазмы сложной многофакторной задачей.

В настоящее время в мире особое внимание уделяется проблеме компьютерного построения оптических моделей смесей газов и плазмы, предназначенных для решения задач сложного теплообмена, и основанных на использовании квантово-механических и квазиклассических моделей элементарных радиационных процессов, учитываемых в таких моделях. Очевидно, что здесь кроется основное противоречие обсуждаемой проблемы. С одной стороны, расчетные модели должны быть универсальными и теоретически обоснованными для того, чтобы можно было создавать оптические модели любой сложности для произвольных смесей газов и плазмы. С другой стороны, подробность описания спектральных оптических свойств должна быть адекватной решаемой задаче радиационного и сложного теплообмена, где не всегда требуется высокое спектральное разрешение.

Как уже отмечалось, основа теории и практики создания спектральных оптических моделей для радиационной газодина-

мики была заложена более 40 лет назад (Armstrong В.Н., et al., 1961; Авилова И.В. и др., 1970; Каменщиков В.А. и др., 1971). Эти модели широко используются в научных исследованиях (в первую очередь в аэрофизике) до настоящего времени. Вместе с этим, в последнее десятилетие наблюдается повышение интереса к вычислительным технологиям создания оптических моделей сред в связи с интенсивным развитием персональных ЭВМ (Романов Г.С. и др., 1993; Суржиков С.Т., 1992; Park Ch., 1990). В настоящее время наблюдается качественный скачок в способах обработки обширной информации, что всегда являлось критическим для обсуждаемой проблемы. Специалисты ведущих научных групп мира в этой области знаний сходятся во мнении, что центральными проблемами сегодняшнего дня являются верификация и оптимизация используемых вычислительных моделей элементарных радиационных процессов, высококвалифицированная экспертная оценка исходной спектроскопической информации, а также систематизация компьютерных моделей, число которых быстро увеличивается с каждым годом (Суржиков С.Т., 2004 (а)).

Среди радиационных моделей простейшими являются приближения оптически тонкой и оптически толстой сред. Однако даже в этих случаях необходимо иметь в распоряжении интегральные по Планку или Росселанду коэффициенты поглощения, что для смесей газов произвольного химического состава является весьма трудоемкой задачей.

Если приближения оптически тонкой и оптически толстой сред использовать нельзя, что бывает в большинстве случаев представляющих практический интерес для теории сложного теплообмена, необходимо создавать адекватные исследуемому явлению оптические модели среды и соответствующие модели переноса теплового излучения. Разнообразию решаемых на практике задач определяет разнообразие моделей, которые можно сформулировать.

При построении компьютерных оптических моделей теории радиационного и сложного теплообмена используются следующие основные понятия.

Оптической моделью среды называется совокупность спектральных, квазиспектральных, групповых и (или) комбинированных моделей спектральной зависимости коэффициента поглощения $k_{\omega}(T, \varphi)$ (или коэффициента испускания), представленных в графической, табличной, аналитической форме или в виде компьютерной программы, позволяющей получить требуемое число по вводимым параметрам ω, T, φ . Здесь ω – волновое число излучения (используются также длина волны излучения λ и частота излучения ν); T – температура; φ – набор параметров, определяющих химический состав смеси газов (плотность или давление при исходном элементном составе и температуре, набор концентраций химических компонентов). При построении радиационных моделей неравновесных сред под температурой T следует понимать набор эффективных температур, а в набор параметров φ могут входить заселенности отдельных энергетических состояний атомных и молекулярных частиц.

Спектральная модель коэффициента поглощения – функция, построенная с учетом непрерывной и линейчатой структуры спектра без каких-либо усредняющих процедур. Часто эту модель называют *синтетическим* или *полинейчатым (line-by-line)* спектром коэффициента поглощения. Пример спектральной модели показан на рис. 11.1.

Групповая модель $k_{\Delta\omega}(T, \varphi)$ – совокупность значений коэффициентов поглощения, усредненных в пределах спектральных диапазонов (спектральных групп) $\Delta\omega$, где указанные функции считаются независимыми от волнового числа. На рис. 11.2 показан пример групповой модели коэффициентов поглощения смеси газов, составляющих атмосферу Марса. В данном случае усреднение спектральных коэффициентов поглощения производилось в пределах 37 спектральных групп (Суржиков С.Т., 2004 (в)).

При любом графическом или табличном представлении спектральной модели всегда используется групповая модель или дается процедура интерполяции по волновому числу между узловыми значениями. В практике решения задач радиационного переноса, как правило, используются групповые модели, основанные на квазиспектральных моделях.

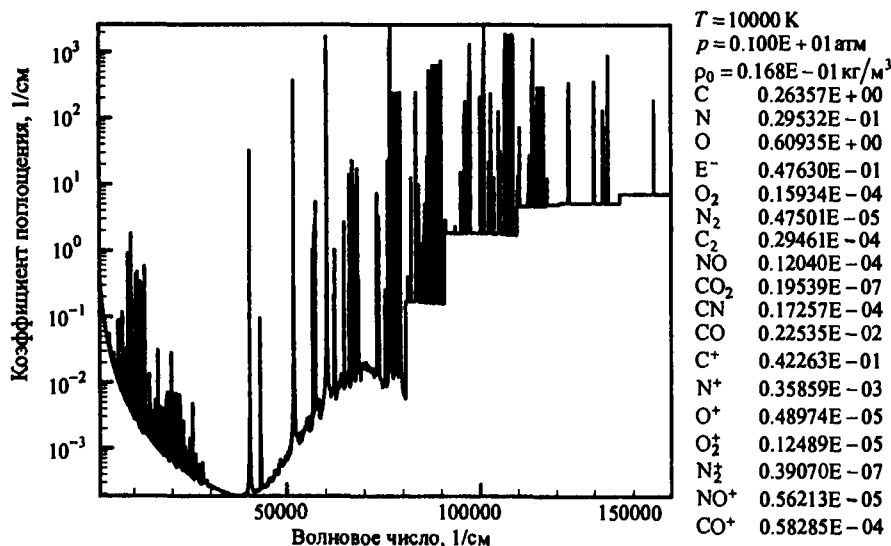


Рис. 11.1. Спектральный коэффициент поглощения смеси газов CO₂ (95.37%) и N₂ (4.63%) при температуре 10000 К и давлении 1 атм. Указан объемный состав

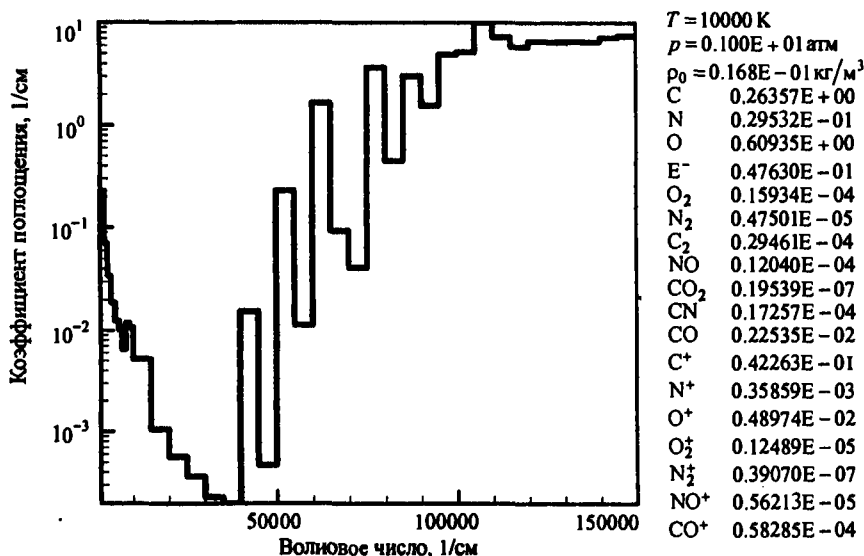


Рис. 11.2. 37-ми групповой коэффициент поглощения смеси газов CO₂ (95.37%) и N₂ (4.63%) при температуре 10000 К и давлении 1 атм. Указан объемный состав

Квазиспектральная модель – это такая модель, при получении которой использовалась та или иная процедура усреднения по тонкой (линейчатой) структуре спектра. Например, коэффициент поглощения в электронных спектрах двухатомных молекул обычно усредняют по вращательной структуре (рис. 11.3; здесь полный спектральный диапазон $\Delta\Omega = 10000 + 30000 \text{ см}^{-1}$, а диапазон усреднения $\Delta\omega = 50 \text{ см}^{-1}$).

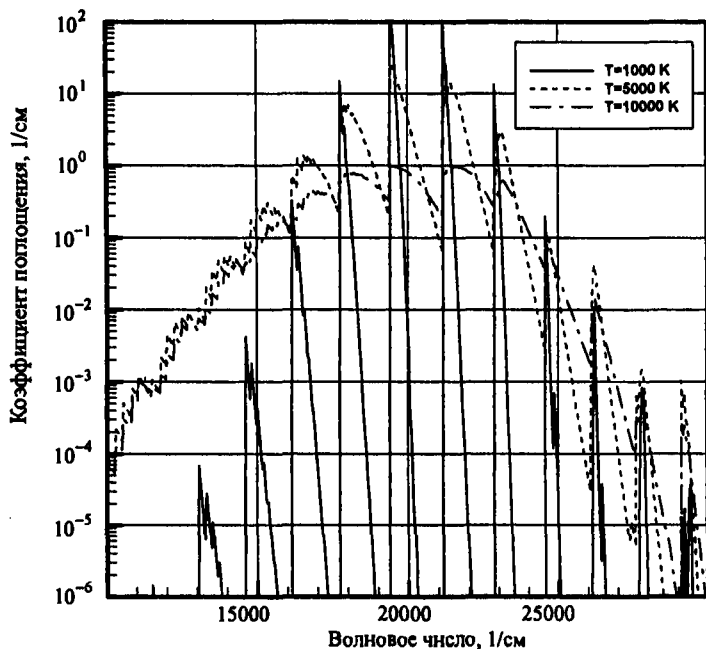


Рис. 11.3. Спектральный коэффициент поглощения при разных температурах, усредненный по вращательной структуре. Молекула C_2 , переход $d^3\Pi_g - a^2\Pi_u$ (система Свана)

Для сравнения на рис. 11.4 представлена вращательная структура спектра поглощения узкого спектрального участка. В этом случае полный спектральный диапазон $\Delta\Omega = 20100 + 20200 \text{ см}^{-1}$, а диапазон усреднения $\Delta\omega = 0.01 \text{ см}^{-1}$. Хорошо видно, что при усреднении исчезает осцилляционная структура спектра на масштабах, характерных для поперечных размеров вращательных

линий, но зависимость от волнового числа на масштабах, характерных для колебательных полос спектра, остается.

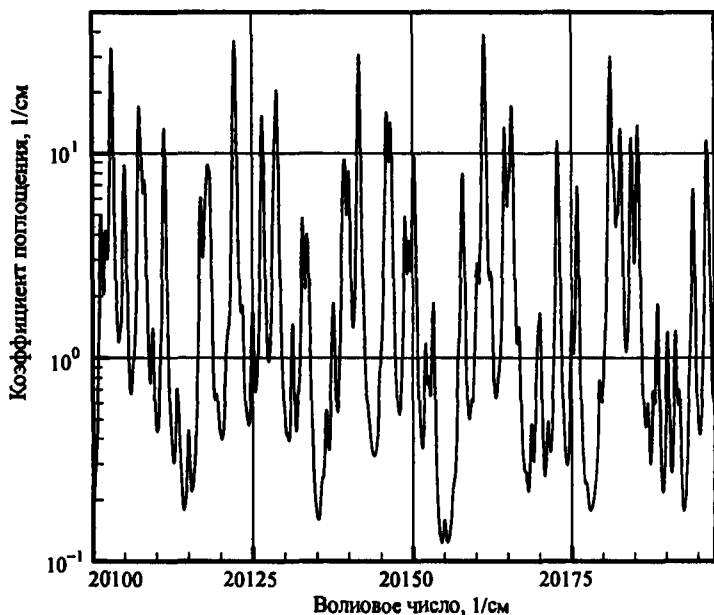


Рис. 11.4. Вращательный спектр коэффициента поглощения при $T=10000$ К. Молекула C_2 , переход $d^3\Pi_g - a^2\Pi_u$ (система Свана)

Очевидно, что шаг усреднения $\Delta\omega$ в квазинепрерывной модели должен заметно превосходить характерное значение полуширины линии $\gamma \sim 0.01 + 0.1 \text{ см}^{-1}$, что в задачах радиационной газовой динамики обычно выполняется с большим запасом, так как при числе участков усреднения от 2–10 (простейшая групповая модель) до ~ 1000 (многогрупповая модель) в полном спектральном диапазоне $\Delta\Omega = 1000 + 250000 \text{ см}^{-1}$ средний размер спектральной группы составляет $\sim 200 + 10000 \text{ см}^{-1}$.

Еще один пример квазиспектральной модели коэффициента поглощения в инфракрасной области для высокотемпературных паров H_2O показан на рис. 11.5.

Комбинированная оптическая модель – это модель линейчатого поглощения (атомного или молекулярного спектра) на фоне

непрерывного или усредненного спектра (как правило, атомные линии на фоне групповой модели). Спектральный коэффициент поглощения, представленный на рис. 11.1, фактически показывает комбинированную оптическую модель, поскольку спектр вращательных линий здесь не разрешен, и атомные линии показаны на фоне квазинепрерывного спектра.

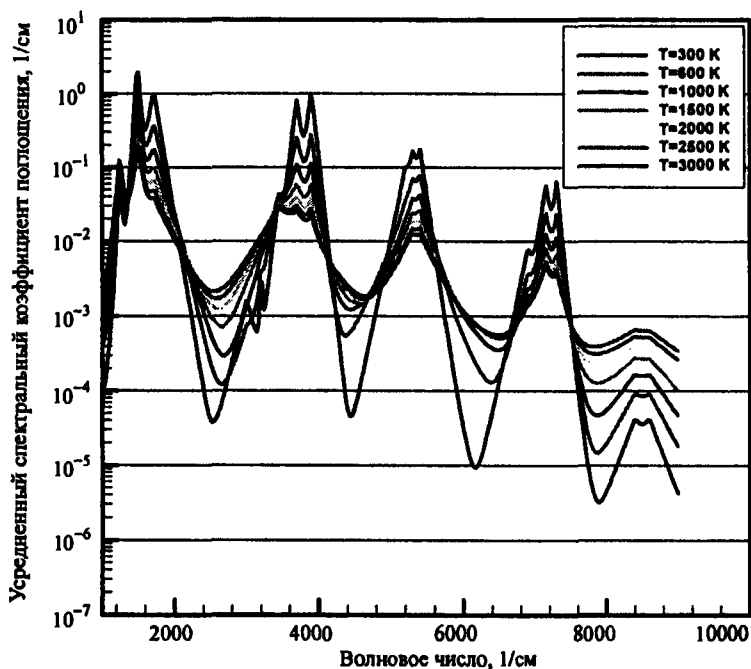


Рис. 11.5. Усредненный по вращательной структуре коэффициент поглощения H_2O при давлении 1 атм

Все перечисленные типы оптических моделей одинаково формулируются как в отношении спектральных коэффициентов поглощения, так и испускания. Связь между этими коэффициентами проще всего устанавливается при локальном термодинамическом равновесии.

При построении спектральных оптических моделей среды (коэффициентов поглощения и испускания) для неравновесных условий в целом можно использовать аналогичную классифика-

цию, однако следует иметь в виду, что неотъемлемой составной частью таких моделей является кинетическая модель заселенностей возбужденных состояний атомных и молекулярных частиц. Проблемы, связанные с созданием оптических моделей неравновесных сред, обсуждаются в работе (Биберман Л.М. и др., 1982). Среди универсальных компьютерных реализаций оптических моделей неравновесных сред можно отметить программу Ч. Парка (Park Ch., 1990) NEQAIR.

При решении задач лучистого переноса проблема построения оптической модели среды является лишь промежуточным этапом. Далее эту модель необходимо использовать при решении уравнения переноса с целью определения требуемых радиационных характеристик (интенсивности излучения, плотностей лучистых потоков и их дивергенций, излучательных и поглощательных способностей объемов и т.п.). При этом не всякая оптическая модель является приемлемой или реализуемой, что вызывает необходимость создания радиационной модели среды.

Радиационная модель среды – это совокупность оптической модели среды и модели радиационного переноса, позволяющая оптимальным образом решить задачу нахождения требуемых радиационных характеристик. Практическая трудность проблемы создания радиационной модели среды состоит в том, что невозможно формально сочетать любую оптическую модель с любым методом расчета переноса излучения. Приходится согласовывать эти модели со значительной вероятностью их модификации.

Наиболее простым способом компьютерного построения радиационных моделей сред в настоящее время является алгоритм пробных решений. Основу этого алгоритма составляет вычислительная система построения оптических моделей сред объединенная с программными модулями, реализующими различные методы расчета переноса теплового излучения.

С использованием оптической модели можно рассчитать интегральные характеристики радиационного переноса, которые широко используются в задачах теплообмена излучением и радиационной газовой динамики. Среди них особое место занимают следующие интегральные характеристики:

1) *среднепланковский коэффициент поглощения*

$$\kappa_P = \frac{\int \kappa_\omega J_{b,\omega} d\omega}{\int J_{b,\omega} d\omega}, \quad (11.1)$$

где $J_{b,\omega}$ – спектральная функция Планка;

2) *среднеросселандовский коэффициент поглощения*

$$\kappa_R^{-1} = \frac{\int \kappa_\omega^{-1} (dJ_{b,\omega}/dT) d\omega}{\int (dJ_{b,\omega}/dT) d\omega}; \quad (11.2)$$

3) *среднеросселандовская длина свободного пробега фотонов*

$$L_R = \frac{\pi}{4\bar{\sigma}T^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\omega} \frac{\partial J_{b,\omega}}{\partial T} d\omega; \quad (11.3)$$

4) *интегральная излучательная способность*

$$Q_{em} = 4\kappa_P \bar{\sigma}T^4; \quad (11.4)$$

5) *коэффициент радиационной теплопроводности*

$$\lambda_R = \frac{16}{3} \frac{1}{\kappa_R} \bar{\sigma}T^3, \quad \kappa_R = \frac{1}{L_R}. \quad (11.5)$$

Используя аналогичные формулы, можно рассчитать соответствующие групповые функции, например, групповые среднепланковский и среднеросселандовский коэффициенты поглощения:

$$\kappa_{P,\Delta\omega} = \frac{\int \kappa_\omega J_{b,\omega} d\omega}{\int J_{b,\omega} d\omega}, \quad \kappa_{R,\Delta\omega}^{-1} = \frac{\int \kappa_\omega^{-1} \frac{dJ_{b,\omega}}{dT} d\omega}{\int \frac{dJ_{b,\omega}}{dT} d\omega}. \quad (11.6)$$

Вывод приведенных коэффициентов дан в следующем разделе.

11.2. Среднеинтегральные коэффициенты поглощения

В п. 11.1 было определено, что среднеинтегральные коэффициенты поглощения получаются при интегрировании коэффициентов поглощения по спектру с некоторыми весовыми функциями, выбор которых и определяет тип коэффициента. Наибольшее распространение получили два среднеинтегральных коэффициента. Если в качестве весовой функции взять интенсивность излучения абсолютно черного тела $J_{b,\omega}(T)$, то получается среднепланковский коэффициент (11.1).

Среднеросселандовский коэффициент определяется по формуле (11.2). Среднепланковский и среднеросселандовский коэффициенты поглощения в отдельных спектральных диапазонах определяются по формулам (11.6).

Если рассматривать квазинепрерывный спектр коэффициента поглощения, то численный расчет коэффициентов κ_P и κ_R не представляет трудностей, поскольку величины $\kappa_{\omega} \approx \kappa_{\Delta\omega_i}$, где

$$\kappa_{\Delta\omega_i} = \frac{1}{\Delta\omega_i} \int_{\Delta\omega_i} \kappa_{\omega} d\omega \quad (11.7)$$

являются постоянными в пределах участков усреднения

$$\kappa_P = \frac{\pi}{\bar{\sigma} T^4} \sum_{i=1}^{N_{\Delta\omega}} \left(\kappa_{\Delta\omega_i} \right) \int_{\Delta\omega_i} J_{b,\omega}(T) d\omega, \quad (11.8)$$

$$\kappa_R = \frac{\pi}{4\bar{\sigma} T^3} \sum_{i=1}^{N_{\Delta\omega}} \left(\kappa_{\Delta\omega_i}^{-1} \right) \int_{\Delta\omega_i} \frac{dJ_{b,\omega}(T)}{dT} d\omega. \quad (11.9)$$

где $N_{\Delta\omega}$ – число групп в модели; $\bar{\sigma}$ – постоянная Стефана–Больцмана.

При взятии интегралов вида (11.8), (11.9) удобно использовать квадратурные формулы Гаусса с небольшим числом узлов (Бронштейн И.Н. и др., 1986).

Не представляет также особого труда и расчет среднепланковских коэффициентов с учетом линейчатой структуры. В этом

случае для квазинепрерывной составляющей спектра используется формула (11.8), а интегрирование по линейчатой составляющей сводится к суммированию интегральных коэффициентов поглощения в линиях, так как спектральные размеры линий (характеризуемые их полуширинами) во много раз меньше размеров участков усреднения $\Delta\omega$.

Сложнее обстоит дело с расчетом среднеросселандовских коэффициентов поглощения в линейчатом спектре. Этот вопрос был детально проанализирован в работах (Биберман Л.М., Лагарьков А.Н., 1964, 1967), где предложено применение статистических моделей. Однако следует иметь в виду, что все статистические модели имеют уровень погрешности $\sim 30\%$, что не всегда является удовлетворительным для расчета среднеинтегральных коэффициентов.

Третий тип средних коэффициентов – средние по Chandrasekharу, имеют в качестве весовой функции спектральную интенсивность излучения J_ω

$$\kappa_C = \frac{\int \kappa_\omega J_\omega d\omega}{\int J_\omega d\omega}. \quad (11.10)$$

На идее введения средних по Chandrasekharу основано несколько высокоэффективных методов ускорения процедуры численного решения задачи переноса селективного излучения (Анфимов Н.А. и др., 1968; Гольдин В.Я., 1964; Горский В.В. и др., 1982; Немчинов И.В., 1970). Поскольку интенсивность излучения зависит от направления, то коэффициент κ_C также может зависеть от направления. Чтобы избежать этого, спектральную интенсивность излучения усредняют по направлениям. Тип усреднения зависит от используемого метода, поэтому можно определить большое многообразие средних коэффициентов типа (11.10).

Рассмотрим физический смысл среднепланковского и среднеросселандовского коэффициентов поглощения. Как уже отмечалось, среднепланковский и среднеросселандовский коэффициенты характеризуют перенос лучистой энергии соответственно в оптически тонких ($\kappa_\omega L \ll 1$, L – характерный размер) и оптиче-

ски толстых ($\kappa_\omega L \gg 1$) средах. Воспользуемся уравнением переноса селективного излучения без учета светорассеяния для спектральной интенсивности излучения J_ω вдоль некоторого направления s

$$\frac{\partial J_\omega}{\partial s} = \kappa_\omega J_{b,\omega} - \kappa_\omega J_\omega, \quad (11.11)$$

и проинтегрируем его по волновому числу в диапазоне $\Delta\omega$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_{\Delta\omega} J_\omega d\omega &= \int_{\Delta\omega} \kappa_\omega J_{b,\omega} d\omega - \int_{\Delta\omega} \kappa_\omega J_\omega d\omega = \\ &= \kappa_{P,\Delta\omega} \frac{\bar{\sigma} T^4}{\pi} - \int_{\Delta\omega} \kappa_\omega J_\omega d\omega, \end{aligned} \quad (11.12)$$

где $\bar{\sigma}$ – постоянная Стефана – Больцмана. Отсюда видно, что первое слагаемое в (11.12), пропорциональное $\kappa_{P,\Delta\omega}$, соответствует энергии, которая излучается элементарным физическим объемом в спектральном диапазоне $\Delta\omega$. Аналогично заданием величины κ_P определяется энергия, излучаемая в полной спектральной области.

С целью выяснения физического смысла среднеросселандовского коэффициента необходимо рассмотреть выражение для плотности спектрального лучистого потока в оптически толстой среде. Воспользуемся соотношением для плотности спектрального потока в приближении плоского слоя (5.54)

$$\begin{aligned} W(\tau_\omega) &= 2\pi \int_0^{\tau_\omega} J_{b,\omega}(\tau') E_2(\tau_\omega - \tau') d\tau' - \\ &\quad - 2\pi \int_{\tau_\omega}^{\tau_{\omega,L}} J_{b,\omega}(\tau') E_2(\tau' - \tau_\omega) d\tau'. \end{aligned} \quad (11.13)$$

При получении (11.13) пренебрегалось излучением, падающим на границы слоя при $s = 0$ и $s = L$. Разлагая функцию Планка в ряд в окрестности τ_ω и удерживая только слагаемые первого порядка по $(\tau_\omega - \tau')$, получаем

$$W_{\omega}(\tau_{\omega}) = 4\pi \frac{dJ_{b,\omega}}{d\tau_{\omega}} \int_0^{\infty} \tau' E_2(\tau') d\tau' = -\frac{4}{3} \pi \frac{dJ_{b,\omega}}{d\tau_{\omega}}. \quad (11.14)$$

Отсюда получается, что лучистый поток в спектральной области $\Delta\omega$ равен

$$W_{\Delta\omega}(s) = \frac{4}{3} \pi \int_{\Delta\omega} \frac{dJ_{b,\omega}}{d\tau_{\omega}} d\omega = -\frac{16}{3} \kappa_{R,\Delta\omega}^{-1} \bar{\sigma} T^3 \frac{dT}{ds}. \quad (11.15)$$

Аналогично определяется лучистый поток в полной спектральной области. Таким образом, лучистый тепловой поток в оптически толстой среде описывается законом Фурье с коэффициентом теплопроводности

$$\lambda_{R,\Delta\omega} = \frac{16}{3} \kappa_{R,\Delta\omega}^{-1} \bar{\sigma} T^3, \quad \lambda_R = \frac{16}{3} \kappa_R^{-1} \bar{\sigma} T^3, \quad (11.16)$$

а величина $L_R = \kappa_R^{-1}$ характеризует расстояние эффективной передачи теплоты посредством излучения. Эта величина называется *среднеросселандовской длиной свободного пробега фотонов*.

ГЛАВА 12

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ПО ЧАСТОТЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Обзор спектральных оптических моделей коэффициентов поглощения нагретых газов и низкотемпературной плазмы, выполненный в предыдущем разделе, позволяет сделать три практически важных вывода:

1) спектральный коэффициент поглощения является очень сильной функцией термодинамических параметров среды и волнового числа излучения;

2) в условиях локального термодинамического равновесия спектральный коэффициент поглощения $\kappa_{\omega}(p, T)$ может быть представлен в виде электронных таблиц;

3) в условиях отсутствия локального термодинамического равновесия значения спектрального коэффициента поглощения должны рассчитываться в каждой точке пространства с учетом моделей физико-химической кинетики.

Далее будем полагать, что тем или иным способом спектральный коэффициент поглощения и испускания рассчитан. Рассмотрим способы интегрирования уравнения переноса излучения по спектру с учетом сделанного предположения.

12.1. Обзор методов интегрирования уравнения переноса по частоте в задачах теплообмена излучением и радиационной газовой динамики

Прямым способом учета селективности оптических характеристик является использование так называемых *групповых* (или

ступенчатых) моделей, в которых групповой коэффициент поглощения находится осреднением спектрального коэффициента. Если количество спектральных групп становится настолько большим (порядка $\sim 10^6$), что удается корректно описать контуры атомных или вращательных линий атомных и молекулярных компонент нагретого газа, то вводится специальное наименование такой модели – *полинейчатая* или *line-by-line* модель. Указанные модели можно считать *точными* в том смысле, что если имеется сколь угодно точная спектральная оптическая модель (задан способ расчета, имеется электронная база данных и т.п.), то интегрирование уравнения переноса излучения по спектру производится со сколь угодно малой погрешностью.

Простейшей групповой моделью является модель «серой» среды (Бай Ши-и, 1968; Оцисик М.Н., 1976). Решение большого числа задач теплообмена излучением в аэрофизических приложениях (Андерсон Дж.Д., 1968, (а, б, в), 1969; Белоцерковский О.М., Биберман Л.М. и др., 1969; Биберман Л.М., Бронин С.Я., Лагарьков А.Н., 1972) показали удовлетворительную точность расчетов по малогрупповым моделям. Оказалось, что часто достаточно учесть хотя бы две энергетические группы фотонов. В двухступенчатой модели Андерсона (Андерсон Дж.Д., 1968, (а, б, в), 1969) коэффициент поглощения выражался через среднепланковский коэффициент поглощения. Некоторый предварительный итог исследований по применению различных моделей в задачах радиационной газовой динамики был подведен в работе (Бронин С.Я., Брыкин М.В., 1977). В этой работе были сопоставлены результаты расчетов радиационных потоков к поверхности затупленного тела при его входе в плотные слои атмосферы с гиперзвуковой скоростью. В качестве опорных значений брались результаты работ (Биберман Л.М., Бронин С.Я., Лагарьков А.Н., 1972; Белоцерковский О.М., Биберман Л.М., Бронин С.Я. и др., 1969). В работе (Белоцерковский О.М., Биберман Л.М., Бронин С.Я. и др., 1969) учитывались сильные атомные линии. Отмечается, что модель «серого» газа не только с самого начала исключает возможность получения спектрального распределения, но дает также неверные интегральные лучистые потоки.

В работе (Бронин С.Я., Брыкин М.В., 1977) анализируется также двухступенчатая модель Андерсона (Андерсон Дж.Д., 1968, (а)), шести ступенчатая модель Чина (Чин Ж., 1969), восьми ступенчатая модель Олстеда (Олстэд В., 1971). Основные результаты этого анализа сводятся к тому, что перенос излучения в непрерывном спектре (включающем усредненное молекулярное поглощение) удовлетворительно описывается ступенчатыми моделями с числом ступеней с фиксированными границами от 2 до 8.

В более поздних работах, где этот вопрос анализировался с точки зрения поиска оптимальных моделей (Суржиков С.Т., 1992), было установлено, что групповая модель получается более экономичной, если рассматривать ее как некий функционал решаемой задачи, т.е. оптимальные групповые модели должны создаваться для отдельных классов задач. Так, решение задачи о непрерывном оптическом разряде в воздухе атмосферного давления показало слабую зависимость уровня температуры в плазме от внешних условий. Такой консерватизм позволил подобрать путем численных экспериментов весьма экономичную трехступенчатую модель коэффициента поглощения. Численное исследование радиационно-конвективного теплообмена при дозвуковом обтекании поверхности низкотемпературной воздушной плазмой завершилось также подбором экономичной трехступенчатой модели. Однако границы спектральных диапазонов в этой модели несколько отличались от предыдущей. Расчет лучистого теплообмена в окрестности точки торможения возвращаемого на Землю космического аппарата проводился при давлениях, близких к атмосферному. Здесь использовалась семиступенчатая модель коэффициента поглощения. И, наконец, работа над построением мало групповой модели, обеспечивающей удовлетворительный уровень точности при решении аналогичной задачи в широком диапазоне температур и давлений, привела к оптимальной 37-групповой модели (Суржиков С.Т., 2004 (в)).

Вывод о том, что для каждой решаемой задачи существует своя оптимальная модель спектрального коэффициента поглощения, представляется очевидным. Однако важно то, что приемлемость той или иной модели определяется не только разумным

способом осреднения сечений радиационных процессов, но также типичным распределением поля функции источников в изучаемом объеме среды (в условиях ЛТР – равновесной планковской интенсивности) и характером конечных результатов, для получения которых решается задача. Допустимость использования малогрупповых спектральных моделей в задачах, перечисленных выше, легко объясняется тем, что там рассматривалась воздушная плазма при температурах $2000 + 20000$ К в диапазоне давлений $0.01 + 50$ атм. Характерные размеры излучающих объемов колебались от 0.1 до 10 см. Малогрупповые модели использовались либо для нахождения плотности интегрального лучистого потока к поверхности тела, либо для расчета дивергенции вектора интегрального лучистого потока в объеме, занимаемом плазмой. Получаемая точность результатов оказывалась достаточной. Напротив, расчеты спектрального излучения, сопровождающего полет спускаемого аппарата на участке торможения в атмосфере планеты Венера (Анфимов Н.А., Демьянов Ю.А., Заверняев Ю.А. и др., 1981; Surzhikov S.T., Gorelov V.A., Kireev A.Yu., 2003) или светимости ударных волн (Немчинов И.В., Светцов В.В., Шувалов В.В., 1977), потребовали использования соответственно 55-, 100- и 456-групповых моделей. Попытки применения здесь малогрупповых моделей оказались безуспешными.

При обсуждении проблем построения оптимальных спектральных моделей следует иметь в виду, что при нахождении самосогласованных распределений полей температуры и радиационных функций приходится пользоваться итерационными численными методами. Это значит, что решение уравнения переноса в фиксированных спектральных участках проводится многократно. Здесь весьма плодотворным оказался подход, при котором интегрирование уравнения Переноса по частоте выполняется не на каждой итерации, а по мере необходимости, которая диктуется ходом итерационного процесса. При этом расчет переноса излучения в фиксированном спектральном диапазоне может выполняться одним из методов усреднения по пространству, рассматривавшихся в предыдущих главах.

По-видимому, впервые такие способы решения задачи были применены в работах (Анфимов Н.А., Шари В.П., 1968; Гольдин В.Я., 1964; Гольдин В.Я., Четверушкин Б.Н., 1970, 1972; Немчинов В.Д., 1970). Уже в первоначальном виде эти подходы оказались приспособленными к учету атомных линий. Так, в работе (Немчинов И.В., Светцов В.В., Шувалов В.В., 1977) выполнен расчет интенсивно излучающих ударных волн в воздухе с учетом наиболее полной на то время оптической модели (Авилова И.В. и др., 1970), в том числе атомных линий. Дальнейшее развитие и использование метода Немчинова представлено в работах (Бергельсон В.И. и др., 1974; Малявина Т.Б., 1973; Светцов В.В., 1980). Квазидиффузионный метод Гольдина также получил свое развитие в работах (Волчинская М.И. и др., 1983; Гольдин В.Я., Дегтярев В.А., 1985; Гольдин В.Я., Кудинова Г.А., 1976; Репина Г.Е. и др., 1979; Филиппычев Ю.С. и др., 1976). Модификация вычислительного алгоритма Анфимова и Шари, выполненная в работе (Горский В.В. и др., 1982), позволила не только улучшить качество итерационного процесса, но и построить достаточно простой расчетный алгоритм учета атомных линий в явном виде. В этой работе применен метод полумоментов для расчета осредненных по пространству характеристик излучения и статистическая модель спектра атомных линий для интегрирования по частоте.

В методах (Гольдин В.Я., Кудинова Г.А., 1976; Кривцов В.М., 1968, 1974 (а, б); Кривцов В.М., Наумова И.Н. и др., 1975; Шмыглевский Ю.Д., 1963, 1973, 1976, 1977) предусматривается специальное представление функций, входящих в уравнение переноса излучения. В моментном методе (Шмыглевский Ю.Д., 1976) спектральная интенсивность излучения и спектральный коэффициент поглощения разлагаются в ряд по ортогональным полиномам от частоты. Использование обычной процедуры получения моментных уравнений, т.е. умножение исходного уравнения на v^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) с последующим интегрированием по частоте, позволяет получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов в разложении функций по ортогональным полиномам. Применение этого метода к расчету переноса излучения в непрерывном и линейча-

том спектрах требует специального подбора наиболее удобных комбинаций функций, разлагаемых в ортогональные ряды.

В подходе (Кривцов В.М., 1974) предполагается возможным представление функции спектрального коэффициента поглощения в виде ряда, члены которого являются произведением функции от частоты на функцию от температуры и давления. Здесь также вводится система ортогональных полиномов для аппроксимации спектральной интенсивности излучения.

Была разработана серия методов, в которых выполняется предварительное интегрирование по частоте с использованием некоторых опорных распределений температуры (Головнев И.Ф., Замураев В.П. и др., 1984; Карасев А.Б., Кондранин Т.В., Кузьминский И.Н., 1979; Кондранин Т.В., Кузьминский И.Н., 1981; Овсянников В.М., 1983; Севастьяненко В.Г., 1979). Среди указанных работ выделим (Головнев И.Ф., Замураев В.П. и др., 1984), где представлены обширные данные для конкретных расчетов переноса излучения в водороде, аргоне, воздухе и углекислом газе. В работе (Овсянников В.М., 1983) выполнен подробный анализ многих из упоминавшихся методов и приведено сравнение их эффективности.

Весьма эффективным оказался метод, предложенный в работе (Бронин С.Я., Лагарьков А.Н., 1970). В дальнейшем были найдены более простые расчетные соотношения, которые позволили улучшить его экономичность (Бронин С.Я., Брыкин М.В., 1977). Основное содержание этого подхода заключается в индивидуальном учете наиболее сильных атомных линий ударного профиля. Использование предположения о малости изменения ударной полуширины на расстояниях пробега фотонов, равных обратной величине коэффициента поглощения в центре линии, позволяет выполнить аналитическое интегрирование по частоте. Получаются удобные расчетные соотношения для интегральных лучистых потоков и их дивергенции в плоскопараллельной и цилиндрической геометрии. С использованием этого метода получены расчетные данные по величинам лучистых потоков в высокотемпературных ударных слоях (Биберман Л.М., Бронин С.Я., Лагарьков А.Н., 1972).

При расчетах переноса излучения в дуговых разрядах применялся также подход (Онуфриев А.Т., Севастьяненко В.Г., 1966). В этой работе предложен групповой способ построения спектральных моделей, учитывающих реабсорбируемые атомные линии. Использовался как точный, так и диффузионный способ описания переноса излучения. К наиболее плодотворным обобщениям методов группового интегрирования и введения специального представления функции коэффициента поглощения следует отнести работы (Гольдин В.Я., Дегтярев В.А., 1985; Можейко С.В. и др., 1992; Цветкова И.Л. и др., 1989; Шильков Е.В., 1991).

Выше, приступая к анализу работ, посвященных расчету переноса селективного излучения, была введена их первичная классификация по типу осреднения уравнения переноса: пространственному или частотному. Когда речь идет об учете индивидуальных линий, возникает еще проблема интегрирования уравнения переноса вдоль неоднородной трассы распространения излучения. С физической точки зрения трудность здесь состоит в том, что вдоль выделенного в пространстве луча контуры линии могут сильно изменяться. Поглощение (излучение) в узкой центральной части линии может сменяться поглощением (излучением) в ее далеких крыльях. Возможно также смещение центра линии по частоте. В таких случаях задачи интегрирования по пространству и по частоте становятся взаимосвязанными. Подходы осреднения по угловым переменным, изложенные в предыдущих главах, могут оказаться неприемлемыми.

Анализируя методы расчета теплообмена излучением, специально ориентированные на учет спектральных линий, будем предполагать наличие в среде локального термодинамического равновесия и считать известными характеристики атомных линий: силу (интегральный коэффициент поглощения) и полуширину.

Простейшим примером учета атомных линий в расчетах теплообмена излучением является использование приближения оптически тонкого слоя (см. п. 5.1). Представим спектральный коэффициент поглощения в виде суммы

$$\kappa_{\omega} = \kappa_{\omega}^d + \kappa_{\omega}^c, \quad (12.1)$$

где κ_{ω}^c и κ_{ω}^d – коэффициенты поглощения в непрерывном спектре и в атомных линиях соответственно. Приближение оптически тонкого слоя для спектрального диапазона $\Delta\omega$ можно использовать, если для любой частоты излучения из диапазона $\Delta\omega$ выполняется условие

$$\tau_{\omega}(L) = \int_0^L \kappa_{\omega}(x') dx' \ll 1, \quad \forall \omega \in \Delta\omega, \quad (12.2)$$

где L – характерный линейный размер рассматриваемого объема.

В этом случае интегральная удельная мощность излучения определяется формулой

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi \int_0^{\infty} \kappa_{\omega} J_{b,\omega} d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} J_{b,\omega} (\kappa_{\omega}^d + \kappa_{\omega}^c) d\omega = \\ &= 4\pi \frac{\int_0^{\infty} J_{b,\omega} (\kappa_{\omega}^d + \kappa_{\omega}^c) d\omega}{\int_0^{\infty} J_{b,\omega} d\omega} \cdot \int_0^{\infty} J_{b,\omega} d\omega = 4\kappa_P \bar{\sigma} T^4. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Вычисление интеграла с детальным учетом спектральной зависимости κ_{ω} – является трудоемкой, но вполне решаемой задачей. Такие расчеты выполнены, например, для равновесной воздушной плазмы в работах (Авилова И.В. и др., 1970; Каменщиков В.А. и др., 1971; Кобзев Г.А., 1983, (а, б); Кобзев Г.А., Нужный В.А., 1984, (а, б)). Часто с достаточной степенью точности удается избежать полинейчатого интегрирования. Когда в частотных пределах линии функция Планка изменяется незначительно, ее можно вынести за пределы интеграла, а последний заменить величиной интегрального поглощения в линии

$$Q = 4\pi \int_0^{\infty} J_{b,\omega} \kappa_{\omega}^c d\omega + 4\pi \sum_{i=1}^{N_{ли}} J_{b,\omega_i} \alpha_i, \quad (12.4)$$

где α_i – интегральный коэффициент поглощения i -й линии; J_{b,ω_i} – спектральная функция излучения абсолютно черного тела с волновым числом ω_i , соответствующим i -й атомной линии; $N_{ал}$ – число атомных линий.

Именно этот прием позволяет считать приближение оптически тонкой среды наиболее простым с точки зрения учета атомных линий.

В другом крайнем случае – в приближении оптически толстой среды – должно выполняться условие

$$\tau_{\omega}(L) \gg 1, \quad \forall \omega \in \Delta\omega. \quad (12.5)$$

Введение коэффициента лучистой теплопроводности позволяет достаточно просто учесть лучистый теплообмен в среде. Однако расчет среднего свободного пробега уже не допускает упрощения аналогично случаю оптически тонкой среды для атомных линий. Влияние спектральных линий на коэффициент лучистой теплопроводности изучено в работах (Биберман Л.М., Лагарьков А.Н., 1964, 1967). На примере атомных линий водорода показано, что, пренебрегая ими, можно завысить средний пробег излучения на порядок. Для учета вращательной структуры молекулярного спектра при расчетах среднего пробега в указанных работах предлагается использовать модель Эльзассера равностоящих линий и статистическую модель (см. главу 13).

Таким образом, индивидуальный учет спектральных линий в расчетах переноса излучения приводит к необходимости последовательно решать следующие задачи интегрирования: по частоте, вдоль луча и по направлениям. Причем, в отличие от расчетов переноса излучения в непрерывном спектре, далеко не любые комбинации методов интегрирования можно использовать.

Прежде чем приступить к анализу методов интегрирования уравнения переноса по частоте излучения отметим, что производительность компьютеров, используемых в настоящее время для решения практически важных задач теории переноса излучения, позволяет использовать для этих целей полинейчатые (*line-by-line*) методы. Однако приближенные методы интегрирования по частоте

те излучения остаются существенно более эффективными, в особенности в тех случаях, когда решаются задачи сложного (радиационно-коиндуктивного и радиационно-конвективного) теплообмена. Имеется также еще одна причина, сдерживающая широкое применение полинейчатых методов. С увеличением подробности описания спектральных оптических свойств повышенные требования предъявляются к точности предсказания этих оптических свойств, что является не менее сложной задачей из области квантовой физики и химии.

12.2. Модели разделения переменных интегрирования

Эти модели объединяет допущение о возможности разделения функциональной зависимости спектральных коэффициентов поглощения от частоты и пространственных переменных с целью упрощения процедуры интегрирования. В различных вариациях моделей разделения переменных предполагается также допустимость разложения в ряд по ортогональным полиномам функции частоты излучения. Это, в свою очередь, допускает применение моментной процедуры, когда умножение уравнения переноса излучения на специально подобранную функцию частоты с последующим его интегрированием по частоте, приводит к заметному упрощению проблемы селективности излучения.

12.2.1. Приближение Милна – Эддингтона

В модели разделения переменных (модель Милна – Эддингтона) предполагается допустимость следующего представления спектрального коэффициента поглощения

$$\kappa_\nu = F(\nu) \cdot S(T, p), \quad (12.6)$$

где $F(\nu)$ – функция спектральной зависимости при некоторых фиксированных температуре и давлении; $S(T, p)$ – функция температуры и давления в низкотемпературной плазме.

На основе этого приближения разработана целая серия расчетных методов (Гольдин В.Я. и др., 1970, 1972).

12.2.2. Модель разделяющихся переменных в коэффициенте поглощения

Модель предложена и исследована в работе (Гольдин В.Я. и др., 1970).

Предполагается, что функциональная зависимость спектрального коэффициента поглощения от частоты и термодинамических параметров среды $((T, p), (T, \rho)$ и т.п.) допускает разделение переменных, т.е. спектральный коэффициент поглощения может быть представлен в виде

$$\kappa_{\omega}(T, p) = f(\omega) F(T, p). \quad (12.7)$$

Тогда уравнение переноса излучения в плоском одномерном случае нерассеивающей среды формулируется в виде

$$f^{-1}(\omega) \mu \frac{dJ_{\omega}(x, \mu)}{dx} + F(T, p) J_{\omega}(x, \mu) = F(T, p) J_{b, \omega} \quad (12.8)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} x = 0, \quad \mu > 0: \quad J_{\omega}(0, \mu) &= J_{0, \omega}^+, \\ x = H, \quad \mu < 0: \quad J_{\omega}(H, \mu) &= J_{H, \omega}^-. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Умножая (12.8) на $f^2(\omega)$ и интегрируя это уравнение по волновому числу в совокупности тех спектральных диапазонов $\Delta\omega_z$, где

$$\frac{1}{f(\omega)} \geq |z| = \left| \frac{\mu}{f(\omega)} \right|, \quad (12.10)$$

получаем

$$z \frac{dI}{dx} + F(T, p) I = F(T, p) I_b(T, |z|), \quad (12.11)$$

$$- \max \left\{ \frac{1}{f(\omega)} \right\} \leq z \leq \max \left\{ \frac{1}{f(\omega)} \right\},$$

с граничными условиями

$$z \geq 0: I(x_0, z) = \int_{\Delta\omega_z} f^2(\omega) I^+ \left[\frac{z}{f(\omega)}, \omega \right] d\omega, \quad (12.12)$$

$$z < 0: I(H, z) = \int_{\Delta\omega_z} f^2(\omega) I^- \left[\frac{z}{f(\omega)}, \omega \right] d\omega, \quad (12.13)$$

где

$$I = \int_{\Delta\omega_z} f^2(\omega) J_\omega(x, \mu) d\omega. \quad (12.14)$$

Особенностью данного метода разделения переменных является то, что при такой формулировке удается от трех независимых переменных (x, ω, μ) перейти к двум переменным (x, z) , что заметно упрощает проблему интегрирования. По найденной модифицированной интенсивности I интегральная плотность потока излучения рассчитывается по формуле

$$W = \int_{-\max \frac{1}{f(\omega)}}^{+\max \frac{1}{f(\omega)}} z I dz. \quad (12.15)$$

12.2.3. Методы разделения переменных Шмыглевского

Основная идея метода, предложенного в работе (Шмыглевский Ю.Д., 1973), состоит в применении моментной процедуры к уравнению переноса излучением, в котором функциональная зависимость интенсивности от спектра излучения представлена в виде ряда по ортогональным полиномам. В итоге применения моментной процедуры (последовательное умножение уравнения на v^n , $n = 0, 1, 2, \dots$) получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно коэффициентов указанного разложения и не содержащих частотной зависимости. Метод применяется отдельно для учета спектра непрерывного излучения и линейчатого спектра (Шмыглевский Ю.Д., 1969, 1977).

12.2.4. Моментный метод, использующий в качестве независимой переменной коэффициент поглощения

Идейной основой метода является использование для интегрирования уравнения переноса по частоте понятия интеграла Лебега. Метод предложен и подробно изложен в работах (Кривцов В.М., 1974, 1976).

Интегрирование по Лебегу дает основание построить эффективный метод расчета переноса селективного излучения, учитывающий большое число спектральных линий. Если при использовании многогруппового (или *line-by-line*) метода расчетная сетка вводится по шкале частот, при интегрировании по которой и находятся интегральные функции, то в случае лебеговского интегрирования расчетная сетка вводится по шкале коэффициентов поглощения. Для реализации такого интегрирования удобно представить зависимость спектрального коэффициента поглощения в виде

$$\kappa_{\nu}(p, T) = \sum_{i=0}^N \psi_i(\nu) \phi_i(p, T). \quad (12.16)$$

Такая форма представления коэффициента поглощения очевидным образом сопоставляется табличной форме задания спектрального коэффициента поглощения, когда для каждого фиксированного значения давления p_i и температуры T_j дается спектральная зависимость коэффициента поглощения $\kappa_{\nu_n}(p_i, T_j)$.

В данном моментном методе также используется представление спектральной зависимости интенсивности излучения в виде ряда по ортогональным полиномам Лежандра.

12.2.5. Методы лебегова усреднения

Группа методов лебегова усреднения развита в работах (Можейко С.В. и др., 1992; Цветкова И.Л. и др., 1989; Шильков А.В., 1991). Подробное описание этих методов представлено в статье (Аристова Е.Н., Гольдин В.Я., 2002).

12.3. Групповые модели

12.3.1. Основные типы групповых моделей

Под *групповой (ступенчатой)* моделью коэффициента поглощения понимается такая зависимость коэффициента поглощения от частоты, когда весь спектральный диапазон разбивается на конечное число участков, в пределах каждого из которых производится усреднение коэффициента поглощения. Внутри участков усреднения коэффициент поглощения принимается равным своему среднему значению и не зависит от частоты. Или, в случае малогрупповых спектральных моделей, когда в пределах одной спектральной группы коэффициент поглощения изменяется очень сильно (на порядок величин), среднее значение определяется посредством интегрирования коэффициента поглощения по спектру с последующим делением полученной величины на величину соответствующего спектрального диапазона. Такое приближение оказывается чрезвычайно удобным и широко используется при расчетах переноса селективного излучения. Количество участков спектра, в которых усредняют коэффициент поглощения, определяется решаемой задачей. В задачах теплообмена излучением оказывается достаточным спектральную область теплового излучения (в дальнейшем эту область будем называть *полной спектральной областью*) разбить на небольшое число участков $\sim 10-20$. В задачах, связанных со спектральной диагностикой газовых потоков и учетом тонких радиационно-газодинамических эффектов, приходится вводить сотни и тысячи участков усреднения для того, чтобы достаточно подробно описать спектр. Примером многогрупповых моделей коэффициента поглощения высокотемпературного воздуха служат табличные и графические данные (Авилова И.В. и др., 1970; Каменщиков В.А. и др., 1971; Суржиков С.Т., 2004 (в)).

В литературе до сих пор нет общепринятого определения понятия групповой модели. Часто групповая модель спектра (в нашем определении) называется ступенчатой моделью или моделью «частотокола» (с некоторыми вариациями: двух-, трех- и т.д.

ступенчатые модели, модель «обобщенного частотокола» и т.п.). Используемое здесь понятие групповой модели усреднения включает в себя все многообразие указанных моделей. Специфические отличия одной модели от другой, путем указания количества энергетических групп, в которых выполняется усреднение, для определения групповой модели является столь же естественным, как и для ступенчатой модели или модели частотокола. В то же самое время, понятие групповой модели является более физическим, поскольку подразумевает усреднение свойств среды в пределах заданной энергетической группы квантов электромагнитного излучения.

Как уже отмечалось, простейшей групповой моделью является модель «серой» среды. В модели «серой» среды принимается, что коэффициент поглощения и рассеяния, а так же индикатриса рассеяния не зависят от частоты излучения

$$\kappa_{\omega}(\mathbf{r}) = \kappa(\mathbf{r}), \quad \sigma_{\omega}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}), \quad \gamma_{\omega}(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) = \gamma(\mathbf{r}, \Omega', \Omega). \quad (12.17)$$

В этой модели уравнение переноса излучения в приближении локального термодинамического равновесия формулируется относительно интегральной интенсивности излучения

$$\frac{\partial J(s, \Omega)}{\partial s} + \beta J(s, \Omega) = \kappa J_b(s) + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} J(s, \Omega') \gamma(s, \Omega', \Omega) d\Omega \quad (12.18)$$

или без учета рассеяния

$$\frac{\partial J(s, \Omega)}{\partial s} + \kappa J(s, \Omega) = \kappa J_b(s), \quad (12.19)$$

где $J(s, \Omega) = \int_{\Delta\omega} J_{\omega}(s, \Omega) d\omega$.

Интегральные объемная плотность излучения и плотность потока излучения определяются по интегральной интенсивности

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} J(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega, \quad W(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} J(\mathbf{r}, \Omega) \Omega d\Omega.$$

В задачах теплообмена излучением в горячих газах и в низкотемпературной плазме в подавляющем большинстве случаев нельзя использовать модель «серой» среды. Поэтому при использовании группового приближения обычно применяется следующий алгоритм.

1. Задается спектральный диапазон $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, в котором будут проводиться расчеты переноса излучения. При исследовании процессов переноса теплового излучения в газах и плазме нагретых до температур не более ~ 20000 К полная спектральная область обычно полагается равной $\omega_{\min} = 1000 \text{ см}^{-1}$, $\omega_{\max} = 500000 \text{ см}^{-1}$.

2. Указанный спектральный диапазон разбивается на конечное число N_g спектральных интервалов $[\omega_g, \omega_{g+1}]$, $g = 1, 2, \dots, N_g$ – число энергетических групп квантов электромагнитного излучения.

3. В пределах каждой спектральной группы находятся средние коэффициенты поглощения и рассеяния, а также индикатриса рассеяния:

$$\kappa_g(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta\omega_g} \int_{\Delta\omega_g} \kappa_\omega(\mathbf{r}) d\omega, \quad (12.20)$$

$$\sigma_g(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta\omega_g} \int_{\Delta\omega_g} \sigma_\omega(\mathbf{r}) d\omega, \quad (12.21)$$

$$\gamma_g(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) = \frac{1}{\Delta\omega_g} \int_{\Delta\omega_g} \gamma_\omega(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) d\omega, \quad (12.22)$$

где $\Delta\omega_g = \omega_{g+1} - \omega_g$; $g = 1, 2, \dots, N_g$.

4. Уравнение переноса интегрируется в пределах каждой спектральной группы относительно интегральной групповой интенсивности:

$$(\Omega \cdot \nabla) J_g(\mathbf{r}, \Omega) + \beta_g(\mathbf{r}) J_g(\mathbf{r}, \Omega) = \kappa_g(\mathbf{r}) J_{b,g}(\mathbf{r}) + \frac{\sigma_g(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{4\pi} J_g(\mathbf{r}, \Omega') \gamma_g(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) d\Omega', \quad (12.23)$$

$$\text{где} \quad J_g(\mathbf{r}, \Omega) = \int_{\Delta\omega_g} J_{\omega}(\mathbf{r}, \Omega) d\omega; \quad (12.24)$$

$$J_{b,g}(\mathbf{r}) = \int_{\Delta\omega_g} J_{b,\omega}(\mathbf{r}) d\omega; \quad (12.25)$$

$$\beta_g(\mathbf{r}) = \kappa_g(\mathbf{r}) + \sigma_g(\mathbf{r}). \quad (12.26)$$

Граничные условия аналогичным образом преобразуются от спектральных к групповым.

5. Интегральная плотность потока излучения и плотность лучистой энергии рассчитываются по формулам

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{g=1}^{N_g} \int_{4\pi} J_g(\mathbf{r}, \Omega) \Omega d\Omega, \quad (12.27)$$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \sum_{g=1}^{N_g} \int_{4\pi} J_g(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega. \quad (12.28)$$

Заметим, что при решении задач радиационной газо- и плаз-модинамики, вместо функции источников собственного излучения (в уравнении (12.23)) в форме

$$\kappa_g(\mathbf{r}) J_{b,g}(\mathbf{r})$$

более удобно использовать следующий вид этой функции:

$$\kappa_{P,g}(\mathbf{r}) J_b(\mathbf{r}), \quad (12.29)$$

$$\text{где} \quad \kappa_{P,g}(\mathbf{r}) = \frac{\int_{\Delta\omega_g} \kappa_{\omega}(\mathbf{r}) J_{b,\omega}(\mathbf{r}) d\omega}{\int_0^{\infty} J_{b,\omega}(\mathbf{r}) d\omega}, \quad (12.30)$$

$$J_b(\mathbf{r}) = \int_0^{\infty} J_{b,\omega}(\mathbf{r}) d\omega, \quad (12.31)$$

$\kappa_{P,g}$ – среднепланковский групповой коэффициент поглощения.

Использование функции источников собственного излучения в форме (12.29) целесообразно при правильном выборе границ полного спектрального диапазона $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, когда с заданной степенью точности выполняется условие

$$\int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} J_{b,\omega}(T) d\omega \approx \int_0^{\infty} J_{b,\omega}(T) d\omega = \frac{\tilde{\sigma} T^4}{\pi}. \quad (12.32)$$

В этом случае уравнение переноса, записанное относительно интегральной групповой интенсивности имеет следующий вид

$$\begin{aligned} (\Omega \cdot \nabla) J_g(\mathbf{r}, \Omega) + \beta_g(\mathbf{r}) J_g(\mathbf{r}, \Omega) = \kappa_{p,g}(\mathbf{r}) \frac{\tilde{\sigma} T^4}{\pi} + \\ + \frac{\sigma_g(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{4\pi} J_g(\mathbf{r}, \Omega') \gamma_g(\mathbf{r}, \Omega', \Omega) d\Omega'. \end{aligned} \quad (12.33)$$

Как уже отмечалось, в групповых моделях усреднение по спектру производится по формуле

$$\kappa_{\Delta\omega_g} = \frac{1}{\Delta\omega_g} \int_{\Delta\omega_g} \kappa_{\omega} d\omega. \quad (12.34)$$

Однако часто при построении многогрупповой модели нет необходимости проводить интегрирование по спектру. Оказывается достаточным рассчитать коэффициент поглощения в любой точке, принадлежащей интервалу. Такой подход основан на том, что в пределах узкого спектрального диапазона коэффициент поглощения в непрерывном спектре меняется незначительно, а для систем молекулярных полос используются сечения, усредненные по вращательной структуре. Исключение здесь составляют атомные линии, для учета которых приходится разрабатывать специальные вычислительные модели.

Сложность построения оптических групповых моделей спектра, в которых учитываются атомные линии, состоит в том, что перенос излучения в атомных линиях на спектральных диапазонах, превосходящих их характерные ширины, нельзя описать локальными функциями поглощения и испускания. Поэтому соз-

даются либо приближенные модели переноса излучения, эффективно учитывающие линии, либо учет атомных линий производится на фоне групповых моделей непрерывного спектра. Остановимся на втором подходе.

Квазинепрерывный спектр (включающий сечения электронных полос двухатомных молекул) и спектр атомных линий представляются в виде двух аддитивных составляющих. Групповая модель квазинепрерывного спектра строится так, чтобы, во-первых, отразить основные элементы структуры спектра, а во-вторых, учесть практические потребности задачи. Границы спектральных диапазонов групповой модели выбираются так, чтобы учесть пороги фотоионизации, сильные молекулярные полосы. Определенная сложность возникает при выборе границ спектральных диапазонов осреднения, когда модель строится для широкого диапазона температур. Как известно, в этом случае наблюдается смещение порогов фотоионизации. Если этот эффект может оказать заметное влияние на результаты решения задачи, то приходится вводить дополнительные спектральные диапазоны. Требования, предъявляемые к модели со стороны решаемой задачи, могут привести либо к увеличению числа участков осреднения, либо наоборот, уменьшить их. Примером реализации такого подхода может служить методика построения групповых моделей квазинепрерывного спектра коэффициента поглощения высокотемпературного воздуха и смесей $\text{CO}_2\text{-N}_2$, учитывающих не только структурные особенности спектра, но и типовые требования, предъявляемые к моделям при решении задач об излучении высокотемпературных газовых объемов вблизи летательных аппаратов (Суржиков С.Т., 2004 (в)).

Если оптическая модель разрабатывается с целью ее последующего использования в некотором классе задач теории переноса теплового излучения или динамики излучающего газа, то целесообразно создать оптимальную для данного класса физических задач оптическую модель (см. п.11.1).

Построение оптимальных групповых моделей состоит из нескольких этапов. Например, при разработке оптической модели оптимальной для данного класса задач теории переноса теплового

излучения, на первом этапе выделяются границы спектральных диапазонов на основе анализа спектральной зависимости объемного коэффициента поглощения от длины волны в широком диапазоне температур. На втором этапе выбранные границы спектральных диапазонов уточняются при решении задачи расчета интегральных лучистых потоков в объеме плоской, цилиндрической или сферической геометрий. При этом размеры расчетной области и распределение температуры в таком объеме задаются по возможности близкими к тому, что ожидается при решении требуемой задачи. Решение этой задачи проводится дважды: сначала с использованием как можно более полной информации по коэффициенту поглощения, а затем с использованием исследуемой групповой модели. Если точность расчета плотностей интегральных лучистых потоков по групповой модели оказывается недостаточной, то выполняется коррекция границ спектральных диапазонов.

Вдобавок к этому, при разработке оптической модели оптимальной для некоторого класса задач радиационной газовой динамики, необходимо провести аналогичные расчеты на примере модельной радиационно-газодинамической задачи. Одной из возможных модельных задач является расчет обтекания поверхности затупленного тела в окрестности критической линии тока гиперзвуковым потоком вязкого теплопроводного селективно излучающего и поглощающего газа. Здесь коррекцию границ спектральных диапазонов также приходится делать дважды. Первый раз при построении модели спектра для заданных величин давления p_8 и температуры T_8 за фронтом ударной волны. Второй – на заключительном этапе решения задачи, когда групповые модели построены при различных p_8 и T_8 , но они не совпадают между собой. Таким образом, построенная групповая модель называется оптимальной для класса задач внешнего обтекания.

Модель с учетом атомных линий поддается оптимизации гораздо меньше. Рассмотрим два типа таких моделей. Первый тип групповой модели с учетом атомных линий – это *синтетический спектр* поглощения атомных линий на фоне квазинепрерывного спектра. Использовать такую модель в расчетах переноса излуче-

ния неудобно из-за большой трудоемкости, поскольку даже с использованием неоднородной расчетной сетки, на одну линию приходится отводить 10–20 точек. Это позволяет использовать такие типы моделей только в качестве эталонных. Второй тип групповых моделей – это модели, в которые вводятся специальные групповые функции, позволяющие провести расчет переноса излучения без увеличения числа групп. Их недостатком является необходимость использования специализированных расчетных алгоритмов. Однако с этим приходится мириться из-за их относительной простоты и очень высокой эффективности.

12.3.2. Метод группового усреднения

Одну из разновидностей групповых моделей представляет метод группового усреднения, предложенный в работе (Онуфриев А.Т. и др., 1967). В указанном методе спектральные группы вводятся не по принципу деления шкалы волновых чисел, а по принципу деления полного диапазона изменения коэффициента поглощения:

- задается диапазон изменения спектрального коэффициента поглощения $[\kappa_{\min}, \kappa_{\max}]$ во всех внутренних точках исследуемого объема;
- задается расчетная сетка в выделенном диапазоне $[\kappa_{\min}, \kappa_{\max}]$;
- к i -й спектральной группе относится совокупность спектральных диапазонов, в которых спектральный коэффициент поглощения удовлетворяет условию $\kappa_i < \kappa_v < \kappa_{i+1}$;
- уравнение переноса излучения решается столько раз, сколько выделено спектральных групп.

12.4. *Line-by-line* модели

Это наиболее точные модели учета спектральной зависимости оптических свойств низкотемпературной плазмы. При использовании *line-by-line* (LBL) моделей интегрирование уравнения переноса по спектру производится в стольких спектральных точках, сколько необходимо для подробного описания контуров атомных

линий и, если необходимо, вращательных линий молекулярного спектра. Фактически, эти модели представляют собой многогрупповые модели учета спектральной зависимости. Однако при столь подробном учете спектральных оптических свойств отпадает необходимость в нахождении среднего значения коэффициента поглощения (испускания) в каждом отдельном спектральном диапазоне $\Delta\omega_k$. Оказывается достаточным рассчитать спектральные оптические свойства в любой (например, центральной) точке внутри $\Delta\omega_k$.

Несложно сделать верхнюю и нижнюю оценки числа точек по спектру, в которых необходимо проинтегрировать уравнение переноса для решения задачи о теплообмене излучением в горячих газах и низкотемпературной плазме. Положим, что для описания контура атомной (молекулярной) линии требуется приблизительно десять точек по спектру. Тогда, при типичной полуширине линии $\gamma \sim 0.01 \div 0.1 \text{ см}^{-1}$ для ее описания необходимо предусмотреть спектральный диапазон $\sim 1 \text{ см}^{-1}$, в пределах которого шаг интегрирования по спектру оценивается величиной $\sim 0.1 \div 0.01 \text{ см}^{-1}$ (при этом, конечно, в реальных расчетах разумнее использовать неоднородные сетки по волновому числу). Для задач теплообмена излучением в горячих газах и в низкотемпературной плазме типичные расчеты переноса излучения проводятся в спектральной области $\sim 10^5 \text{ см}^{-1}$, отсюда следует верхняя оценка необходимого числа точек $\sim 10^7$. При более реалистической оценке, когда принимается необходимость учета только атомных линий (поглощение в молекулярном спектре усредняется по вращательной структуре), оценка необходимого числа точек делается иначе. Достаточно число учитываемых атомных линий умножить на 10. Например, для воздушной плазмы, при учете по ~ 4000 атомных линий атомов и ионов азота и кислорода получается нижняя оценка $\sim 4 \times 10^4$ спектральных точек. При этом следует иметь в виду необходимость разработки алгоритма построения неоднородной шкалы по волновому числу.

Таким образом, если вычислительные мощности позволяют проводить столь подробные расчеты, то, как таковая, проблема интегрирования по спектру уравнения переноса отпадает. В край-

нем случае, несколько подобных расчетов можно выполнить с целью получения эталонных решений, с которыми затем будут сравниваться результаты, полученные по приближенным моделям.

Гораздо чаще LBL-расчеты проводятся не в полной спектральной области, а в отдельных спектральных диапазонах, содержащих относительно небольшое число линий (например, $\sim 100+200$). Такие расчеты делаются также в основном для получения эталонных решений.

В LBL-расчетах проблема выбора расчетной шкалы по волновому числу не является единственной. Необходимо выбрать адекватные решаемой задаче способы расчета параметров спектральных линий. Задача расчета параметров атомных и молекулярных линий выходит за рамки проблем, обсуждаемых в данной книге.

Однако в следующих подразделах представлен краткий обзор методов решения этой задачи для того, чтобы дать представление о том, как результаты квантовой механики по расчету параметров спектральных линий используются в феноменологической теории радиационного переноса энергии.

12.4.1. Расчет параметров атомных линий

Проведению расчетов переноса излучения и спектральных коэффициентов поглощения с учетом атомных линий всегда предшествует подготовительная работа, связанная с выбором номенклатуры учитываемых линий и анализом условий в нагретых газах и плазме для построения адекватного метода расчета параметров атомных линий. Этим вопросам посвящена специальная литература по атомной спектроскопии (Грим Г., 1969; Грим Г., 1978; Касабов Г.А. и др., 1979; Корлисс Ч. и др., 1968; Левинсон И.Б. и др., 1962; Собельман И.И., 1963). Применительно к задачам теплообмена излучением рассматриваются более простые методы, в которых вся сложность и многообразие квантовомеханических процессов, протекающих при связанно-связанных переходах в атомах и ионах, представляется в виде ряда феноменоло-

гических констант, таких как интегральное поглощение в линии и ее полуширина. Анализу некоторых методов расчета указанных коэффициентов и используемых вычислительных алгоритмов посвящен данный раздел.

Физические и математические модели, а также реализующие их программные модули могут быть разбиты на две независимые группы. Первая группа моделей и программ обеспечивает подготовку параметров атомных линий к стандартизованному виду и формирование базы данных. Обычно отдельно взятую атомную линию характеризуют: волновое число центра линии ω_{mn} (для квантового перехода из нижнего энергетического состояния m в верхнее n), статистический вес нижнего состояния g_m и его энергия E_m , сила осциллятора в поглощении f_{mn} , атомная масса иона или атома M_a , константа (или несколько констант), определяющая уширение линии. В этот набор могут также входить параметры верхнего уровня квантового перехода $m \rightarrow n$.

Все физические аспекты расчета параметров линейчатого спектра включаются в эту первую группу. Здесь производится расчет сил осцилляторов (если отсутствуют соответствующие экспериментальные или расчетные данные) и постоянных уширения. Примером стандартного вида набора параметров атомных линий могут служить таблицы (Авилова И.В. и др., 1970; Каменщиков В.А. и др., 1971; Грим Г., 1978; Касабов Г.А. и др., 1979; Wiese W.L. et al., 1966, 1969; Wilson K.H., Nicolet W.E., 1967; Surzhikov S.T., 2002 (a)).

Вторая группа моделей и программ практически не связана с первой, а использует лишь информацию из базы данных атомных линий. Основное назначение этой группы вычислительных моделей состоит в расчете синтетического спектра коэффициента поглощения и в подготовке информации по атомным линиям для вычислительных моделей, реализующих расчет переноса излучения.

Анализ линейчатого излучения в низкотемпературной плазме, выполненный в работах (Авилова И.В. и др., 1970; Каменщиков В.А. и др., 1971; Коньков А.А. и др., 1969), показывает, что основными механизмами уширения атомных и ионных линий в

диапазоне температур $\sim 5000 + 20000$ К и давлениях порядка атмосферного можно считать доплеровское и штарковское уширение заряженными частицами. При этом форму линии следует описывать функцией Фойгта, обеспечивающей асимптотические переходы к контурам линий, описываемых функциями Лоренца и Доплера.

Для построения расчетной модели коэффициента поглощения необходимо определить три функции: α_{mn} – интегральный коэффициент поглощения линии, лоренцевскую полуширину γ_{mn}^L и доплеровскую полуширину γ_{mn}^D (γ – половина ширины линии на половине высоты).

Анализ методов расчета указанных величин дан в работе (Суржигов С.Т., 2004, (а))

Спектральный коэффициент поглощения в атомной линии рассчитывается с использованием функции Фойгта

$$\kappa(x) = \frac{\alpha a (\ln 2/\pi)^{1/2}}{\pi \gamma_D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2)}{a^2 + (x-y)^2} dy, \quad (12.35)$$

$$a = \frac{\gamma_L (\ln 2)^{1/2}}{\gamma_D}, \quad x = \frac{(\omega - \omega_0) (\ln 2)^{1/2}}{\gamma_D},$$

где ω_0 – волновое число центра линии; $\alpha = \alpha_{mn}$, $\gamma_L = \gamma_{mn}^L$, $\gamma_D = \gamma_{mn}^D$. Вместо интеграла (12.35) оказывается удобным использовать достаточно простую аппроксимацию фойгтовской функции, предложенную в работе (Матвеев В.С., 1972). Если ввести обозначения $\eta = (\omega - \omega_0)/\gamma_v$, $\xi = \gamma_L/\gamma_v$ (γ_v – полуширина линии с фойгтовским контуром), то

$$\kappa(\eta, \xi) = \frac{\alpha}{\gamma_v (\ln 2/\pi)^{1/2} (1 - \xi) \exp(-\eta^2 \ln 2)} + \frac{\alpha \xi}{\left[\pi \gamma_v (1 + \eta^2) \right]} - \frac{\alpha \xi (1 - \xi)}{(\pi \gamma_v) (1,5/\ln 2 + 1 + \xi) \left[0.66 \exp(-0.4\eta^2) - (40 - 5.5\eta^2 + \eta^4)^{-1} \right]},$$

$$\gamma_v = \frac{\gamma_D + (\gamma_L^2 + 4\gamma_D^2)^{1/2}}{2} + 0.05 \frac{1 - 2\gamma_L}{\gamma_L + (\gamma_L^2 + 4\gamma_D^2)^{1/2}}. \quad (12.36)$$

Использование формул (12.36) позволяет рассчитать функцию профиля фойгтовской линии с точностью 3%, чего вполне достаточно для практических целей.

В расчетах контуров спектральных линий может возникнуть проблема корректности определения коэффициента поглощения в далеких крыльях. На больших расстояниях от центра линии контур не описывается дисперсионной (лоренцевской) функцией. При анализе этого вопроса следует выделить различные расчетные случаи. Первый случай – это построение синтетического профиля коэффициента поглощения применительно к задачам спектроскопии. Здесь необходимо каждый раз задачу решать индивидуально, исходя из конкретных условий в плазме. В случае необходимости можно использовать иную зависимость для коэффициента поглощения в крыльях линий (например, степенную). При решении задач теплообмена излучением можно считать, что контур линии на фоне квазинепрерывного спектра с достаточной точностью находится по формулам (12.36).

Таким образом, для расчета синтетического спектра коэффициента поглощения в атомных линиях необходимо воспользоваться одной из баз данных, упомянутых выше, выбрать подходящий способ расчета параметров атомных линий и выполнить расчет контура каждой атомной линии по формуле (12.36).

Суммарный коэффициент поглощения в спектральном диапазоне $\Delta\omega$ с атомными линиями определяется по формуле

$$\kappa_\omega = \kappa_{\Delta\omega}^c + \sum_i^N \kappa_i(\omega_{0i}, \omega), \quad (12.37)$$

где $\kappa_{\Delta\omega}^c$ – фоновый коэффициент поглощения в квазинепрерывном спектре; $\kappa_i(\omega_{0i}, \omega)$ – коэффициент поглощения на частоте ω , обусловленный i -й линией с центром ω_{0i} ; N – число линий, попавших в $\Delta\omega$.

Формула (12.37) определяет спектральный коэффициент поглощения в фиксированной точке ω шкалы волновых чисел. Эта же формула используется для построения подробной спектральной зависимости коэффициента поглощения в выделенном спектральном диапазоне $\Delta\omega$ (так называемого синтетического контура спектра коэффициента поглощения). С этой целью в спектральном диапазоне $\Delta\omega$ вводится подробная расчетная сетка по волновому числу, в каждой точке которой спектральный коэффициент поглощения находится по формуле (12.37). Расчетная сетка должна быть настолько подробной, чтобы контур каждой линии можно было описать без заметного искажения.

Пример расчета спектрального коэффициента поглощения с подробным учетом контуров атомных линий в высокотемпературной смеси газов CO_2 и N_2 при $p = 1 \text{ атм}$ и $T = 10000 \text{ К}$ представлен на рис.11.1.

12.4.2. Расчет коэффициентов поглощения в молекулярных линиях

Задача вычисления контуров вращательных молекулярных линий возникает при построении синтетического контура коэффициентов поглощения и испускания, а также при проведении эталонных расчетов переноса излучения в однородных и неоднородных слоях молекулярных газов. Под эталонными понимаются наиболее точные и подробные расчеты, предназначенные для сравнения с ними результатов, полученных по различного рода приближенным моделям. В этом смысле соответствующие расчеты можно было бы назвать «точными». В настоящее время наиболее полная информация по вращательным линиям двух- и многоатомных молекул, расположенных в инфракрасной области спектра, собрана в банке данных HITRAN (Rothman L.S. et al., 1992). Здесь представлены все необходимые данные для расчета интенсивностей и полуширин линий при условиях в газе, близких к нормальным.

Анализ механизмов уширения вращательных линий молекулярного спектра показывает, что с достаточной точностью для

задач переноса теплового излучения, можно принимать в учет лишь два механизма уширения: ударный и доплеровский (Гуди Р., 1966; Пеннер С.С., 1963).

Доплеровское уширение рассчитывается по формуле

$$\gamma_{mn}^D = \left(2kT \frac{\ln 2}{M_a m_a c_0^2} \right)^{1/2} \omega_{mn} \cong 3.58 \times 10^{-7} \left(\frac{T}{M_a} \right)^{1/2} \omega_{mn}, \text{ см}^{-1}, (12.38)$$

где $m_a = 1.66 \times 10^{-27}$ г – атомная единица массы; M_a – атомный вес в относительных атомных единицах; ω_{mn} – волновое число центра вращательной линии; T – температура, К.

Ударное уширение вращательных линий, описываемое контуром Лоренца рассчитывается по соотношению, аппроксимирующему опытные данные (Пеннер С.С., 1963; Ludwig С.В., 1971):

$$\gamma_i^L = \sum_j b_{ij} p_j (273/T)^{1/2} + b_{ii} p_i (273/T), \quad (12.39)$$

где индексами i и j помечены параметры поглощающей и уширяющих молекул; p – парциальное давление; b_{ij} – эмпирическая постоянная уширения; b_{ii} – эмпирическая константа резонансного уширения. При получении указанной аппроксимации полагалось, что составляющие уширения, обусловленные различными уширяющими молекулами, являются аддитивными. Зависимость $\gamma^L \sim pT^{-1/2}$ получается при использовании кинетической теории газов. Константа уширения b_{ij} оценивается по формуле

$$b_{ij} = 2.2 \times 10^{-2} D_i D_j \left(1/M_{ai} + 1/M_{aj} \right)^{1/2}, \quad (12.40)$$

где D_i, D_j – оптические диаметры, Å. Выполненное в работе (Кузнецова Л.А., Кузьменко Н.Е. и др., 1980) сопоставление оптических диаметров с кинетическими диаметрами столкновения показывает, что они достаточно близки. Однако, следует подчеркнуть, что проблема расчета уширения вращательных линий остается до настоящего времени актуальной проблемой молекулярной спектроскопии высокого разрешения. Сложность данной проблемы обусловлена во многом тем, что уширение линий является ха-

рактической не только самой молекулы, а во многом зависит от условий в газе и плазме. Кроме этого, еще следует иметь в виду возможность штарковского уширения вращательных линий электронами, которое может оказаться существенным при $T \geq 8000$ К (для атмосферных давлений) (Breene R.G., Jr., 1968).

Таким образом, для расчета синтетического спектра поглощения во вращательных молекулярных линиях необходимо воспользоваться базой данных для задания местоположения (ω_{0i}), интенсивности α_i и постоянных, характеризующих уширение каждой вращательной линии, после чего воспользоваться формулами (12.36) и (12.37). Теоретические расчеты указанных параметров выполняются методами квантовой механики и квантовой химии (Собельман И.И., 1963; Степанов Н.Ф., 2001).

Пример расчета спектрального коэффициента поглощения во вращательных линиях молекулы C_2 показан на рис. 11.4.

Исследование влияния учета вращательной структуры электронно-колебательно-вращательных спектров на характеристики радиационного нагрева элементов конструкций энергетических устройств выполнено в работе (Kuznetsova L.A. et al., 1988). Показано, что в спектральных диапазонах $\Delta\omega > 50 \div 100 \text{ см}^{-1}$ усреднение по вращательной структуре позволяет получить результаты с достаточно высокой точностью. В меньших спектральных диапазонах необходимо принимать в учет линейчатую структуру спектра. При этом большое значение имеет корректный учет структуры ветвей вращательных линий.

ГЛАВА 13

МОДЕЛИ НЕЛОКАЛЬНОГО УСРЕДНЕНИЯ

Модели нелокального усреднения составляют отдельную группу методов интегрирования уравнения переноса по частоте электромагнитного излучения, которые ориентированы на решение задач радиационной газовой динамики, то есть в тех случаях, когда уравнение переноса излучения интегрируется многократно совместно с другими уравнениями динамики сплошной среды.

К этому классу моделей относятся:

- модели эффективных средних «серых» коэффициентов (Sampson D.H., 1965; Sampson D.H. et al., 1972; Traugoff S.C., 1968), где усредненный по спектру коэффициент поглощения задается в виде функциональной зависимости типа

$$\kappa = F(\kappa_P, \kappa_R),$$

где κ_P и κ_R – среднепланковский и среднеросселандовский коэффициенты поглощения;

- квазидиффузионный метод (Гольдин В.Я., 1964) и различные варианты этого метода, представляющие собой его развитие для различных конкретных ситуаций;
- метод введения усредненных по спектру коэффициентов поглощения Анфимова и Шари (Анфимов Н.А. и др., 1968);
- метод нелокального усреднения (Немчинов И.В., 1970);
- метод парциальных характеристик (Севастьяненко В.Г., 1979, 1980);
- метод эффективных сечений (Овсянников В.М., 1982; Овсянников В.М. и др., 1971);

- метод нелокальных интегральных характеристик (Гудзовский А.В. и др., 1981; Карасев А.Б. и др., 1979);
- метод эффективных полумоментных коэффициентов (Горский В.В. и др., 1982);
- метод эффективных квадромоментных коэффициентов (Суржиков С.Т., 1992).

13.1. Квазидиффузионный метод Гольдина

Этот метод предложен в работе (Гольдин В.Я., 1964).

Суть квазидиффузионного метода состоит во введении дробно-линейных функционалов решения уравнения переноса, позволяющих существенно повысить эффективность вычислительной процедуры. В данном разделе будет изложена общая идея метода. Применение метода квазидиффузии к решению задач интегрирования по частоте многими авторами показало эффективность данного подхода.

13.1.1. Уравнения метода квазидиффузии в случае одномерной плоской геометрии

Рассмотрим уравнение переноса для одномерной плоской геометрии без учета рассеяния

$$\mu \frac{\partial J(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J(\tau, \mu) = J_b(\tau) \quad (13.1)$$

с граничными условиями

$$\tau = 0, \quad \mu > 0: \quad J(0, \mu) = J_0^+, \quad (13.2)$$

$$\tau = \tau_H, \quad \mu < 0: \quad J(\tau_H, \mu) = J_H^-. \quad (13.3)$$

Применим к уравнению (13.1) последовательно следующие два интегральных оператора

$$\Lambda_0 \{ \} = \int_{-1}^1 \{ \} d\mu, \quad (13.4)$$

$$\Lambda_1 \{ \} = \int_{-1}^1 \mu \{ \} d\mu, \quad (13.5)$$

в результате чего получим

$$\frac{dW(\tau)}{d\tau} + \kappa c U(\tau) = \kappa c U_b(\tau), \quad (13.6)$$

$$c \frac{dD(\tau)U(\tau)}{d\tau} + W(\tau) = 0, \quad (13.7)$$

где

$$D(\tau) = \frac{\int_{-1}^1 J(\tau, \mu) \mu^2 d\mu}{\int_{-1}^1 J(\tau, \mu) d\mu}. \quad (13.8)$$

Функция $D(\tau)$ называется коэффициентом квазидиффузии.

Граничные условия для системы (13.6), (13.7) формулируются из соотношений

$$W(\tau=0) = \int_{-1}^1 J(\mu) \mu d\mu = C_0 U(\tau=0), \quad (13.9)$$

$$W(\tau=\tau_H) = \int_{-1}^1 J(\tau_H, \mu) \mu d\mu = C_H U(\tau=\tau_H), \quad (13.10)$$

где

$$C_0 = c \frac{\int_{-1}^1 J(0, \mu) \mu d\mu}{\int_{-1}^1 J(0, \mu) d\mu}, \quad (13.11)$$

$$C_H = c \frac{\int_{-1}^1 J(\tau_H, \mu) \mu d\mu}{\int_{-1}^1 J(\tau_H, \mu) d\mu}. \quad (13.12)$$

Соотношения (13.9) и (13.10) могут быть записаны с учетом (13.7) только относительно объемной плотности лучистой энергии

$$-c \frac{dD(\tau=0)U(\tau=0)}{d\tau} = C_0 U(\tau=0), \quad (13.13)$$

$$-c \frac{dD(\tau_H)U(\tau_H)}{d\tau} = C_H U(\tau=\tau_H). \quad (13.14)$$

Отметим основные особенности сформулированной краевой задачи (13.6), (13.7), (13.13), (13.14):

1) система уравнений не содержит в явном виде зависимости от угловых переменных;

2) коэффициенты $D(\tau)$, C_0 и C_H не могут быть найдены из решения самой краевой задачи, то есть система уравнений незамкнута;

3) если угловая зависимость интенсивности известна точно, то система уравнений (13.6), (13.7) дает также точное решение относительно плотности потока излучения и объемной плотности лучистой энергии.

Метод квазидиффузии оказывается весьма экономичным при решении задач радиационной газо- и плазмодинамики. Рассмотрим типичный алгоритм использования метода квазидиффузии при решении задачи радиационной газодинамики (РГД) итерационным методом. Пусть на некоторой p -ой итерации расчета всех искомых функций задачи, производится точное решение уравнения переноса (13.1), после чего рассчитываются функции $D(\tau)$, C_0 и C_H . В течение ряда последующих итераций решения системы уравнений РГД используется только система уравнений квазидиффузии с коэффициентами $D(\tau)$, C_0 и C_H , рассчитанными на p -й итерации. Очевидно, чем реже необходимо уточнять указанные коэффициенты, тем более экономичным будет весь алгоритм. Важной особенностью метода квазидиффузии является то, что коэффициенты $D(\tau)$, C_0 и C_H являются весьма консервативными функциями, требующими редкого уточнения. Именно это и определяет высокую эффективность данного метода при

решении задач радиационной газовой динамики в условиях сильного радиационно-газодинамического взаимодействия.

13.1.2. Уравнения метода квазидиффузии в случае двумерной геометрии

Обобщение метода квазидиффузии на двумерный случай, и пример его использования даны в работе (Аксенов Н.Н. и др., 1979; Четверушкин Б.Н., 1985).

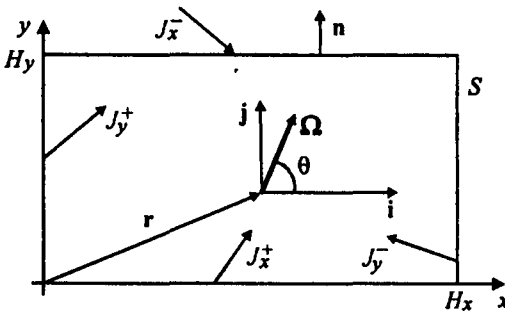


Рис. 13.1. Расчетная область для использования метода квазидиффузии

На примере двумерного уравнения переноса излучения в прямоугольной декартовой системе координат (рис. 13.1)

$$\omega_x \frac{\partial J(\mathbf{r}, \Omega)}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial J(\mathbf{r}, \Omega)}{\partial y} + \kappa J(\mathbf{r}, \Omega) = \kappa J_b(\mathbf{r}) \quad (13.15)$$

с граничными условиями ($\omega_x = \cos \theta$, $\omega_y = \cos(\pi/2 - \theta)$):

$$y=0, \quad \cos \alpha > 0: \quad J(x, y=0, \Omega) = J_x^+, \quad \alpha = \pi/2 - \theta, \quad (13.16)$$

$$y=H_y, \quad \cos \alpha < 0: \quad J(x, y=H_y, \Omega) = J_x^-, \quad \alpha = \pi/2 - \theta,$$

$$x=0, \quad \cos \theta > 0: \quad J(x=0, y, \Omega) = J_y^+,$$

$$x=H_x, \quad \cos \theta < 0: \quad J(x=H_x, y, \Omega) = J_y^-.$$

Действуя на уравнение (13.15) сначала интегральным оператором

$$\Lambda_0 \{ \} = \int_{4\pi} \{ \} d\Omega, \quad (13.17)$$

а затем

$$\Lambda_1 \{ \} = \int_{4\pi} \{ \} \Omega d\Omega, \quad (13.18)$$

получим систему квазидиффузионных уравнений

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \kappa c U = \kappa c U_b, \quad (13.19)$$

$$c \frac{\partial D_{xx} U}{\partial x} + c \frac{\partial D_{xy} U}{\partial y} + \kappa W_x = 0, \quad (13.20)$$

$$c \frac{\partial D_{xy} U}{\partial x} + c \frac{\partial D_{yy} U}{\partial y} + \kappa W_y = 0, \quad (13.21)$$

где

$$D_{xx} = \frac{\int \omega_x^2 J d\Omega}{\int_{4\pi} J d\Omega}, \quad D_{yy} = \frac{\int \omega_y^2 J d\Omega}{\int_{4\pi} J d\Omega}, \quad D_{xy} = \frac{\int \omega_x \omega_y J d\Omega}{\int_{4\pi} J d\Omega}. \quad (13.22)$$

Граничные условия формулируются в виде

$$(W_n)_s = (C_n U)_s, \quad (13.23)$$

где s – одна из четырех границ (поверхностей) расчетной области; \mathbf{n} – внешняя нормаль к границе,

$$C_n = \frac{\int (\Omega \cdot \mathbf{n}) J(\mathbf{r} \in s, \Omega) d\Omega}{\int_{4\pi} J(\mathbf{r} \in s, \Omega) d\Omega}. \quad (13.24)$$

Алгоритм метода квазидиффузии такой же, как в случае одномерной задачи. На некотором p -ом шаге решения задачи (итерационного или истинно нестационарного процесса) решается уравнение переноса излучения (13.15) относительно интенсивности $J(\mathbf{r}, \Omega)$. Затем рассчитываются коэффициенты квазидиффу-

зии (13.22) и коэффициенты граничных условий (13.24). На протяжении ряда последующих итераций (временных шагов) эти коэффициенты считаются заданными функциями координат (иногда используется термин «замораживание» коэффициентов). Затем указанный вычислительный цикл повторяется.

В работе (Четверушкин Б.Н., 1985) изложен алгоритм, позволяющий исключить процедуру решения исходного уравнения переноса, что при допустимой потере точности, заметно повышает экономичность расчетного алгоритма. В этом методе при расчете коэффициентов квазидиффузии используется не исходное уравнение переноса, а система одномерных уравнений, приблизительно аппроксимирующая его

$$\mu \frac{dJ_x}{dx} + \kappa J_x = \kappa J_b, \quad (13.25)$$

$$\eta \frac{dJ_y}{dy} + \kappa J_y = \kappa J_b, \quad (13.26)$$

где $\mu = \cos \theta$, $\eta = \cos(\pi/2 - \theta)$.

Тогда коэффициенты квазидиффузии рассчитываются по формулам

$$D_{xx} = \int_{-1}^1 \mu^2 J_x d\mu \bigg/ \int_{-1}^1 J_x d\mu, \quad (13.27)$$

$$D_{yy} = \int_{-1}^1 \eta^2 J_y d\eta \bigg/ \int_{-1}^1 J_y d\eta. \quad (13.28)$$

13.1.3. Поточковый вариант метода квазидиффузии

Метод предложен и исследован в работах (Гермогенова Т.А. и др., 1969; Николайшвили Ш.С., 1966) для плоского слоя, перенос излучения, в котором описывается уравнением

$$\mu \frac{\partial J(\tau, \mu)}{\partial \tau} + J(\tau, \mu) = J_b(\tau) \quad (13.29)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \tau = 0, \quad \mu > 0: J(0, \mu) &= J_0^+(\mu), \\ \tau = \tau_H, \quad \mu < 0: J(\tau_H, \mu) &= J_H^-(\mu). \end{aligned} \quad (13.30)$$

К уравнению (13.29) последовательно применяются интегральные операторы следующего вида

$$\Lambda_0^+ \{ \} = \int_0^1 \{ \} d\mu, \quad (13.31)$$

$$\Lambda_0^- \{ \} = \int_{-1}^0 \{ \} d\mu, \quad (13.32)$$

в результате чего получается система двух уравнений

$$\frac{dD^+U^+}{d\tau} + U^+ = 2\pi U_b, \quad (13.33)$$

$$\frac{dD^-U^-}{d\tau} + U^- = 2\pi U_b, \quad (13.34)$$

с соответствующими граничными условиями

$$U^+(\tau=0) = \int_0^1 J_0^+(\mu) d\mu, \quad (13.35)$$

$$U^-(\tau=\tau_H) = \int_{-1}^0 J_0^-(\mu) d\mu, \quad (13.36)$$

где

$$D^+ = \frac{\int_0^1 \mu J d\mu}{\int_0^1 J d\mu}, \quad D^- = \frac{\int_{-1}^0 \mu J d\mu}{\int_{-1}^0 J d\mu},$$

$$U^+ = \int_0^1 J d\mu, \quad U^- = \int_{-1}^0 J d\mu.$$

13.2. Многогрупповой квазидиффузионный метод

Метод подробно изложен в работе (Четверушкин Б.Н., 1985). За основу выбрано уравнение для плоского нерассеивающего слоя в многогрупповом приближении

$$\mu \frac{dJ_g(x, \mu)}{dx} + \kappa_g(x) J_g(x, \mu) = \kappa_g(x) J_{b,g}, \quad g=1, 2, \dots, N_g, \quad (13.37)$$

с граничными условиями

$$x=0, \quad \mu > 0: \quad J_g(0, \mu) = J_{g,0}^+(\mu), \quad (13.38)$$

$$x=H, \quad \mu < 0: \quad J_g(H, \mu) = J_{g,H}^-(\mu), \quad (13.39)$$

где

$$J_g(x, \mu) = \int_{\Delta\omega_g} J_\omega(x, \mu) d\omega, \quad (13.40)$$

$$\kappa_g(x) = \frac{1}{\Delta\omega_g} \int_{\Delta\omega_g} \kappa_\omega(x) d\omega. \quad (13.41)$$

Применим к уравнению (13.37) сначала интегральный оператор

$$\Lambda_0^+ \{ \} = \int_0^1 \{ \} d\mu, \quad (13.42)$$

а затем

$$\Lambda_0^- \{ \} = \int_{-1}^0 \{ \} d\mu, \quad (13.43)$$

в результате чего получим

$$\frac{dW_g^+(x)}{dx} + \kappa_g(x) U_g^+(x) = \kappa_g(x) J_{b,g}(x), \quad g=1, 2, \dots, N_g, \quad (13.44)$$

$$\frac{dW_g^-(x)}{dx} + \kappa_g(x) U_g^-(x) = \kappa_g(x) J_{b,g}(x), \quad g=1, 2, \dots, N_g, \quad (13.45)$$

где
$$W_g^+(x) = \int_0^1 \mu J_g(x, \mu) d\mu, \quad (13.46)$$

$$W_g^-(x) = \int_{-1}^0 \mu J_g(x, \mu) d\mu, \quad (13.47)$$

$$U_g^+(x) = \int_0^1 J_g(x, \mu) d\mu, \quad (13.48)$$

$$U_g^-(x) = \int_{-1}^0 J_g(x, \mu) d\mu. \quad (13.49)$$

Просуммировав (13.44) и (13.45) по всем спектральным группам, получим

$$\frac{dW^+(x)}{dx} + D^+(x) W^+(x) = S(x), \quad (13.50)$$

$$\frac{dW^-(x)}{dx} + D^-(x) W^-(x) = S(x), \quad (13.51)$$

где

$$D^\pm(x) = \frac{\sum_{g=1}^{N_g} \kappa_g(x) U_g^\pm(x)}{\sum_{g=1}^{N_g} W_g^\pm(x)}, \quad (13.52)$$

$$S(x) = \sum_{g=1}^{N_g} \kappa_g(x) J_{b,g}(x), \quad (13.53)$$

$$W^\pm(x) = \sum_{g=1}^{N_g} W_g^\pm(x), \quad U^\pm(x) = \sum_{g=1}^{N_g} U_g^\pm(x). \quad (13.54)$$

Введение интегральных среднепланковских коэффициентов позволяет дать окончательную формулировку

$$\frac{dW^+(x)}{dx} + D^+(x) W^+(x) = \kappa_P(x) \bar{\sigma} T^4, \quad (13.55)$$

$$\frac{dW^-(x)}{dx} + D^-(x) W^-(x) = \kappa_P(x) \bar{\sigma} T^4. \quad (13.56)$$

Граничные условия для системы (13.55), (13.56) формулируются в следующем виде

$$W^+(x=0) = \sum_{g=1}^{N_g} W_g^+(x=0) = \sum_{g=1}^{N_g} \int_0^1 \mu J_{0,g}^+(\mu) d\mu, \quad (13.57)$$

$$W^-(x=H) = \sum_{g=1}^{N_g} W_g^-(x=H) = \sum_{g=1}^{N_g} \int_0^1 \mu J_{H,g}^-(\mu) d\mu. \quad (13.58)$$

13.3. Интегральное квазидиффузионное приближение

Система интегральных квазидиффузионных уравнений получена в работе (Гольдин В.Я. и др., 1972; Четверушкин Б.Н., 1985).

В качестве исходной рассмотрим систему квазидиффузионных уравнений в групповом приближении

$$\frac{dW_g(x)}{dx} + c\kappa_g(x) U_g(x) = c\kappa_g(x) U_{b,g}, \quad (13.59)$$

$$c \frac{dD_g(x) U_g(x)}{dx} + \kappa_g(x) W_g(x) = 0, \quad g=1, 2, \dots, N_g \quad (13.60)$$

с граничными условиями

$$x=0: W_g(0) = C_{0,g} U_g(0), \quad g=1, 2, \dots, N_g, \quad (13.61)$$

$$x=H: W_g(H) = C_{H,g} U_g(H), \quad g=1, 2, \dots, N_g. \quad (13.62)$$

Суммируя по всем спектральным группам, получаем

$$\frac{dW(x)}{dx} + c\bar{\kappa}(x)U(x) = cS(x), \quad (13.63)$$

$$\frac{dD(x)U(x)}{dx} + \bar{\kappa}(x)[cU(x) + W(x)] - \bar{\kappa}(x)cU(x) = 0, \quad (13.64)$$

с граничными условиями

$$W(0) = C_0 U(0), \quad (13.65)$$

$$W(H) = C_H U(H), \quad (13.66)$$

где

$$W(x) = \sum_{g=1}^{N_g} W_g(x), \quad U(x) = \sum_{g=1}^{N_g} U_g(x). \quad (13.67)$$

$$D(x) = \frac{\sum_{g=1}^{N_g} \int_{-1}^1 \mu^2 J_g(x, \mu) d\mu}{\sum_{g=1}^{N_g} \int_{-1}^1 J_g(x, \mu) d\mu},$$

$$C_0 = \frac{\sum_{g=1}^{N_g} \int_{-1}^1 \mu J_g(0, \mu) d\mu}{\sum_{g=1}^{N_g} \int_{-1}^1 J_g(0, \mu) d\mu}, \quad C_H = \frac{\sum_{g=1}^{N_g} \int_{-1}^1 \mu J_g(H, \mu) d\mu}{\sum_{g=1}^{N_g} \int_{-1}^1 J_g(H, \mu) d\mu},$$

$$\bar{\kappa}(x) = \frac{\sum_{g=1}^{N_g} \kappa_g \int_{-1}^1 J_g(x, \mu) d\mu}{\sum_{g=1}^{N_g} \int_{-1}^1 J_g(x, \mu) d\mu}, \quad \bar{\kappa}(x) = \frac{\sum_{g=1}^{N_g} \kappa_g \int_{-1}^1 (1 + \mu) J_g(x, \mu) d\mu}{\sum_{g=1}^{N_g} \int_{-1}^1 (1 + \mu) J_g(x, \mu) d\mu}$$

Заметим, что введение коэффициента $\bar{\kappa}(x)$ вместо

$$\frac{\sum_{g=1}^{N_g} \kappa_g \int_{-1}^1 \mu J_g(x, \mu) d\mu}{\sum_{g=1}^{N_g} \int_{-1}^1 \mu J_g(x, \mu) d\mu}$$

позволяет избежать неблагоприятного случая обращения в нуль знаменателя последнего выражения.

13.4. Метод усреднения уравнения переноса Анфимова и Шари

Метод разработан и применен для решения задачи радиационной газодинамики в работе (Анфимов Н.А. и др., 1968).

В идейном отношении этот метод подобен методу квазидиффузии и состоит во введении усредненных по направлениям и спектру коэффициентам поглощения. Однако для получения эффективных коэффициентов переноса используются не уравнения квазидиффузии, а непосредственно уравнение переноса. Метод применен к решению задачи о радиационно-конвективном теплообмене в ударном слое у поверхности затупленного тела при обтекании его гиперзвуковым потоком воздуха в окрестности критической линии тока.

Излучающий ударный слой представляется в виде плоского неоднородного слоя, для которого решается следующая система уравнений

$$\mu \frac{dJ_{\lambda}^{+}}{dx} + \kappa_{\lambda} J_{\lambda}^{+} = \kappa_{\lambda} J_{b,\lambda}, \quad \mu \geq 0, \quad (13.68)$$

$$\mu \frac{dJ_{\lambda}^{-}}{dx} + \kappa_{\lambda} J_{\lambda}^{-} = \kappa_{\lambda} J_{b,\lambda}, \quad \mu \leq 0, \quad (13.69)$$

где $\mu = \cos \theta$, θ – угол между направлением распространения излучения и осью x , нормальной к поверхности плоского слоя, $J_{\lambda}^{+} = J_{\lambda}^{+}(x, \mu)$, $J_{\lambda}^{-} = J_{\lambda}^{-}(x, \mu)$ – спектральная интенсивность излу-

чения в верхнюю и нижнюю полусферы, $\kappa_\lambda = \kappa_\lambda(x)$ – спектральный коэффициент поглощения, $J_{b,\lambda} = J_{b,\lambda}(x)$ – спектральная функция излучения абсолютно черного тела.

Граничные условия формулируются следующим образом:
 $x = 0$ (поверхность обтекаемого тела):

$$J_\lambda^+(x=0, \mu) = \varepsilon_\lambda J_{b,\lambda}(x=0) + (1 - \varepsilon_\lambda) \frac{W_\lambda^-(x=0)}{\pi}, \quad (13.70)$$

$$\mu \in [0, 1];$$

$x = H$ (фронт ударной волны):

$$J_\lambda^-(x=H, \mu) = 0, \quad \mu \in [-1, 0]; \quad (13.71)$$

где ε_λ – спектральная степень черноты поверхности,

$$W_\lambda^-(x=0) = 2\pi \int_{-1}^0 J_\lambda^-(x=0, \mu) \mu d\mu \quad (13.72)$$

– плотность спектрального одностороннего потока излучения к поверхности.

Уравнения (13.68), (13.69) с граничными условиями (13.70), (13.71) интегрировались с использованием многогрупповой модели коэффициента поглощения в $N_\lambda = 128$ спектральных группах для различных угловых направлений. Число равновеликих угловых зон варьировалось в пределах $N_\Omega = 1 + 10$. Дивергенция интегрального радиационного потока рассчитывалась по формуле

$$\frac{dW_x}{dx} = \frac{2\pi}{N_\Omega} \sum_{i=1}^{N_\lambda} \sum_{j=1}^{N_\Omega} \kappa_i \left\{ 2J_{b,\lambda_i} - [J_{\lambda_i}^+(x, \mu_j) + J_{\lambda_i}^-(x, \mu_j)] \right\} \Delta\lambda_i, \quad (13.73)$$

где κ_i – средний (групповой) коэффициент поглощения в i -м спектральном диапазоне $\Delta\lambda_i$; λ_i – любая точка спектрального диапазона $\Delta\lambda_i$ (например, центр этого диапазона).

Изложенная процедура расчета переноса теплового излучения является в особенности трудоемкой при решении радиационно-газодинамической задачи, когда вычисление интегральных ра-

диационных характеристик в слое приходится производить многократно.

Предложен следующий алгоритм, позволяющий значительно повысить экономичность расчетов.

1. Перенос селективного излучения в многогрупповом приближении рассчитывается лишь на некоторых итерациях радиационно-газодинамической задачи. После этого в каждом узле расчетной сетки по оси x вычисляются два средних коэффициента поглощения:

$$\kappa^+(x) = \frac{\int_0^\infty \kappa_\lambda(x) \int_0^1 (J_{b,\lambda} - J_\lambda^+) d\mu d\lambda}{\int_0^1 \int_0^\infty (J_{b,\lambda} - J_\lambda^+) d\mu d\lambda}, \quad (13.74)$$

$$\kappa^-(x) = \frac{\int_0^\infty \kappa_\lambda(x) \int_{-1}^0 (J_{b,\lambda} - J_\lambda^-) d\mu d\lambda}{\int_0^0 \int_{-1}^\infty (J_{b,\lambda} - J_\lambda^-) d\mu d\lambda}. \quad (13.75)$$

2. Вводится предположение об угловой зависимости интенсивности излучения:

$$\int_0^1 J_\lambda^\pm \mu d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 J_\lambda^\pm d\mu. \quad (13.76)$$

3. Уравнение переноса интегрального излучения формулируется в виде двух уравнений для интегральных интенсивностей в верхнюю ($\mu \geq 0$) и нижнюю ($\mu \leq 0$) полусферы:

$$\frac{1}{2} \frac{dJ^+}{dx} = \kappa^+ (J_b - J^+), \quad (13.77)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dJ^-}{dx} = -\kappa^- (J_b - J^-), \quad (13.78)$$

$$\text{где } J^+ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^1 J_{\lambda}^{\pm} d\mu d\lambda, \quad J_b = \int_0^{\infty} J_{b,\lambda} d\lambda. \quad (13.79)$$

Система уравнений (13.77), (13.78) с соответствующими граничными условиями для интегральной по спектру интенсивности решается на протяжении большого числа итераций. При этом дивергенция интегрального лучистого потока определяется по формуле

$$\frac{dW_x}{dx} = 2\pi \left[\kappa^+ (J_b - J^+) + \kappa^- (J_b - J^-) \right]. \quad (13.80)$$

Профили средних коэффициентов поглощения $\kappa^{\pm}(x)$ использовались таким образом на протяжении ряда итераций по радиационно-газодинамическому взаимодействию.

4. По заданному алгоритму (например, через 10 ÷ 20 итераций), производилось уточнение профилей средних коэффициентов, с которыми уравнения (13.77), (13.78) решались на протяжении последующих итераций.

Предложенный способ решения радиационно-газодинамической задачи оказался весьма эффективным. Однако данный метод обладает двумя недостатками:

- 1) из соотношений (13.74) и (13.75) следует, что в некоторой точке внутри ударного слоя средние коэффициенты терпят разрыв второго рода, что может сказаться на вычислительной процедуре;
- 2) в спектральной и интегральной задачах переноса излучения используются различные методы интегрирования по угловым переменным.

Указанные недостатки могут быть преодолены использованием специальной численной процедуры исключения разрывов функций, например, введением локального усреднения или интерполирующих дробно-линейных функций. Значительно более эффективным оказалось развитие метода Анфимова – Шари, выполненное в работе (Горский В.В. и др., 1982). Этот подход состоит в использовании метода полумоментов, обеспечивающего знакопостоянство и неразрывность всех функций (см. п. 13.9).

13.5. Метод усредненных уравнений переноса Немчинова

Этот метод подробно изложен и исследован в работе (Немчинов И.В., 1970) применительно к одномерным плоским ($\nu = 1$) и сферически симметричным ($\nu = 3$) задачам

$$\mu \frac{dJ_{\omega}(r, \mu)}{dr} + \frac{(\nu-1)(1-\mu^2)}{2r} \frac{dJ_{\omega}(r, \mu)}{d\mu} + \kappa_{\omega} J_{\omega} = \kappa_{\omega} J_{b, \omega}. \quad (13.81)$$

Граничные условия для плоского слоя формулируются в виде

$$\begin{aligned} r=0, \quad \mu > 0: \quad J_{\omega}(0, \mu) &= J_{\omega, 0}^+, \\ r=R, \quad \mu < 0: \quad J_{\omega}(R, \mu) &= J_{\omega, R}^-. \end{aligned} \quad (13.82)$$

Для сферически-симметричного случая граничные условия формулируются в виде

$$r=R, \quad \mu < 0: \quad J_{\omega}(R, \mu) = J_{\omega, R}^-, \quad (13.83)$$

кроме этого следует использовать условие осевой симметрии.

Предположим, что с использованием какого-либо расчетного метода найдена спектральная интенсивность излучения, тогда можно определить полусферические радиационные характеристики, усредненные по угловым переменным в верхней ($\mu > 0$) и нижней ($\mu < 0$) полусферах:

а) спектральные характеристики

$$\begin{aligned} W_{\omega}^+(r) &= 2\pi \int_0^1 \mu J_{\omega}(r, \mu) d\mu, & W_{\omega}^-(r) &= 2\pi \int_{-1}^0 \mu J_{\omega}(r, \mu) d\mu, \\ U_{\omega}^+(r) &= 2\pi \int_0^1 J_{\omega}(r, \mu) d\mu, & U_{\omega}^-(r) &= 2\pi \int_{-1}^0 J_{\omega}(r, \mu) d\mu; \end{aligned} \quad (13.84)$$

б) групповые характеристики

$$W_g^{\pm}(r) = \int_{\Delta\omega_g} W_{\omega}^{\pm}(r) d\omega, \quad U_g^{\pm}(r) = \int_{\Delta\omega_g} U_{\omega}^{\pm}(r) d\omega; \quad (13.85)$$

причем в группу $\Delta\omega_g$ могут входить также подгруппы, расположенные в разных участках спектра;

в) интегральные характеристики

$$W^\pm(r) = \int_0^\infty W_\omega^\pm(r) dr \approx \sum_{g=1}^{N_g} W_g^\pm(r), \quad (13.86)$$

$$U^\pm(r) = \int_0^\infty U_\omega^\pm(r) dr \approx \sum_{g=1}^{N_g} U_g^\pm(r).$$

С использованием полусферических радиационных характеристик определяются следующие полные радиационные характеристики

$$W_\omega = W_\omega^+ + W_\omega^-, \quad U_\omega = U_\omega^+ + U_\omega^-,$$

$$W_g = W_g^+ + W_g^-, \quad U_g = U_g^+ + U_g^-, \quad (13.87)$$

$$W = W^+ + W^-, \quad U = U^+ + U^-.$$

Вводятся функции, характеризующие диаграмму направленности излучения

$$\psi_\omega^\pm = \frac{J_\omega^\pm}{U_\omega^\pm} \quad (13.88)$$

и спектральный состав в пределах каждой g -й группы

$$\left(\varphi_\omega^\pm\right)_g = \frac{U_\omega^\pm}{U_g^\pm}, \quad \omega \in \Delta\omega_g, \quad (13.89)$$

а также спектральные односторонние средние косинусы

$$c_\omega^+(r) = 2\pi \int_0^1 \frac{J_\omega(r, \mu)}{U_\omega^+(r)} \mu d\mu = 2\pi \int_0^1 \psi_\omega^+ \mu d\mu, \quad (13.90)$$

$$c_\omega^-(r) = 2\pi \int_{-1}^0 \frac{J_\omega(r, \mu)}{U_\omega^-(r)} \mu d\mu = 2\pi \int_{-1}^0 \psi_\omega^- \mu d\mu \quad (13.91)$$

и групповые односторонние средние косинусы

$$c_g^\pm = \int_{\Delta\omega_g} c_\omega^\pm(\varphi_\omega^\pm)_g d\omega. \quad (13.92)$$

С использованием введенных односторонних средних косинусов определяются полусферические плотности потоков

$$W_\omega^\pm = c_\omega^\pm(r) U_\omega^\pm(r), \quad W_g^\pm = c_g^\pm(r) U_g^\pm(r). \quad (13.93)$$

Если к уравнению (13.81) применить последовательно интегральные операторы

$$\Lambda_0^+ \{ \} = 2\pi \int_0^1 \{ \} d\mu, \quad (13.94)$$

$$\Lambda_0^- \{ \} = 2\pi \int_{-1}^0 \{ \} d\mu,$$

то вместо (13.81) получим следующие два уравнения

$$\frac{1}{r^{\nu-1}} \cdot \frac{\partial r^{\nu-1} c_\omega^\pm U_\omega^\pm}{\partial r} + \frac{\nu-1}{2r} G_\omega^\pm U_\omega^\pm + \kappa_\omega U_\omega^\pm = \kappa_\omega U_{b,\omega}^\pm, \quad (13.95)$$

где

$$G_\omega^\pm = \mp \frac{J_\omega(r, \mu)}{U_\omega^\pm}, \quad (13.96)$$

G_ω^\pm – спектральный односторонний коэффициент сферичности.

После интегрирования в пределах спектральной группы получаем групповые уравнения переноса

$$\frac{1}{r^{\nu-1}} \cdot \frac{\partial r^{\nu-1} c_g^\pm U_g^\pm}{\partial r} + \frac{\nu-1}{2r} G_g^\pm U_g^\pm + \kappa_g^\pm U_g^\pm = \kappa_{P,g} U_{b,g}^\pm, \quad (13.97)$$

где

$$G_g^\pm = \int_{\Delta\omega_g} G_\omega^\pm(\varphi_\omega^\pm)_g d\omega, \quad (13.98)$$

$$\kappa_g^\pm = \frac{\int \kappa_\omega U_\omega^\pm d\omega}{\int_{\Delta\omega_g} U_\omega^\pm d\omega}, \quad (13.99)$$

$$\kappa_{P,g} = \frac{\int \kappa_\omega U_{P,\omega} d\omega}{\int_{\Delta\omega_g} U_{P,\omega} d\omega}. \quad (13.100)$$

Предложен следующий алгоритм использования сформулированных уравнений при решении задач радиационной газо- и плазмодинамики.

1) Пусть в некоторый момент времени t^P производится расчет спектральной интенсивности излучения $J_\omega(r, \mu)$ во всей расчетной области.

2) Последовательно производится расчет функций:

- $U_\omega^\pm(r)$ — по формуле (13.84),
- $\psi_\omega^\pm(r)$ — по формуле (13.88),
- $c_\omega^\pm(r)$ — по формулам (13.90) и (13.91),
- $G_\omega^\pm(r)$ — по формуле (13.96),
- $(\varphi_\omega^\pm)_g$, $g = \overline{1, N_g}$ — по формуле (13.89),
- c_g^\pm , $g = \overline{1, N_g}$ — по формуле (13.92),
- G_g^\pm , $g = \overline{1, N_g}$ — по формуле (13.98),
- κ_g^\pm , $g = \overline{1, N_g}$ — по формуле (13.99).

3) Используя найденные усредненные коэффициенты, решаются уравнения (13.97) на протяжении ряда последующих шагов по времени t^{P+1} , t^{P+2} , ..., t^{P+s} .

4) После завершения расчетов в момент времени t^{P+s} опять производится решение исходного уравнения относительно интенсивности излучения и процедура повторяется снова.

13.6. Метод усредненных парциальных характеристик

Метод разработан в работах (Севастьяненко В.Г., 1979, 1980) и подробно изложен в (Головнев И.Ф. и др., 1984). Основная идея метода состоит в предварительном интегрировании уравнения переноса по частоте и по направлениям распространения излучения для типичного набора температурных профилей, с целью последующего использования полученных функционалов при серийных расчетах.

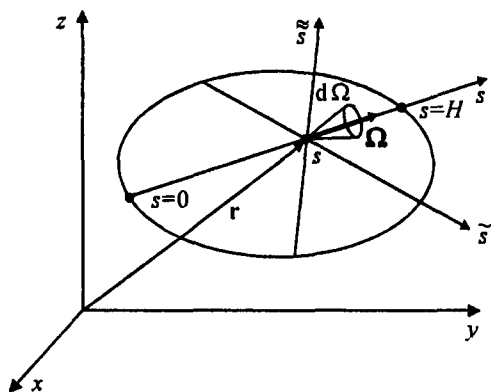


Рис. 13.2. К использованию метода усредненных парциальных характеристик

Формула для расчета дивергенции интегрального радиационного потока в объеме произвольной геометрии может быть представлена в следующем виде (рис. 13.2)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{W}(r) &= \int_0^{\infty} \int_{4\pi} (\Omega \cdot \nabla) J_{\omega}(r, \Omega) d\Omega d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} \int_{4\pi} \frac{\partial J_{\omega}(r, \Omega)}{\partial s} d\Omega d\omega, \end{aligned} \quad (13.101)$$

где подразумевается, что при взятии интеграла по угловым переменным Ω необходимо найти интенсивность излучения вдоль всех лучей $s, \bar{s}, \tilde{s}, \dots$ (в идеале – бесконечно большого, на практике – достаточного для вычисления интеграла с заданной точно-

стью), пронизывающих элементарный физический объем с радиус-вектором \mathbf{r} . Спектральная интенсивность излучения вдоль выделенного направления дается формальным решением уравнения переноса

$$J_{\omega}(s) = J_{\omega}(s=0) \exp \left[- \int_0^s \kappa_{\omega}(s') ds' \right] + \int_0^s \kappa_{\omega}(s') J_{b,\omega}(s') \exp \left[- \int_{s'}^s \kappa_{\omega}(s'') ds'' \right] ds'. \quad (13.102)$$

Тогда с учетом (13.102), выражение для дивергенции плотности интегрального лучистого потока может быть записано

$$\nabla \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \nabla J(s) d\Omega, \quad (13.103)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla J(s) &= \int_0^{\infty} \nabla J_{\omega}(s) d\omega = \int_0^{\infty} J_{b,\omega}(s) \kappa_{\omega}(s) d\omega - \\ &- \int_0^{\infty} \kappa_{\omega}(s) \int_0^{\infty} \kappa_{\omega}(s') J_{b,\omega}(s') \exp \left[- \int_{s'}^s \kappa_{\omega}(s'') ds'' \right] ds' d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} J_{b,\omega}(s) \kappa_{\omega}(s) d\omega - \int_0^s \int_0^{\infty} \kappa_{\omega}(s) \kappa_{\omega}(s') J_{b,\omega}(s') \times \\ &\times \exp \left[- \int_{s'}^s \kappa_{\omega}(s'') ds'' \right] d\omega ds'. \end{aligned} \quad (13.104)$$

Введем обозначения

$$I_0(s) = \int_0^{\infty} J_{b,\omega}(s) \kappa_{\omega}(s) d\omega, \quad (13.105)$$

$$I_1(s, s') = \int_0^{\infty} \kappa_{\omega}(s) \kappa_{\omega}(s') J_{b,\omega}(s') \exp \left[- \int_{s'}^s \kappa_{\omega}(s'') ds'' \right] d\omega, \quad (13.106)$$

с учетом которых

$$\nabla J(s) = I_0(s) - \int_0^s I_1(s, s') ds'. \quad (13.107)$$

Автором работ (Севастьяненко В.Г., 1979, 1980) предложено дополнительное преобразование, позволяющее сделать расчет по формулам (13.103)–(13.107) более удобными. Это преобразование состоит в том, что к правой части (13.104) добавляется и вычитается следующее слагаемое

$$\int_0^s \int_0^\infty \kappa_\omega(s) \kappa_\omega(s') J_{b,\omega}(s) \exp\left[-\int_{s'}^s \kappa_\omega(s'') ds''\right] ds' d\omega,$$

что позволяет записать

$$\nabla J(s) = [\tilde{I}_0(s)]_0^\infty - \int_0^s \tilde{I}_1(s, s') ds', \quad (13.108)$$

$$[\tilde{I}_0(s)]_0^\infty = \int_0^\infty J_{b,\omega}(s) \kappa_\omega(s) \exp\left[-\int_{s'}^s \kappa_\omega(s'') ds''\right] d\omega, \quad (13.109)$$

$$\tilde{I}_1(s, s') = \int_0^\infty \kappa_\omega(s') \kappa_\omega(s) [J_{b,\omega}(s') - J_{b,\omega}(s)] \exp\left[-\int_{s'}^s \kappa_\omega(s'') ds''\right] d\omega. \quad (13.110)$$

До настоящего времени никаких допущений не делалось и формулы (13.108)–(13.110) позволяют в принципе получить решение задачи отыскания дивергенции плотности интегрального радиационного потока с любой наперед заданной точностью.

Целью метода парциальных характеристик является разработка способа экономичного расчета интегралов (13.109) и (13.110). Видно, что основу расчетного алгоритма должна составлять процедура вычисления интеграла

$$J(s) = \int_0^s J_b(s') \kappa_p(s') \exp(-\tau) ds',$$

где

$$\kappa_P(s') = \frac{\int_0^{\infty} \kappa_{\omega}(s') J_{b,\omega}(s') d\omega}{\int_0^{\infty} J_{b,\omega}(s') d\omega},$$

$\tau = \tau(s, s')$ – средняя по спектру эффективная оптическая толщина.

Главная идея метода состоит в том, что в качестве модельного (эффективного) оптического пути, для которого и рассчитывается среднее пропускание, и который должен быть эквивалентен реальному оптическому пути, следует выбирать не однородный, а некоторый неоднородный модельный путь, который может, в принципе, сколь угодно точно аппроксимировать реальный путь поглощения.

В качестве примера простейшего неоднородного пути предложен луч с линейным распределением температуры между двумя граничными точками. Причем, если значение $T(s')$ берется по точке s' (в этой же точке рассчитывается излучательная способность $\kappa_P(s')J_b(s')$), то значение температуры во второй точке (s), где собственно и ищется решение, подбирается из условия равенства интеграла по истинной температуре и по линейному распределению

$$\int_{s'}^{s''} T(s'') ds'' = \frac{T(s) + T(s')}{2} (s - s').$$

Предлагается заранее (до решения задачи) вычислять с использованием модельных распределений температуры функцию

$$\Delta J(s', s) = J_b(s') \kappa_P(s') \exp[-\tau(s - s')],$$

которая является (по определению) интегральной по частоте парциальной интенсивностью излучения, то есть интенсивностью излучения, которое испускалось в точке s' и ослабилось на пути $s - s'$.

Если функции $\Delta J(s', s)$ известны на заданной сетке вдоль луча, то интенсивность излучения в точке s найдется по формуле

$$J(s) = \int_0^s \Delta J(s', s) ds' \approx \sum_{i=1}^{N_i-1} \Delta J(s_i, s) \Delta s_i, \quad (13.111)$$

где $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$ – шаг расчетной сетки вдоль луча.

Очевидно, что если значения функционалов $\Delta J(s_i, s)$ выбирать из заранее рассчитанной базы данных, то алгоритм расчета, основанный на формуле (13.111) является очень экономным.

В целом алгоритм метода парциальных характеристик формулируется следующим образом (для примера при постоянном давлении).

1. Исходя из предварительного анализа решаемой задачи, формулируется набор модельных профилей температуры, которые будут использоваться для предварительного расчета парциальных интенсивностей. Рекомендуется использовать в качестве модельных профилей непрерывные кусочно-гладкие функции (сплайны).

2. Для данного газа проводятся расчеты спектральных коэффициентов поглощения в требуемом диапазоне температур.

3. Для выбранных модельных профилей рассчитываются интегральные по спектру характеристики: средние оптические плотности пути поглощения, интегральные по частоте парциальные интенсивности излучения. Рассчитанные парциальные характеристики являются функционалами модельных температурных профилей (сплайнов). Например, парциальная интегральная интенсивность есть функционал следующего вида

$$\Delta J(s', s) = \int_0^{\infty} J_{b, \omega} [T(s')] \kappa_{\omega} [T(s')] \exp \left[- \int_0^L \kappa_{\omega} [T(s'')] ds'' \right],$$

$$L = s - s'.$$

4. С помощью заранее рассчитанных парциальных характеристик производится расчет интенсивности излучения по формуле (13.111).

В работе (Головнев И.Ф. и др., 1984) представлены обширные таблицы парциальных характеристик, предназначенные для расчета полей интенсивностей, потоков и их дивергенций в системах произвольной геометрии с характерными размерами до 1 м, содержащих газы: водород, аргон, воздух с произвольным распределением температур от 300 до 20000 К и давлений от 0.3 до 30 атм. Там же представлены подробные инструкции для пользования этими таблицами.

3.7. Метод нелокальных интегральных характеристик для больших градиентов температуры и химического состава

Метод предложен и подробно изложен в работах (Гудзовский А.В. и др., 1981; Карасев А.Б. и др., 1979). Метод ориентирован на расчет теплообмена излучением в неоднородных слоях низкотемпературной плазмы с разделением интенсивности на две части, отвечающие излучению, распространяющемуся в положительном направлении оси x (рис. 13.3) и в отрицательном направлении

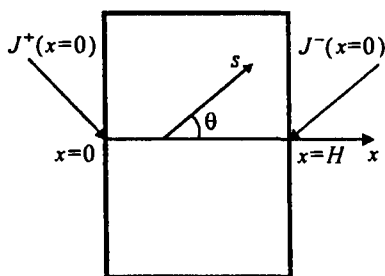


Рис. 13.3. К формулировке метода нелокальных интегральных характеристик

$$\mu \frac{dJ_v^+(x, \mu)}{dx} + \kappa_v(x) J_v^+(x, \mu) = \kappa_v(x) J_{b,v}(x), \quad \mu \geq 0, \quad (13.112)$$

$$\mu \frac{dJ_v^-(x, \mu)}{dx} + \kappa_v(x) J_v^-(x, \mu) = \kappa_v(x) J_{b,v}(x), \quad \mu \leq 0. \quad (13.113)$$

К уравнениям (13.112) и (13.113) формулируются граничные условия для поверхностей, диффузно отражающих падающее излучение.

С целью численного решения уравнений (13.112) и (13.113) исследуемый плоский слой неоднородной плазмы разбивается на N элементарных подслоев толщиной ($h_i = 1, 2, \dots, N$), в пределах которых свойства плазмы полагаются однородными (температура T_i и концентрации компонент $c_{k,i}$ ($k = 1, 2, \dots, N_k$) не изменяются по толщине слоя).

Искомая интенсивность в каждой расчетной точке области представляется в виде разложения в ряд в окрестности некоторых базовых (опорных) температур и концентраций

$$\begin{aligned}
 J_{\nu,j}^{\pm}(\theta) = & J_{\lambda}^{\pm}(\theta, T_j^0, c_{k,j}^0) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial J_{\nu,j}^{\pm}(\theta)}{\partial T_i} \right) \delta T_i + \\
 & + \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial J_{\nu,j}^{\pm}(\theta)}{\partial c_{k,i}} \right) \delta c_{k,i} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \left[\frac{\partial^2 J_{\nu,j}^{\pm}(\theta)}{\partial T_p \partial T_q} \right]^0 \delta T_p \delta T_q + \\
 & + \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \left[\frac{\partial^2 J_{\nu,j}^{\pm}(\theta)}{\partial T_p \partial c_{k,q}} \right]^0 \delta T_p \delta c_{k,q} + \dots \quad (13.114)
 \end{aligned}$$

где $\delta T_i = T_i - T_i^0$, $\delta c_{k,i} = c_{k,i} - c_{k,i}^0$.

Плотность одностороннего интегрального потока излучения определяется с использованием разложения (13.114)

$$\begin{aligned}
 W^{\pm}(x_j) = & \int_0^{\infty} dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta} J_{\nu,j}^{\pm}(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \\
 = & \pi \int_0^{\infty} dv \int_{\theta} J_{\nu,j}^{\pm}(\theta) \sin 2\theta d\theta \approx q_j^{\pm,0} + \sum_{i=1}^N A_{ij}^{\pm,0} \delta T_i + \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{i=1}^N B_{k,ij}^{\pm,0} \delta c_{k,i} + \\
 \approx & \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N C_{pq,j}^{\pm,0} \delta T_p \delta T_q + \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N D_{k,pq,j}^{\pm,0} \delta T_p \delta c_{k,q} + \dots \quad (13.115)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } q_j^{\pm,0} = \pi \int_0^\infty dv \int_0^\theta J_{v,j}^\pm(\theta, T_j^0, c_{k,j}^0) \sin 2\theta d\theta; \quad (13.116)$$

$$A_{ij}^{\pm,0} = \pi \int_0^\infty dv \int_0^\theta \left[\frac{\partial J_{v,j}^\pm(\theta)}{\partial T_i} \right]^0 \sin 2\theta d\theta; \quad (13.117)$$

$$B_{k,y}^{\pm,0} = \pi \int_0^\infty dv \int_0^\theta \left[\frac{\partial J_{v,j}^\pm(\theta)}{\partial c_{k,i}} \right]^0 \sin 2\theta d\theta; \quad (13.118)$$

$$C_{pq,j}^{\pm,0} = \pi \int_0^\infty dv \int_0^\theta \left[\frac{\partial^2 J_{v,j}^\pm(\theta)}{\partial T_p \partial T_q} \right]^0 \sin 2\theta d\theta; \quad (13.119)$$

$$D_{k,pq,j}^{\pm,0} = \pi \int_0^\infty dv \int_0^\theta \left[\frac{\partial^2 J_{v,j}^\pm(\theta)}{\partial T_p \partial c_{k,q}} \right]^0 \sin 2\theta d\theta. \quad (13.120)$$

Очевидно, что коэффициенты (13.116)–(13.120) могут быть рассчитаны заранее для фиксированного набора значений T_j^0 и $c_{k,j}^0$. После чего задача о распределении интегральных радиационных потоков в неоднородном плоском слое сводится к вычислениям по формуле (13.115).

Спектральная интенсивность излучения, определяемая для опорных профилей температуры и концентраций, находится посредством рекуррентного соотношения

$$J_{v,j+1}^+(\theta) = J_{v,j}^+(\theta) \exp(-\Delta\tau_{v,j+1}) + J_{b,v,j} \left[1 - \exp(-\Delta\tau_{v,j+1}) \right], \quad (13.121)$$

где в качестве $J_{v,1}^+(\theta)$ выбирается граничное значение

$$\Delta\tau_{v,j+1} = \frac{\kappa_{v,j+1}(x_{j+1} - x_j)}{\cos \theta}.$$

С использованием (13.121) находятся производные по температуре и концентрациям, входящие в (13.117)–(13.120). Например, для производных по температуре

$$\frac{\partial J_{v,j+1}}{\partial T_i} = \frac{\partial J_{v,j}}{\partial T_i} \exp(-\Delta\tau_{v,j+1}), \quad i \neq j+1, \quad (13.122)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{v,j+1}}{\partial T_i} = & \frac{\partial J_{v,j}}{\partial T_{j+1}} \exp(-\Delta\tau_{v,j+1}) + \frac{\partial J_{b,v,j+1}}{\partial T_{j+1}} [1 - \exp(-\Delta\tau_{v,j+1})] + \\ & + (J_{b,v,j+1} - J_{v,j+1}) \frac{\partial \Delta\tau_{v,j+1}}{\partial T_{j+1}}, \quad i = j+1, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (13.123) \end{aligned}$$

Формулы (13.122) и (13.123) являются рекуррентными, поскольку производные от интенсивности по температуре $\partial T_{v,j}/\partial T_i$ известны из расчетов предыдущей ячейки.

Изложенный метод является весьма экономичным по времени расчета и позволяет получить хорошую точность (в первом приближении разложения в ряды) при условии задания опорных профилей достаточно близких к исследуемым. Очевидным недостатком метода является быстрый рост объемов предварительно рассчитываемой информации при усложнении компонентного состава смеси и, особенно, при попытке учесть более высокие члены в разложении.

13.8. Метод эффективных сечений

Метод разработан в работе (Овсянников В.М. и др., 1971). Подробно изложен и исследован в работе (Овсянников В.М., 1983).

Формулировка метода дана для излучающего объема произвольной геометрии (рис. 13.4). Вектор плотности интегрального радиационного потока и его дивергенция записываются в виде (без учета внешних источников излучения)

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{r}) = & \int_{4\pi} \cos \theta d\Omega \int_0^{\infty} dv \times \\ & \times \int_{\mathbf{r}}^{r_1(\Omega)} J_{b,v} [T(\mathbf{r}')] N(\mathbf{r}') \sigma_v(\mathbf{r}') \exp[-\Delta\tau_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] d\mathbf{r}', \quad (13.124) \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \int_0^{\nu} \kappa_{\nu}(\mathbf{r}) d\nu \cdot \int_{4\pi} d\Omega \times \\ \times \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_1(\Omega)} J_{b,\nu} [T(\mathbf{r}')] N(\mathbf{r}') \sigma_{\nu}(\mathbf{r}') \exp[-\Delta\tau_{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] d\mathbf{r}', \quad (13.125)$$

$$\text{где} \quad \Delta\tau_{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} N(\mathbf{r}'') \sigma_{\nu}(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}'', \quad (13.126)$$

$N(\mathbf{r})$ – число поглощающих частиц в единице объема в окрестности точки пространства с радиус-вектором \mathbf{r} ; \mathbf{r}_1 – радиус-вектор произвольной граничной точки; \mathbf{n}_F – нормаль к единичной площадке F .

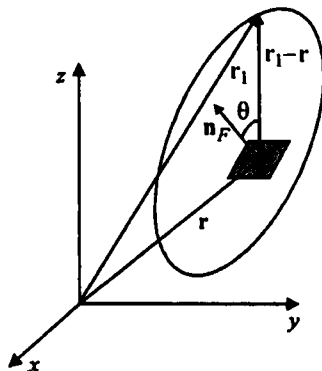


Рис. 13.4. К формулировке метода эффективных сечений

В методе эффективных сечений вводятся три функции, называемые *эффективными сечениями* s , σ и ε , которые определяются следующим образом:

$$s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^{\infty} \frac{J_{b,\nu} [T(\mathbf{r}')] }{J_b [T(\mathbf{r}')] } \sigma_{\nu}(\mathbf{r}') \sigma_{\nu}(\mathbf{r}) \times \\ \times \exp \left[- \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} N(\mathbf{r}'') \sigma_{\nu}(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' \right] d\nu, \quad (13.127)$$

$$\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^{\infty} \frac{J_{b,v}[T(\mathbf{r}')] }{J_b[T(\mathbf{r}')] } \sigma_v(\mathbf{r}') \times \\ \times \exp \left[- \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} N(\mathbf{r}'') \sigma_v(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' \right] dv, \quad (13.128)$$

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^{\infty} \frac{J_{b,v}[T(\mathbf{r}')] }{J_b[T(\mathbf{r}')] } \times \\ \times \left\{ 1 - \exp \left[- \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} N(\mathbf{r}'') \sigma_v(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' \right] \right\} dv, \quad (13.129)$$

где

$$J_b[T(\mathbf{r}')] = \int_0^{\infty} J_{b,v}[T(\mathbf{r}')] dv. \quad (13.130)$$

Тогда вектор потока излучения и его дивергенция выражаются через эффективные сечения следующим образом:

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \cos \theta d\Omega \int_{\mathbf{r}}^{\eta_1(\Omega)} J_b[T(\mathbf{r}')] N(\mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (13.131)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{W}(\mathbf{r}) = N(\mathbf{r}) \int_{4\pi} d\Omega \int_{\mathbf{r}}^{\eta_1(\Omega)} J_b[T(\mathbf{r}')] s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \\ - 4\pi J_b[T(\mathbf{r})] \sigma_P(\mathbf{r}) N(\mathbf{r}), \quad (13.132)$$

где

$$\sigma_P(\mathbf{r}) = \int_0^{\infty} \sigma_v(\mathbf{r}) J_b[T(\mathbf{r})] dv. \quad (13.133)$$

Из соотношений (13.131) и (13.132) следует, что вся информация о спектральных свойствах среды содержится в функционалах $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $s(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, между которыми имеется следующая связь:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{d\mathbf{r}} &= -N(\mathbf{r}) s(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \\ N(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{d\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{d\mathbf{r}'}, \\ \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') N(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}'', \\ \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sigma_p(\mathbf{r}') - \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} s(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') N(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}''. \end{aligned} \quad (13.134)$$

При этом очевидно, что вся тяжесть проблем интегрирования по частоте приходится на задачу расчета и формирования таблиц указанных функционалов. В частном случае разделения переменных вида

$$\sigma_v(T) = \sum_{k=1}^{N_k} \psi_k(T) \varphi_k(v) \quad (13.135)$$

эта задача упрощается.

Если ввести функцию вида

$$n_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} N(\mathbf{r}'') \psi_k[T(\mathbf{r}'')] d\mathbf{r}'', \quad (13.136)$$

$$\tau_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} N(\mathbf{r}'') \sigma_v[T(\mathbf{r}'')] d\mathbf{r}'' = \sum_{k=1}^{N_k} \varphi_k(v) n_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (13.137)$$

то выражение для вектора плотности лучистого потока и его дивергенции примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{r}) &= \int_{4\pi} \cos \theta d\Omega \sum_{k=1}^{N_k} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_1(\Omega)} J_b[T(\mathbf{r}')] \times \\ &\times \sigma_k[T(\mathbf{r}'), n_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \dots, n_{N_k}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dn_k(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (13.138)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{N_k} N(\mathbf{r}) \psi_k [T(\mathbf{r})] \left\{ \int_{4\pi} d\Omega \sum_{i=1}^{N_k} \int_{\mathbf{r}}^{r_1(\Omega)} J_b [T(\mathbf{r}')] \times \right. \\ \left. \times \varphi_{ki} [T(\mathbf{r}'), n_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \dots, n_{N_k}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dn_i(\mathbf{r}') - \right. \\ \left. - 4\pi J_b [T(\mathbf{r})] \sigma_k [T(\mathbf{r}), 0, 0, \dots, 0] \right\}, \quad (13.139)$$

где $dn_k(\mathbf{r}') = N(\mathbf{r}') \psi_k [T(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}'$;

$$s_{ki} [T, n_1, \dots, n_{N_k}] = \int_0^\infty \frac{J_{b,v}(T)}{J_b(T)} \varphi_k(v) \varphi_i(v) \exp \left[- \sum_{j=1}^{N_k} \varphi_j(v) n_j \right] dv;$$

$$\sigma_k (T, n_1, \dots, n_{N_k}) = \int_0^\infty \frac{J_{b,v}(T)}{J_b(T)} \varphi_k(v) \exp \left[- \sum_{j=1}^{N_k} \varphi_j(v) n_j \right] dv;$$

$$\varepsilon (T, n_1, \dots, n_{N_k}) = \int_0^\infty \frac{J_{b,v}(T)}{J_b(T)} \left\{ 1 - \exp \left[- \sum_{j=1}^{N_k} \varphi_j(v) n_j \right] \right\} dv.$$

Порядком приближения метода эффективных сечений называется число N_k . При $N_k = 1$ получается метод Томсона – Пеннера (Пеннер С.С., 1963).

В работе (Овсянников В.М., 1983) приведены алгоритмы использования метода эффективных сечений, а также его дальнейшее развитие, получившее название *методов групповой ортогональности*.

13.9. Метод эффективных полумоментных характеристик

В п. 13.4 отмечено, что главным недостатком метода усреднения уравнения переноса излучения, который показал свою высокую эффективность при решении задач радиационной газовой динамики, является разрывной характер вводимых эффективных коэффициентов переноса. При сохранении эффективности расчетного алгоритма этот недостаток удастся устранить в потоковых методах.

Введение эффективных интегральных коэффициентов в методе полумоментов первого порядка, применительно к расчету переноса излучения в плоском слое выполнено в работе (Горский В.В. и др., 1982). Расчет спектральной интенсивности $J_\omega(x, \mu)$ в этом случае сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно полумоментных характеристик (см. п. 9.2):

$$\begin{aligned} \frac{dM_{0,\omega}^+}{dx} &= 6\kappa_\omega \left(-M_{0,\omega}^+ + M_{1,\omega}^+ + \pi J_{b,\omega} \right), \\ \frac{dM_{1,\omega}^+}{dx} &= \kappa_\omega \left(-M_{0,\omega}^+ + 2\pi J_{b,\omega} \right), \\ \frac{dM_{0,\omega}^-}{dx} &= 6\kappa_\omega \left(M_{0,\omega}^- - M_{1,\omega}^- - \pi J_{b,\omega} \right), \\ \frac{dM_{1,\omega}^-}{dx} &= \kappa_\omega \left(M_{0,\omega}^- - 2\pi J_{b,\omega} \right), \end{aligned} \quad (13.140)$$

где x — координата, отсчитываемая от нижнего основания по нормали вглубь слоя.

Интегрируя (13.140) по волновому числу и определяя интегральные полумоментные характеристики по формуле

$$M_n^\pm = \int_0^\infty M_{n,\omega}^\pm d\omega, \quad n = 0, 1,$$

приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dM_0^+}{dx} &= 6 \left(-\kappa_0^+ M_0^+ + \kappa_1^+ M_{1,\omega}^+ + \kappa_P \bar{\sigma} T^4 \right), \\ \frac{dM_1^+}{dx} &= -M_0^+ \kappa_0^+ + 2\kappa_P \bar{\sigma} T^4, \\ \frac{dM_0^-}{dx} &= 6 \left(\kappa_0^- M_0^- - \kappa_1^- M_{1,\omega}^- - \kappa_P \bar{\sigma} T^4 \right), \end{aligned}$$

$$\frac{dM_1^-}{dx} = M_0^- \kappa_0^- - 2\kappa_p \bar{\sigma} T^4, \quad (13.141)$$

где $\kappa_n^\pm = \int_0^\infty \kappa_\omega M_{n,\omega}^\pm d\omega / M_n^\pm$ – эффективные среднеинтегральные коэффициенты; κ_p – среднепланковский коэффициент.

Процедура решения задачи в первом и втором случаях одинаковая:

а) ищется решение спектральной задачи (13.140) в многогрупповом приближении, то есть уравнение переноса интегрируется по пространству на N_k спектральных участках;

б) определяется зависимость интегральных коэффициентов κ_n^\pm и κ_p от пространственной переменной x ;

в) уравнения (13.141) решаются на протяжении ряда итераций.

При необходимости процедура повторяется с пункта а). Очевидно, что экономичность такого метода возрастает при подробном учете спектральной зависимости свойств среды.

13.10. Метод эффективных квадроментных характеристик

Метод разработан применительно к проблеме расчета радиационного теплообмена в двумерных осесимметричных объемах с локальным энерговыделением на оси симметрии (Суржиков С.Т., 1987; Surzhikov S.T., 1996).

В нулевом приближении метода квадроментов (см. п. 9.4) относительно спектральных функций c_ω^\pm формулируется следующая система уравнений

$$\frac{m}{r} \frac{\partial r c_\omega^\pm}{\partial r} + n \frac{\partial c_\omega^\pm}{\partial z} - \frac{m}{r} c_\omega^\pm + 2\kappa_\omega c_\omega^\pm = 2\kappa_\omega J_{b\omega}. \quad (13.142)$$

В групповом приближении (с числом групп N_k) индекс ω следует заменить на целочисленный индекс $k = 1, 2, \dots, N_k$, который означает номер спектральной энергетической группы. Вместо

четырёх уравнений вида (13.142) при этом образуется $4N_k$ подобных уравнений.

Проинтегрируем (13.142) по всей спектральной области

$$\frac{m}{r} \frac{\partial c^\pm}{\partial r} - \frac{m}{r} c^\pm + n \frac{\partial c^\pm}{\partial z} + 2 \int \kappa_\omega c_\omega^\pm d\omega = 2 \int \kappa_\omega J_{b\omega} d\omega, \quad (13.143)$$

где $c^\pm = \int c_\omega^\pm d\omega = \sum_{k=1}^N c_k^\pm \Delta\omega_k$, и введем эффективные интегральные коэффициенты поглощения

$$\kappa^\pm = \frac{1}{c^\pm} \int \kappa_\omega c_\omega^\pm d\omega \cong \frac{1}{c^\pm} \sum_{k=1}^{N_k} \kappa_k c_k^\pm d\omega_k. \quad (13.144)$$

Тогда уравнение (13.143) примет вид

$$\frac{m}{r} \frac{\partial c^\pm}{\partial r} - \frac{m}{r} c^\pm + n \frac{\partial c^\pm}{\partial z} + 2\kappa^\pm \cdot c^\pm = \frac{2}{\pi} \kappa_p \sigma T^4, \quad (13.145)$$

где κ_p – среднепланковский коэффициент. Граничные условия для уравнения (13.145) получаются интегрированием соответствующих спектральных условий по волновому числу. Преимущество метода квадроментов состоит в том, что в отличие от методов осреднения по полному телесному углу, где введенный по формуле (13.144) среднеинтегральный коэффициент поглощения может иметь разрывы 2-го рода, в данном случае – это гладкая знакопостоянная функция, не имеющая никаких особенностей. В остальном алгоритм интегрирования спектральных и интегральных уравнений остается прежним.

ГЛАВА 14

МОДЕЛИ ПОЛОС. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Значительная часть задач теории переноса теплового излучения связана с учетом линейчатой структуры спектра излучения и поглощения атомов и молекул. При решении этих задач широкое распространение получили статистические модели атомных и молекулярных линий.

Статистические модели могут быть характеризованы двумя свойствами, одно из которых составляет несомненное их достоинство, а второе – недостаток. Главным достоинством статистических моделей является возможность аналитического интегрирования уравнения переноса по частоте электромагнитного излучения. Это практически означает возможность отказа от использования многогрупповых и *line-by-line* моделей, что приводит в численных расчетах к экономии компьютерного времени в десятки и сотни тысяч раз. Недостатком статистических моделей является отсутствие их асимптотической сходимости, т.е. в общем случае промежуточных оптических толщин данные модели всегда дают погрешность расчетов порядка 30%. В пределе оптически тонких слоев статистические модели обеспечивают точность расчетов не хуже нескольких процентов.

Несмотря на указанный недостаток развитие статистических моделей составляет одно из перспективных направлений современной теории переноса теплового излучения, поскольку, с одной стороны, эти модели являются реальной альтернативой чрезмерно трудоемких *line-by-line* расчетов, а, с другой стороны, их точность соизмерима с требованиями, предъявляемыми к методам расчета переноса теплового излучения в задачах астрофизики, атмосфер-

ной оптики, радиационной газовой динамики и различных инженерных приложениях теории теплообмена.

14.1. Общие понятия

Среди первых попыток решения задачи о переносе излучения в совокупности спектральных линий без *line-by-line* интегрирования излучения по спектру электромагнитного излучения отметим метод, состоящий в представлении реального спектра в виде регулярного или хаотичного набора неперекрывающихся линий. Этот подход имеет простое физическое обоснование. Несложно представить условия, при которых расстояния между спектральными линиями существенно превосходят их полуширины, а оптическая толщина излучающего объема мала даже в центрах спектральных линий. Модель неперекрывающихся спектральных линий оказалась достаточно удобной и получила широкое распространение. Поглощение в совокупности неперекрывающихся линий пропорционально сумме поглощательных способностей в отдельных линиях, так как каждая линия может рассматриваться как изолированная. Анализ подобных простейших моделей дан в работе (Гуди Р., 1966).

Аналитическое представление интегральной поглощательной способности изолированной линии (или так называемой *эквивалентной ширины*) с ударным профилем впервые было получено Р. Ладенбергом и Ф. Райхе (Ladenberg R., et al., 1913)

$$\begin{aligned} W_L(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} A_{\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \exp(-\kappa_{\omega}^L x) \right] d\omega = 2\pi\gamma^L L(u) = \\ &= 2\pi\gamma^L u \exp(-u) \left[I_0(u) + I_1(u) \right], \quad u = Sx/2\pi\gamma^L, \quad (14.1) \end{aligned}$$

где x – отрезок оптически однородного луча; γ^L – лоренцевская полуширина; S – интегральный коэффициент поглощения в линии (сила линии). Заметим, что *спектральная поглощательная способность* $A_{\omega} = 1 - \exp(-\kappa_{\omega} x)$ является безразмерной величиной и обозначает долю излучения с фиксированным волновым числом,

поглощенным на длине x . Данное определение спектральной поглощательной способности справедливо для произвольного κ_ω . Важно также учесть, что при рассмотрении реального спектра поглощения в газах и плазме, когда атомные и молекулярные линии наблюдаются на фоне непрерывного поглощения, бесконечные пределы интегрирования в (14.1) можно приближенно заменить конечными пределами

$$W_L(x) \approx \int_{\Delta\omega} A_\omega d\omega,$$

где к спектральному диапазону $\Delta\omega$ предъявляется требование $\Delta\omega \gg \gamma^L$.

Напомним, что ударное уширение линии описывается дисперсионной (лоренцевской) функцией

$$\kappa_\omega^L = \frac{S\gamma^L}{\pi \left[(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma^L)^2 \right]},$$

где ω_0 – волновое число центра линии.

Функция $L(u)$, выражающаяся через функции Бесселя много аргумента $I_0(u)$ и $I(u)$, называется функцией Ладенберга–Райхе, по имени авторов, получивших это решение. Асимптотические соотношения для функции $L(u)$ при $u \ll 1$ и $u \gg 1$ имеют простой вид

$$\begin{aligned} W_L(x) &= 2\pi\gamma^L u(x), & u(x) &\ll 1, \\ W_L(x) &= 2\pi\gamma^L \sqrt{u(x)/\pi}, & u(x) &\gg 1, \end{aligned} \quad (14.2)$$

которые называют соответственно *линейным законом* и *законом квадратного корня*. Поскольку величина $u(x)$ пропорциональна оптической толщине в центре линии, то соотношения (14.2) приобретают ясный физический смысл. При малых оптических толщинах поглощение в линии практически не зависит от ее формы и прямо пропорционально физическому пути пробега излучения. Когда $u(x) \gg 1$, то в центральной части линии происходит полное поглощение излучения, а зависимость интегральной поглоща-

тельной способности от x определяется крыльями линий. Исходя из этого, в работе (Гуди Р., 1966) отмечается, что линейный закон и закон квадратного корня предпочтительнее трактовать как приближение *слабой* и *сильной* линий соответственно. Особо подчеркнем большое значение для теории переноса излучения выводов, следующих из асимптотических соотношений (14.2):

поглощательная способность слоя газа на отрезке луча x в спектральном диапазоне, содержащем атомную или молекулярную линию, в общем случае не является линейной функцией x . Это означает, что интегральная на $\Delta\omega$ поглощательная способность суммы двух отрезков ($\Delta x_1 + \Delta x_2$) не равна сумме поглощательных способностей каждого отрезка.

В работе (Тьен К.Л., 1975) приводятся различные аппроксимации функции $W_L(x)$, среди которых наиболее удобна при расчетах следующая:

$$W_L(x) = 2\pi\gamma^L \sqrt{1 + \pi u/2}. \quad (14.3)$$

В случае, когда уширение линии определяется эффектом Доплера, ее контур описывается формулой

$$\kappa_{\omega}^D = \left(S/\gamma^D\right) \sqrt{\ln 2/\pi} \exp\left[-\ln 2(\omega - \omega_0)^2 / (\gamma^D)^2\right], \quad (14.4)$$

где γ^D – доплеровская полуширина.

Если $u(x) = \frac{Sx}{\gamma^D} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}$ – оптическая толщина в центре доплеровской линии, то интеграл

$$W_D(x) = \frac{\gamma^D}{\sqrt{\ln 2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{1 - \exp\left[-u \exp(-z^2)\right]\right\} dz \quad (14.5)$$

можно представить в виде следующего разложения в ряд (Тьен К.Л., 1975):

$$W_D(x) = \alpha x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-u)^n}{(n+1)!(n+1/2)!}.$$

Аппроксимация эквивалентной ширины линий доплеровского контура выполнена в работах (Huffaker R.M., 1968; Kavanagh R.W., et al., 1953):

$$W_D(x) = \frac{\gamma^D}{\sqrt{\pi/\ln 2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp[-u(x)]}{0.7 + 0.3 \exp[-u(x)]} dx, \quad (14.6)$$

$$W_D(x) = \frac{1.7\gamma^D}{2\sqrt{\pi} \ln 2} \sqrt{\ln \left[1 + \frac{\alpha x 2\sqrt{\pi} \ln 2}{1.7\gamma^D} \right]^2}.$$

В ограниченной области определения $0.1 \leq u \leq 30$ можно использовать простую формулу (Пеннер С.С., 1963)

$$W_D(x) = Sx \exp\left(-\sqrt{u(x)}/2\right).$$

Наиболее сложным случаем для исследования является случай лоренц-доплеровского контура линий. Такой контур описывается функцией Фойгта. Обзор работ по исследованию свойств функции Фойгта содержится в монографии (Пеннер С.С., 1963). Позднее появились достаточно удобные аппроксимации фойгтовского контура и средней эквивалентной ширины такой линии. В работе (Huffaker R.M., 1968) используется аппроксимация для эквивалентной ширины фойгтовского контура следующего вида:

$$\bar{W}_V = \frac{W}{\Delta\omega} = \tau \sqrt{1 - Y^{-1/2}}, \quad \tau = \frac{Sx}{\Delta\omega},$$

$$Y = \left[1 - (\bar{W}_L/\tau)^2 \right]^{-2} + \left[1 - (\bar{W}_D/\tau)^2 \right]^{-2} - 1, \quad (14.7)$$

$$\bar{W}_L = W_L/\Delta\omega, \quad \bar{W}_D = W_D/\Delta\omega,$$

где $\Delta\omega$ — величина спектрального диапазона, см^{-1} .

В работе (Матвеев В.С., 1972) получена удобная аппроксимация функции Фойгта и соответствующей эквивалентной ширины. Зависимость для коэффициента поглощения в линии фойгтовского контура $\kappa_V = \kappa(\eta, \xi)$ приведена в п. 12.4. Эквивалентная ширина линии представляется в виде

$$\bar{W}_V = \gamma^V \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \exp[-\kappa(\eta, \xi)x] \right\} d\eta, \quad (14.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_V &= W_V / 2\gamma^V = \\ &= \tilde{W}_L(b_L) + 0.5\tilde{W}_D(b_D) \left[\exp(-b_L) - \exp\left(-\frac{b_L}{1 + \tilde{W}_D(b_D)}\right) \right], \end{aligned}$$

$$b_D = \tilde{\alpha} \sqrt{\pi \ln 2}, \quad b_L = \tilde{\alpha} \cdot \xi, \quad \tilde{\alpha} = Sx / \pi\gamma^V,$$

$$\tilde{W}_L(\tau) = \frac{\pi\tau}{2} \sqrt{1 + \frac{\pi\tau f_L}{2}},$$

$$\tilde{W}_D(\tau) = \sqrt{\frac{\ln(1 + \sqrt{\pi\tau f_D})}{f_D \ln 2 (1 + 4/\sqrt{\pi\tau})}},$$

$$f_L = \frac{0.6 + 0.4\tau_L}{1 + 0.4\tau_L}, \quad f_D = \frac{0.2 + 0.4\tau_D}{1 + 0.3\tau_D},$$

τ_L, τ_D – оптические толщины в центре лоренцевской и доплеровской линий; γ^V – полуширина линий фойгтовского контура (см. п.12.4.1). Наиболее простая аппроксимация средней эквивалентной ширины линии фойгтовского контура, обеспечивающая точность порядка 8%, представлена в работе (Rodgers C.D., et al., 1974)

$$\bar{W}_V \approx \sqrt{\bar{W}_L^2 + \bar{W}_D^2 - \left(\bar{W}_L \bar{W}_D / \tau^2\right)^2}. \quad (14.9)$$

В работе (Гуди Р., 1966) упоминается ряд модификаций модели неперекрывающихся линий, предназначенных для учета частичного наложения их друг на друга. Однако эти методы оказались слишком трудоемкими и не получили распространения.

Значительным прогрессом в теории переноса излучения в реальном линейчатом спектре явилась разработка принципов его

моделирования эквивалентными по некоторым критериям совокупностями спектральных линий. Два основных подхода представляют, вообще говоря, два крайних случая: 1) замена реального спектра линий некоторой эффективной регулярной моделью; 2) представление спектра в виде случайной совокупности линий. Многолетний опыт использования и развития этих моделей показал, с одной стороны, на их высокую эффективность, а с другой стороны, на значительную гибкость этого подхода, т.е. возможность создания на базе регулярной и статистической моделей большого разнообразия их комбинаций, которые хорошо приспособляются к реальному линейчатому спектру.

14.2. Статистический подход к расчету переноса теплового излучения в спектральных линиях

В работе (Гуди Р., 1966) отмечается, что сложно установить авторский приоритет создания этих моделей, но с исчерпывающей полнотой они описаны в работах (Гуди Р., 1966; Пеннер С.С., 1963; Plass G., 1958, 1960, 1967). Отметим здесь также работу (Смирнов Б.М. и др., 1976), в которой статистическая модель сформулирована посредством введения характеристической функции для плотности вероятности оптической толщины, а также работы (Пеннер С.С., 1963; Сошников В.М., 1961), в которых затронуты важные вопросы методики расчета. В работе (Пластилин Ю.А. и др., 1981; Суржиков С.Т., 1992) дано обобщение статистических моделей на случай вероятностного описания не только распределения интенсивностей спектральных линий, но и их полуширин, что приобретает особое значение для описания переноса излучения в спектре атомных линий. Этой работе будем следовать при изложении статистической модели.

Пусть в спектральный диапазон $\Delta\omega$ попадает N линий с различными интенсивностями и полуширинами. Введем функции плотности вероятностей распределения интенсивностей $p(S, \bar{S})$ и полуширин $p(\gamma, \bar{\gamma})$ линий, а также допустим равномерное распределение линий в $\Delta\omega$. Математическое ожидание пропуска-

ния газа $T_{\omega}(x)$ вдоль некоторого выбранного направления x можно записать в следующем виде

$$M[T_{\omega}(x)] = \int \dots \int_{\omega} \int \dots \int_{\gamma} \int \dots \int_S T_{\omega}(x) \prod_i^N p(S_i, \bar{S}) dS_i \times \\ \times \prod_i^N p(\gamma_i, \bar{\gamma}) d\gamma_i \prod_i^N d\omega_i / \Delta\omega^N, \quad (14.10)$$

$$T_{\omega}(x) = \exp(-\kappa_{\omega}x) = 1 - A_{\omega}(x),$$

где $\bar{S}, \bar{\gamma}$ – математические ожидания интенсивности и полуширины линий в исследуемой полосе; κ_{ω} – суммарный спектральный коэффициент поглощения газа, при вычислении которого учитываются все линии, присутствующие в $\Delta\omega$.

Если выбрать интервал $\Delta\omega$ достаточно большим по сравнению с размерами линий, присутствующих в нем, а также учесть, что все функции $p(\gamma_i, \bar{\gamma})$ и $p(S_i, \bar{S})$ взаимно независимы, то выражение (14.10) можно преобразовать к виду

$$M[T_{\omega}(x)] = \\ = \exp \left\{ -\frac{N}{\Delta\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{\gamma} d\gamma \int_S [1 - T_{\omega}(x)] p(S, \bar{S}) p(\gamma, \bar{\gamma}) dS \right\}. \quad (14.11)$$

Переход от многократного интеграла от произведения функций к произведению интегралов от соответствующих функций (см. более подробный вывод ниже, в п. 14.9) получил название *статистический принцип Гуди*. Фактически указанный принцип является гипотезой, в соответствии с которой среднее пропускание группы линий равно произведению средних пропусканий каждой линии в данной группе.

В заданном интервале $\Delta\omega$ могут быть линии с сильно различающимися значениями интенсивностей и полуширин линий. Разобьем N линий на K групп, чтобы в каждой отдельно взятой группе присутствовало N_n линий с близкими параметрами. Тогда формула (14.11) приобретает еще более простой вид

$$M[T_{\omega}(x)] = \prod_{n=1}^K \cdot \exp \left\{ -\frac{N}{\Delta\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{\gamma} p(\gamma, \bar{\gamma}) d\gamma \times \right. \\ \left. \times \int_S [1 - T_{\omega}(x)] p(S, \bar{S}) dS \right\} = \prod_{n=1}^K \cdot \exp(-D_n). \quad (14.12)$$

Полученная формула является наиболее общим выражением статистической модели, в которой, в отличие от известных ранее соотношений, учитывается плотность вероятности распределения полуширин $p(\gamma_i, \bar{\gamma})$. Существенно также введение групп линий, объединяемых по определенным признакам.

При задании функций $p(S_i, \bar{S})$, $p(\gamma_i, \bar{\gamma})$ и функции контуров линий можно получить простые аппроксимационные формулы для D_n . Так, в случае молекулярных вращательных линий наиболее часто используется экспоненциальное распределение линий по интенсивностям вида

$$p(S, \bar{S}) = [\exp(-S/\bar{S})]/\bar{S},$$

что позволяет получить для интегральной поглотительной способности формулу (при $K=1$)

$$A = \int_0^{\infty} \{1 - M[T_{\omega}(x)]\} d\omega = \frac{\bar{S}x}{\sqrt{1 + \bar{S}x/4\gamma}}. \quad (14.13)$$

Условия $K=1$ и $p(\gamma, \bar{\gamma}_1) = \delta(\gamma - \bar{\gamma}_1)$ соответствуют *простой статистической модели Гуди* (Гуди Р., 1966). В этом случае D_1 вычисляется с использованием параметров всех линий. Усло-

вия $K=N$, $p(\gamma, \bar{\gamma}) = p(\gamma, \bar{\gamma}_n)$ и $p(S, \bar{S}) = \sum_{i=1}^N \delta(S - \bar{S})/N$ дают *обобщенную статистическую модель Гуди* (Гуди Р., 1966).

Более общее выражение обобщенной статистической модели получается при введении двумерной плотности распределения вероятностей

$$p(S, \gamma) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(S - S_i) \delta(\gamma - \gamma_i). \quad (14.14)$$

Очевидно, что обобщенная статистическая модель учитывает индивидуальные параметры каждой линии точнее, чем простая статистическая модель, но требует значительно больших затрат компьютерного времени и оперативной памяти.

В случае, когда $1 < K < N$ пропускание D_n вычисляется с использованием параметров тех линий, которые принадлежат n -й группе. В работе (Пластинин Ю.А. и др., 1981) такая модель названа *групповой обобщенной статистической моделью*. Ее также можно трактовать как одну из разновидностей моделей статистического наложения регулярных и случайных моделей (Гуди Р., 1966).

К вопросу о понимании сущности статистического моделирования спектра следует добавить, что применение статистической модели к одной спектральной линии не противоречит исходным посылкам о множественности линий. Каждую линию можно периодически продолжить за пределы рассматриваемого спектрального диапазона, величина которого, таким образом, будет отвечать среднему расстоянию между линиями в их бесконечной последовательности. Если поглощение в крыльях линий оказывается существенным, т.е. учет линий вне диапазона дает заметный вклад в поглощение, то, предполагая профиль линии в далеких крыльях лоренцевым (или степенным), можно получить среднюю «фоновую» добавку, например, в виде (для лоренцевских линий)

$$\begin{aligned} \kappa_f &= \Delta\omega^{-1} \int_{\Delta\omega} \kappa_\omega d\omega = \frac{2}{\pi\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S\gamma}{(\omega - \omega_i)^2 + \gamma^2} d\omega = \\ &= \frac{2S}{\pi\Delta\omega} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \arctg \left[\frac{\Delta\omega}{\gamma} \left(\frac{3}{2} + i \right) \right] + \arctg \left[\frac{\Delta\omega}{\gamma} \left(\frac{1}{2} + i \right) \right] \right\}. \quad (14.15) \end{aligned}$$

Оценку необходимого числа слагаемых в этой формуле несложно сделать в каждом конкретном случае.

14.3. Усреднение параметров спектральных линий в неоднородных объемах сплошной среды. Приближение Кертиса – Годсона

До сих пор предполагалось, что объемы излучающей и поглощающей сплошной среды, в которой распространяется излучение, являются однородными. Это означает, что в любой точке исследуемого объема свойства среды остаются постоянными. Поэтому статистические модели спектральных линий были рассмотрены для независимых от пространственных координат интегральных коэффициентов поглощения (сил линий) и полуширин линий. Значительно больший практический интерес представляют случаи неоднородной среды.

Основная сложность расчета переноса линейчатого излучения вдоль неоднородной трассы состоит в том, что параметры спектральных линий могут сильно изменяться в зависимости от положения рассматриваемой точки внутри неоднородного объема. В условиях непрерывного спектра поглощения это создает значительные трудности, связанные с заменой произведения на интеграл в формуле расчета оптической толщины: в однородном объеме оптическая толщина участка пути $(x_\delta - x_0)$ рассчитывается как произведение $\tau_\omega = \kappa_\omega(x_\delta - x_0)$, а в неоднородном – в виде интеграла

$$\tau_\omega = \int_{x_0}^{x_\delta} \kappa_\omega(x') dx'. \quad (14.16)$$

Как в том, так и в другом случаях оптическая толщина всего слоя является *аддитивной* по отношению к оптическим толщинам своих частей. Следовательно, интеграл (14.16) может быть представлен в виде суммы

$$\tau_\omega = \sum_{i=0}^{\delta-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \kappa_\omega(x') dx'. \quad (14.17)$$

Поскольку в подавляющем числе практически важных случаев спектральный коэффициент поглощения в непрерывном

спектре мало меняется в пределах выделенных спектральных диапазонов (например, на участке, где есть несколько близко расположенных спектральных линий), то свойство аддитивности справедливо и для средней оптической толщины на участке

$$\tau_{\Delta\omega} \cong \sum_{i=0}^{\delta-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \kappa_{\Delta\omega}(x') dx' . \quad (14.18)$$

где

$$\kappa_{\Delta\omega}(x) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \kappa_{\omega}(x) d\omega .$$

Принципиально иная ситуация возникает при анализе переноса излучения вдоль неоднородной трассы в спектральных линиях атомов и молекул. Здесь средняя оптическая толщина на спектральном участке $\Delta\omega$ не является аддитивной даже при однородном оптическом пути. Примером этому может служить закон квадратного корня для изолированной линии лоренцевского контура (см. п. 14.1). Когда же слой становится неоднородным, то использовать процедуру суммирования типа (14.18) невозможно. Оптическую толщину приходится определять сразу между двумя точками x_0 и x_δ . Однако и эту процедуру не удастся выполнить просто, поскольку оптическая толщина нелинейно зависит от трех независимо изменяющихся в пространстве параметров: $S(x)$, $\gamma^L(x)$, $\gamma^D(x)$. Поэтому, прежде чем применить статистическую модель спектральных линий, необходимо решить вопрос о приемлемом способе интегрирования уравнения переноса вдоль оптически неоднородного луча. С математической точки зрения проблема состоит в нахождении удачной процедуры расщепления интегрального оператора двойного интегрирования (по пространству и по частоте электромагнитного излучения) на произведение двух однократных интегралов по разделенным переменным. Более наглядно эту процедуру можно представить как поиск параметров такого эффективного *однородного* слоя, излучение и поглощение которого эквивалентно реальному неоднородному слою. Наиболее удачным методом решения этой проблемы является приближение Кертнса–Годсона (Curtis A.R., 1952; Godson W.L., 1953).

Идея данного метода была высказана также в других работах (van de Hulst H.C., 1945; Plass G.N., 1956).

Основной смысл данного метода состоит в замене истинного неоднородного пути некоторым эквивалентным однородным. Эффективные параметры указанного однородного пути находятся из условия равенства пропусканий эквивалентного и истинного неоднородного слоев в предельных случаях сильных и слабых линий. Очевидно, что при промежуточных значениях оптических толщин возможно возникновение ошибок. Как показали исследования, точность приближения Кертиса – Годсона зависит не только от оптической толщины слоя, но и от степени неоднородности слоя. Рассмотрим эти вопросы подробнее.

Эквивалентная ширина совокупности линий на спектральном участке $\Delta\omega$ для неоднородного отрезка пути $(x_8 - x_0)$ определяется по формуле

$$W(x_0, x_8) = \int_{\Delta\omega} \left\{ 1 - \exp \left[- \int_{x_0}^{x_8} \kappa_\omega(x') dx' \right] \right\} d\omega, \quad (14.19)$$

а для его части $(x_8 - x_0)$

$$W(x_1, x_8) = \int_{\Delta\omega} \left\{ 1 - \exp \left[- \int_{x_1}^{x_8} \kappa_\omega(x') dx' \right] \right\} d\omega. \quad (14.20)$$

Спектральная интенсивность излучения в точке x_8 , как это следует из уравнения переноса, равна

$$J_\omega(x_8) = J_\omega(x_0) \exp \left[- \int_{x_0}^{x_8} \kappa_\omega(x') dx' \right] - \int_{x_0}^{x_8} J_{b\omega}(x') \frac{d}{dx'} \left\{ 1 - \exp \left[- \int_{x'}^{x_8} \kappa_\omega(x'') dx'' \right] \right\} dx', \quad (14.21)$$

где $J_\omega(x_0)$ – интенсивность излучения, падающего на рассматриваемый объем газа от внешнего источника. В дальнейшем вводятся допущения физического характера относительно спектральной

зависимости функций $J_{\omega}(x_0)$ и $J_{b\omega}(x)$. Предполагается, что на участке $\Delta\omega$ эти функции изменяются незначительно, поэтому их можно заменить средними величинами $J_{\Delta\omega}(x_0)$ и $J_{b,\Delta\omega}(x)$ на участке спектра $\Delta\omega$. Это позволяет записать

$$J_{\Delta\omega}(x_8)\Delta\omega = J_{\Delta\omega}(x_0)\left[\Delta\omega - W(x_0, x_8)\right] - \int_{x_0}^{x_8} J_{b,\Delta\omega}(x') \frac{dW(x', x_8)}{dx'} dx'. \quad (14.22)$$

Из (14.22) следует решение для однородного пути

$$J_{\Delta\omega}^*(x_8)\Delta\omega = J_{\Delta\omega}(x_0)\left[\Delta\omega - W^*(x_0, x_8)\right] + J_{b,\Delta\omega}^* W^*(x_0, x_8). \quad (14.23)$$

Звездочка в (14.23) означает, что соответствующие величины определены для некоторого однородного слоя. Приравнявая левые части соотношений (14.22) и (14.23), получаем исходное уравнение для отыскания параметров эквивалентного однородного слоя

$$J_{\Delta\omega}(x_0)\left[\Delta\omega - W^*(x_0, x_8)\right] + J_{b,\Delta\omega}^*(x^*)W^*(x_0, x_8) = J_{\Delta\omega}(x_0)\left[\Delta\omega - W(x_0, x_8)\right] - \int_{x_0}^{x_8} J_{b,\Delta\omega}(x') \frac{dW(x', x_8)}{dx'} dx'. \quad (14.24)$$

Из этого соотношения нельзя получить однозначные искоемые условия, поскольку зависимость $J_{b,\Delta\omega}(x')$ может быть произвольной. Однако некоторые общие предварительные соображения высказать можно. Рассмотрим два случая. Первый состоит в пренебрежении собственным излучением, тогда

$$W^*(x_0, x_8) = W(x_0, x_8). \quad (14.25)$$

Во втором случае, наоборот, пренебрежем внешним излучением $J_{\Delta\omega}(x_0)$

$$J_{b,\Delta\omega}^*(x^*)W^*(x_0, x_8) = - \int_{x_0}^{x_8} J_{b,\Delta\omega}(x') \frac{dW(x', x_8)}{dx'} dx'. \quad (14.26)$$

Отсюда очевидно, что если на трассе $(x_8 - x_0)$ функция излучения $J_{b,\Delta\omega}(x')$ меняется незначительно, то ее можно вынести из-под интеграла и в результате придем опять к формуле (14.25). Следовательно, (14.25) можно использовать для определения параметров эквивалентного слоя только при условии слабого изменения $J_{b,\Delta\omega}(x')$ вдоль трассы. Однако при численных расчетах переноса излучения формула (14.26) в непосредственном виде не используется. Интеграл в правой части (14.26) преобразуют к виду

$$\int_{x_0}^{x_8} J_{b,\Delta\omega}(x') \frac{dW(x', x_8)}{dx'} dx' \cong \sum_{i=0}^{i_8-1} J_{b,\Delta\omega,i} [W(x_{i+1}, x_8) - W(x_i, x_8)]. \quad (14.27)$$

Здесь среднее значение функции $J_{b,\Delta\omega,i}$ на участке $[x_i, x_{i+1}]$ выносится за пределы интеграла, поэтому качество такого приближения уже существенно зависит от расчетной сетки. Интегралы типа $W(x_i, x_8)$ берутся по неоднородному оптическому пути и именно их удобно заменить интегралами вида $W^*(x_i, x_8)$. В этом случае снова применима формула (14.25), но следует иметь в виду, что в (14.27) входит разность между двумя эквивалентными ширинами, поэтому погрешность вычисления разности может оказаться больше, чем погрешность вычисления отдельных слагаемых. На это было обращено внимание в работах (Lindquist G.H., et al., 1972; Young S.T., 1975), что, как будет показано ниже, привело к созданию модификации метода Кертиса – Годсона.

Рассмотрим сначала получение основных соотношений Кертиса – Годсона. Исходным является соотношение (14.25). Пусть в спектральном диапазоне $\Delta\omega$ есть N линий, тогда суммарный спектральный коэффициент поглощения определяется по формуле

$$\kappa_{\omega}^d(x') = \sum_{i=1}^N \kappa_{\omega,i}(x') \quad (14.28)$$

и соотношение (14.25) имеет вид

$$\int_{\Delta\omega} \left\{ \exp \left[- \int_{x_0}^{x_\delta} \sum_{i=1}^N \kappa_{\omega,i} (x') dx' \right] - \exp \left[- \sum_{i=1}^N \kappa_{\omega,i}^* (x_\delta - x_0) \right] \right\} d\omega = 0. \quad (14.29)$$

Рассмотрим модель неперекрывающихся линий для того, чтобы соотношение (14.29) можно было применить к одной линии. В этом случае спектральный диапазон $\Delta\omega_i$, принадлежащий $\Delta\omega$ и охватывающий i -ю линию, также оказывается много больше, чем полуширина i -й линий

$$\int_{\Delta\omega_i} \left\{ \exp \left[- \int_{x_0}^{x_\delta} \sum_{i=1}^N \kappa_{\omega,i} (x') dx' \right] - \exp \left[- \kappa_{\omega,i}^* (x_\delta - x_0) \right] \right\} d\omega = 0. \quad (14.30)$$

В случае слабой линии вместо интеграла (14.30) получим условие

$$\int_{x_0}^{x_\delta} dx' \int_{\Delta\omega_i} \kappa_{\omega,i} (x') d\omega = (x_\delta - x_0) \int_{\Delta\omega_i} \kappa_{\omega,i}^* d\omega, \quad (14.31)$$

и, поскольку величина $\Delta\omega_i$ предполагается много больше, чем ширина линии, то

$$S_i^* = \frac{1}{x_\delta - x_0} \int_{x_0}^{x_\delta} S_i (x') dx'. \quad (14.32)$$

Это первое из двух основных соотношений приближения Кертиса–Годсона. Отметим, что функция контура линии не задавалась, поэтому формула (14.32) может применяться как для лоренцевских, так и для доплеровских линий.

В случае, когда выполняется «закон квадратного корня», линия поглощает как абсолютно черное тело во всей области, кроме далеких крыльев. Второе условие приближения Кертиса–Годсона получим исходя из того, чтобы в далеких крыльях поглощение в однородном и неоднородном слоях было одинаковым. Рассмотрим линии лоренцевского контура. Главной причиной выбора лоренцевского контура является то, что в далеком

крыле линия фойгтовского контура описывается дисперсионной (лоренцевской) функцией. Кроме этого, уширение линии доплеровского контура пропорционально квадратному корню из температуры, так что в рассматриваемом диапазоне температур доплеровская полуширина может измениться не более чем в 3 раза (при изменении температуры от 2000 до 20000 К). После получения соотношения для эквивалентной полуширины лоренцевского контура мы распространим его и для эквивалентной полуширины доплеровского контура, надеясь, что этим мы добьемся большей точности. В формуле (14.30) введем новую шкалу волновых чисел, отсчитываемую от центра i -й линии, и интеграл по волновому числу представим в виде

$$\int_0^{\omega_1} \exp \left[\int_{x_0}^{x_8} \kappa_{\omega,i}(x') dx' \right] d\omega - \int_0^{\omega_1} \exp \left[-\kappa_{\omega,i}^*(x_8 - x_0) \right] d\omega + \\ + \int_{\omega_1}^{\infty} \exp \left[\int_{x_0}^{x_8} \kappa_{\omega,i}(x') dx' \right] d\omega - \int_{\omega_1}^{\infty} \exp \left[-\kappa_{\omega,i}^*(x_8 - x_0) \right] d\omega = 0. \quad (14.33)$$

Выберем слой $(x_8 - x_0)$ настолько толстым, чтобы с любой наперед заданной точностью первые два интеграла в (14.33) обращались в нуль. При этом потребуем, чтобы $\omega_1 \gg \max \{ \gamma_i^L \}$. Несложно показать (подынтегральные функции удовлетворяют условию знакопостоянства их производных по частоте), что оставшиеся два интеграла приводят к формуле

$$(\gamma_i^L)^* = \int_{x_0}^{x_8} \frac{S_i(x') \gamma_i^L(x') dx'}{S_i^*(x_8 - x_0)}, \quad (14.34)$$

которая является вторым искомым соотношением приближения Кертиса – Годсона.

Метод Кертиса – Годсона неоднократно применялся в расчетах переноса излучения вдоль неоднородных трасс в молекулярных и атомных линиях. Исследование переноса излучения в ударных высокотемпературных слоях, образующихся у лобовой поверхности затупленного тела при его входе в плотные слои атмосферы

сферы с гиперзвуковой скоростью (Суржиков С.Т., 1992), показало на удовлетворительную точность аппроксимации Кертиса – Годсона. Его использование совместно с обобщенно-групповыми статистическими моделями спектра дало погрешность на уровне 30%. Хорошо зарекомендовало себя это приближение и в задачах атмосферной оптики (Гуди Р., 1966). Исследование метода Кертиса – Годсона проводилось в литературе по двум направлениям. Во-первых, анализировались погрешности этого приближения в зависимости от степени неоднородности слоя, во-вторых, исследовались неизолированные линии и полосы, где, помимо всего прочего, приходится вводить эффективные параметры линий, осредненные по полосе. Пример интегрирования переноса излучения в полосе приведен в (Krakov B., et al., 1966). В работах (Simmons F.S., 1966, 1967) приведен анализ эквивалентной ширины линии лореицевого контура в двух предельных случаях сильной и слабой линий. Исследованию переноса излучения в изолированной линии лоренцевского контура посвящена также работа (Gogley A.C., 1970). Расчеты, проведенные в этой работе, показали, что уровень погрешности не превосходит 5% в широком диапазоне оптических толщин. Сопоставление метода Кертиса – Годсона с подходом учета неоднородности, в котором коэффициент поглощения разлагается в ряд в окрестности конца интервала интегрирования, выполнено в (Chan S.H., et al., 1969). В работе (Simmons F.S., et al., 1970) показаны расчеты излучения от пламен, содержащих CO_2 и H_2O через холодные слои атмосферы.

В работе (Lindquist G.H., et al., 1972) выполнен анализ причин больших погрешностей, возникающих при расчете переноса излучения в неоднородных слоях. Показано, что точность расчета разности между эквивалентными ширинами слоев различной толщины (производной от эквивалентной ширины) гораздо ниже, чем точность расчета самих эквивалентных ширин. Развитие данной работы выполнено в работе (Young S.J., 1975), где сформулирован способ расчета производных от эквивалентных ширин и представлены результаты обширных расчетов для линий лореицевого и доплеровского контуров. Получены также асимптотические формулы для расчета производных от эквивалентных ширин.

Основное отличие применения аппроксимации Кертиса – Годсона к расчету переноса излучения в полосе линий от расчета изолированной линии состоит в замене эффективной интенсивности средним коэффициентом поглощения, а эффективной полуширины средним отношением полуширины к расстоянию между линиями (Young S.J., 1975).

Укажем также на работы (Киселев К.А., 1979, 1981), где созданы аналитические методы расчета среднего пропускания неоднородных молекулярных слоев в линиях фойгтовского контура. Этот подход основан на разложении контура оптической толщины в спектральной линии в ряд Фурье.

В заключение заметим, что методы расчета переноса излучения в спектральных линиях, представленные в работах (Simmons F.S., 1967; Бронин С.Я. и др., 1970, 1977; Wilson K.H., et al., 1971; Кондранин Т.В. и др., 1981) также во многом базируются на основной идее метода Кертиса – Годсона.

14.4. Эквивалентная ширина и средняя поглощательная способность групп атомных линий в модельном представлении

Оценка точности статистических моделей выполнена в работе (Суржигов С.Т., 1992) по результатам численных расчетов поглощательной способности однородных и неоднородных газовых слоев в различных группах линий атомов азота, кислорода и углерода. В качестве точных значений интегральной поглощательной способности A принимались результаты полинейчатого (*line-by-line*) численного интегрирования поглощения вдоль луча.

Многочисленные расчеты показали, что применение простой статистической модели к расчету переноса излучения в атомных линиях приводит к погрешностям $\sim 100\%$ и более, а использование групповых и обобщенных статистических моделей позволяет производить вычисления с точностью порядка $\sim 30\%$.

При вычислениях поглощательных способностей неоднородных слоев газов (исследовались высокотемпературные удар-

ные слои, образующиеся у лобовой поверхности затупленных тел, входящих в плотные слои атмосферы с гиперзвуковыми скоростями), статистические модели использовались совместно с приближением Кертиса – Годсона, что вносило дополнительную погрешность в результаты расчетов. Применялась модификация метода Кертиса – Годсона, которая заключается в том, что эффективные интенсивность и полуширина атомных линий в эквивалентном однородном слое рассчитываются не для каждой спектральной линии, а для группы линий.

При использовании модельного представления спектра совместно с приближением Кертиса – Годсона, можно указать, по крайней мере, два варианта усреднения по частоте и по пространству вдоль неоднородного луча: 1) для каждой из линий рассчитываются средние параметры вдоль луча, а затем статистическая модель применяется к расчету переноса излучения в эффективном однородном слое с постоянными параметрами линий; 2) в каждой точке пространства на выделенном луче определяются средние параметры для группы, а затем эти групповые параметры осредняются вдоль луча.

Заранее понятно, что первый из указанных путей является более точным, поскольку поглощательные способности истинного и эквивалентного однородного слоев согласуются для каждой линии. Однако этот путь является и существенно более трудоемким из-за необходимости расчета интегралов вдоль слоя для каждой линии. Для удобства анализа различных моделей, целесообразно разбить их на три группы. Введем также *среднюю поглощательную способность* газа в спектральном диапазоне $\Delta\omega$: $\bar{A} = A/\Delta\omega$ и *среднюю эквивалентную ширину* $\bar{W} = W/\Delta\omega$.

Ниже даны расчетные соотношения для каждой из групп методов. Главное отличие между этими расчетными методами состоит в способе усреднения интенсивностей и полуширин в совокупностях учитываемых линий. Что касается способа аппроксимации эквивалентных ширин, то это не является принципиально важным. Для примера здесь используется одна из аппроксимаций, представленных в п. 14.1.

1-я группа: Простые статистические модели ($m = 1, 2$).

Поглощательная способность N линий, присутствующих в спектральном диапазоне волновых чисел $\Delta\omega$, определяется по формулам

$$\begin{aligned} \bar{A}_1^{(m)} &= 1 - \exp[-\bar{W}_V(\tau, a_L, a_D)], \\ \tau &= Y_S/\Delta\omega, \quad a_{L(D)} = Y_{L(D)}/\Delta\omega. \end{aligned} \quad (14.35)$$

Здесь для расчета эквивалентной ширины $\bar{W}_V = \bar{W}_V(\tau, a_L, a_D)$ используется аппроксимация (Rodgers C.D., et al., 1974)

$$\bar{W}_V = \sqrt{\bar{W}_L^2 + \bar{W}_D^2 + (\bar{W}_D \bar{W}_L / \tau^2)^2}, \quad (14.36)$$

в которой

$$\bar{W}_L = \frac{\tau}{\sqrt{1 + \tau/4a_L}}, \quad (14.37)$$

$$\bar{W}_D = \frac{1.7a_D}{2\sqrt{\pi} \ln 2} \sqrt{\ln \left[1 + \left(2\sqrt{\pi} \ln 2 \tau / 1.7a_D \right)^2 \right]}. \quad (14.38)$$

В зависимости от способа расчета функций Y_S и $Y_{L(D)}$ будем различать модели:

$m = 1$

$$Y_S^{(1)} = \sum_i^N \int_{x_0}^{x_8} S_i dx, \quad Y_{L(D)} = \sum_i^N \int_{x_0}^{x_8} S_i \gamma_{L(D),i} dx / \sum_i^N \int_{x_0}^{x_8} S_i dx, \quad (14.39)$$

$m = 2$

$$Y_S^{(2)} = \int_{x_0}^{x_8} \sum_i^N S_i dx, \quad Y_{L(D)} = \int_{x_0}^{x_8} \sum_i^N S_i \gamma_{L(D),i} dx / \int_{x_0}^{x_8} \sum_i^N S_i dx, \quad (14.40)$$

где S – интегральный коэффициент поглощения в линии (сила линии); γ – полуширина линии; индексы L и D означают тип уширения – лоренцевский или доплеровский; i – индекс линии; x_0, x_8 – границы отрезка неоднородного луча в пространстве.

Первая из приведенных моделей отвечает простой статистической модели Гуди с параметрами эффективного однородного слоя, определяемыми по методу Кертиса – Годсона. Недостаток этой модели состоит в необходимости расчета двух интегралов по пространству для каждой линии. Вторая модель строится на предположении о допустимости расчета интегралов от суммарных функций, единственным обоснованием которой является предположение о компенсации погрешностей средних величин слагаемых, распределенных случайным образом. Эта модель весьма экономична, так как требует вычисления лишь двух интегралов для спектрального диапазона $\Delta\omega$.

2-я группа: Обобщенная статистическая модель ($m = 3$).

Здесь поглощательная способность рассчитывается по формулам

$$\bar{A}_2^{(3)} = 1 - \exp \left[- \sum_i^N \bar{W}_V (\tau_i, a_{L,i}, a_{D,i}) \right],$$

$$\tau_i = Y_{S,i} / \Delta\omega, \quad a_{L(D),i} = Y_{L(D),i} / \Delta\omega, \quad (14.41)$$

$$Y_{S,i} = \int_{x_0}^{x_8} S_i dx, \quad Y_{L(D),i} = \int_{x_0}^{x_8} S_i \gamma_{L(D),i} dx \bigg/ \int_{x_0}^{x_8} S_i dx.$$

3-я группа: Обобщенно-групповые статистические модели ($m = 4, 5$).

Расчетные соотношения имеют следующий вид:

$m = 4$

$$\bar{A}_3^{(m)} = 1 - \exp \left[- \sum_k^K \bar{W}_V (\tau_k, a_{L,k}, a_{D,k}) \right], \quad (14.42)$$

$$\tau_k = Y_{S,k} / \Delta\omega, \quad a_{L(D),k} = Y_{L(D),k} / \Delta\omega,$$

$$Y_{S,k}^{(4)} = \sum_i^{N_k} \int_{x_0}^{x_8} S_i dx, \quad Y_{L(D)} = \sum_i^{N_k} \int_{x_0}^{x_8} S_i \gamma_{L(D),i} dx \bigg/ \sum_i^{N_k} \int_{x_0}^{x_8} S_i dx, \quad (14.43)$$

$m = 5$

$$Y_{S,k}^{(5)} = \int_{x_0}^{x_5} \sum_i^{N_k} S_i dx, \quad Y_{L(D),k} = \int_{x_0}^{x_5} \sum_i^{N_k} S_i \gamma_{L(D),i} dx / \int_{x_0}^{x_5} \sum_i^{N_k} S_i dx. \quad (14.44)$$

Видно, что модели 4 и 5 соответствуют моделям 1 и 2, но строятся для отдельных групп линий. Заметим, что при расчете эффективных полуширин $Y_{L(D)}$ по формуле (14.43) можно использовать другие подынтегральные функции, например

$$\left(\sum_i^{N_k} \sqrt{S_i \gamma_{L(D),i}} \right)^2,$$

однако численные эксперименты показали, что эта замена не дает ощутимых положительных результатов.

14.5. Эквивалентная ширина и поглощательная способность полос вращательных линий при электронно-колебательно-вращательных переходах

Электронный спектр двухатомных молекул обладает относительно хорошо идентифицируемой структурой, что делает обоснованным использование для описания такого спектра обобщенно-группового подхода.

Поглощательная способность молекулярного газа на отрезке луча $[x_0, x_5]$ для диапазона волновых чисел $\Delta\omega$ определяется формулой

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_{\Delta\omega} A_\omega(x) d\omega = W(x) = \\ &= \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \left[1 - \exp \left(- \int_{x_0}^{x_5} \sum_{ee'} \sum_{vv'} \sum_{jj'} \kappa_\omega(x) dx \right) \right] d\omega, \quad (14.45) \end{aligned}$$

где $\kappa_\omega(x)$ – коэффициент поглощения во вращательной линии.

Здесь суммирование производится по электронным (ee'), колебательным (vv') и вращательным (jj') переходам. Расчет коэффициента поглощения $\kappa_\omega(x)$ состоит, как и прежде, в задании

функции профиля линии и параметров, определяющих эту функцию: интегрального коэффициента поглощения S , полуширины γ и волнового числа ω_0 центра этой линии. Коэффициент поглощения, получаемый суммированием по всем вращательным линиям, определяет так называемый *синтетический* спектр поглощения.

Если не использовать статистические модели спектра, то при проведении *line-by-line* расчетов поглощательной способности по формуле (14.45) контур линии можно описывать функцией Фойгта. Интегральные коэффициенты поглощения вращательных линий S вычисляются с использованием данных по электронным силам переходов, факторам Хенля – Лондона и Франка – Кондона.

При выполнении *line-by-line* расчета минимальный шаг расчетной сетки по волновому числу ω следует выбирать таким, чтобы описать половину контура линии с чисто доплеровским уширением не менее чем в 10 точках. В каждой расчетной точке шкалы ω определялся суммарный коэффициент поглощения с использованием аппроксимации фойгтовской функции. Ограничение на наибольшее вращательное квантовое число вводится при расчете синтетического спектра по рекомендациям (Гурвич Л.В. и др., 1978).

Именно большая трудоемкость расчетов по формуле (14.45) объясняет необходимость использования статистических моделей.

Поглощательная способность слоя газа, при расчете по m -й модели, может быть записана в виде

$$A_m = 1 - \exp \left[- \sum_{ee'} \sum_{vv'} \sum_{n=1}^L W_m(vv', n) \right], \quad (14.46)$$

где суммирование ведется по электронным (ee') и колебательным (vv') переходам, а также по ветвям колебательных полос (n). Величина L отвечает числу учитываемых вращательных полос. Так, при $L=3$, когда учитывается вращательная структура спектра (P -, Q -, R - ветви), т.е. средняя эквивалентная ширина $W_m(vv', n)$ рассчитывается только для линий, принадлежащих n -й ветви, и

$L = 1$, когда вращательная структура не учитывается, т.е. средняя оптическая толщина определяется по линиям колебательного перехода $\nu\nu'$, безотносительно к принадлежности той или иной ветви. Заметим, что число ветвей может значительно превышать учитываемые здесь три ветви.

Как и прежде (см. п.14.4), исследуемые модели удобно представить в виде двух групп. К первой группе (модели 1 и 2) относятся модели, в которых контуры вращательных линий не учитываются. Это наиболее грубые модели спектра. В них используется средний коэффициент поглощения каждой линии, полученный делением ее интегрального коэффициента поглощения на величину некоторого спектрального диапазона. Интегрирование по пространственной координате проводится по методу Кертиса – Годсона.

Модель 1 ($L = 1$).

Средняя эквивалентная ширина находится по формуле

$$\bar{W}_1(\nu\nu', n) = \frac{1}{\Delta\omega^*} \sum_i^{N_\nu} \int_{x_0}^{x_0} S_i dx, \quad (14.47)$$

где N_ν – число вращательных линий в колебательном переходе, попавших в $\Delta\omega^* \subset \Delta\omega$. Отметим, что величина спектрального диапазона $\Delta\omega^*$, в пределах которого ищется средняя оптическая толщина, должна выбираться меньшей, чем $\Delta\omega$.

Модель 2 ($L = 3$).

Средняя эквивалентная ширина находится по формуле

$$\bar{W}_2(\nu\nu', n) = \frac{1}{N_{\nu,n}} \sum_i^{N_{\nu,n}} \int_{x_0}^{x_0} \frac{S_i}{\Delta\omega_i} dx, \quad (14.48)$$

где $N_{\nu,n}$ – число линий n -й ветви полосы $\nu\nu'$, попавших в $\Delta\omega^*$; $\Delta\omega_i$ – расстояние между ближайшими линиями в ветви n .

Отличие этой модели от первой состоит в том, что здесь средний коэффициент поглощения линии рассчитывается не в

диапазоне $\Delta\omega^*$, а только в его части $\Delta\omega_i \subset \Delta\omega^*$, т.е. лучше учитывается реальное расположение линий.

Ко второй группе анализируемых моделей (модели 3 и 4) относятся статистические модели с экспоненциальной плотностью вероятности распределения интенсивностей линий. В них учитывается реальный контур вращательных линий. Отличие между этими моделями состоит в способе разбиения всей совокупности линий, попавших в $\Delta\omega$, на группы. Отметим, что это оказывается важным при расчете переиоса излучения в неоднородных слоях или при исследовании распространения излучения селективного источника в селективно поглощающей среде.

Модель 3 ($L = 1$).

Это статистическая модель, в которой линии группируются по принадлежности к колебательной полосе, а для учета перекрытия групп используется статистический принцип Гуди. В данном случае средняя эквивалентная ширина линий с фойгтовским контуром аппроксимируется согласно (Huffaker R.M., 1968). Неоднородность слоя учитывается в приближении Кертиса–Годсона. С учетом сказанного

$$\bar{W}_3(uv', n) = \bar{k} (1 - Y^{-1/2})^{1/2}, \quad \bar{k} = \int_{x_0}^{x_8} \langle S \rangle (1/d) dx, \quad (14.49)$$

$$Y = \left[1 - \left(\frac{\bar{W}_L}{\bar{k}} \right)^2 \right]^{-2} + \left[1 - \left(\frac{\bar{W}_D}{\bar{k}} \right)^2 \right]^{-2} - 1,$$

$$\bar{W}_L = \bar{k} (1 + \bar{k}/4a_L)^{-1/2},$$

$$\bar{W}_D = \frac{1.7 a_D}{2\sqrt{2} \ln 2} \sqrt{\ln \left[1 - \left(2\sqrt{\pi} \ln 2 \bar{k} / 1.7 a_D \right)^2 \right]},$$

$$a_L = \bar{k}^{-1} \int_{x_0}^{x_8} f_L(x) dx, \quad a_D = \bar{k}^{-1} \int_{x_0}^{x_8} f_D(x) dx,$$

$$f_L(x) = (\langle S \rangle / d) (\langle \gamma_L \rangle / d), \quad f_D(x) = (\langle S \rangle / d) (\langle \gamma_D \rangle / d),$$

$$\langle S \rangle = N_\nu^{-1} \sum_i^{N_\nu} S_i, \quad \langle \gamma \rangle = N_\nu^{-1} \sum_i^{N_\nu} \gamma_i, \quad d = \Delta\omega / N_\nu.$$

Модель 4 (L = 3).

В этой модели линии группируются по принадлежности к P -, Q -, или R -ветви каждой колебательной полосы, поэтому расчет $W_4(vv', n)$ производится по формулам (14.49), в которых следует заменить N_ν на $N_{\nu, n}$. Следует также учесть, что количество ветвей вращательных линий может быть значительно больше, чем три. В этом случае суммирование необходимо проводить по всем ветвям.

14.6. Применение статистических моделей к расчету переноса селективного излучения в плоских слоях низкотемпературной плазмы

В п. 14.1 было показано, что поглощательная способность слоя газа на спектральном участке, содержащем атомные или молекулярные линии, в общем случае не является линейной функцией физической длины отрезка луча, вдоль которого распространяется излучение. Этот, на первый взгляд, не слишком значительный факт имеет своим следствием то, что большинство методов интегрирования уравнения переноса излучения по угловым переменным несовместимы со статистическими моделями спектра поглощения, позволяющими проводить интегрирование уравнения переноса излучения по волновому числу. В данном разделе рассмотрен один из методов интегрирования по угловым переменным – метод полумоментов, который допускает объединение со статистическими моделями спектра.

Рассмотрим задачу интегрирования уравнения переноса излучения в плоском неоднородном слое по спектру на отдельном спектральном диапазоне, содержащем атомные линии.

Уравнение переноса селективного излучения применительно к плоскопараллельной геометрии без учета светорассеяния в приближении локального термодинамического равновесия запишем относительно спектральной интенсивности излучения J_ω

$$\mu \frac{dJ_\omega}{dx} + \kappa_\omega J_\omega = \kappa_\omega J_{b,\omega}, \quad (14.50)$$

где $J_{b,\omega}$ – планковская спектральная интенсивность; $\mu = \cos\theta$, θ – угол между направлением распространения излучения и положительным направлением оси x , нормальной к рассматриваемому слою ($x_1 = 0$, $x_H = H$ – границы плоского слоя, рис. 14.1)).

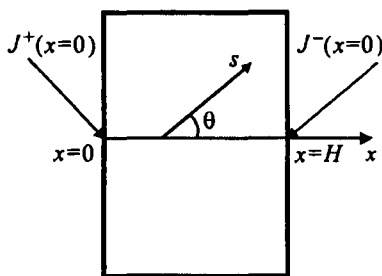


Рис. 14.1. Схема переноса излучения в плоской геометрии

Введем спектральную оптическую толщину $d\tau_\omega = \kappa_\omega dx$. В соответствии с методом полумоментов (см. п. 9.2) подействуем на (14.50) полумоментными операторами следующего вида:

$$\Lambda^+ = 2\pi \int_0^1 \mu^n d\mu \quad \text{и} \quad \Lambda^- = 2\pi \int_{-1}^0 \mu^n d\mu,$$

в результате чего получим

$$\begin{aligned} \frac{dM_{n+1,\omega}^+}{d\tau_\omega} + M_{n,\omega}^+ &= \frac{2\pi}{n+1} J_{b,\omega}, & n = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{dM_{n+1,\omega}^-}{d\tau_\omega} + M_{n,\omega}^- &= \frac{2\pi}{n+1} (-1)^n J_{b,\omega}, & n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (14.51)$$

$$\text{где } M_{n,\omega}^+ = 2\pi \int_0^1 J_{\omega}^+ \mu^n d\mu, \quad M_{n,\omega}^- = 2\pi \int_{-1}^0 J_{\omega}^- \mu^n d\mu, \quad (14.52)$$

индексами «+» и «-» у спектральной интенсивности фиксирована ее принадлежность областям $\theta \in [0, \pi/2]$ и $\theta \in [\pi/2, \pi]$ соответственно.

Для замыкания бесконечной системы уравнений необходимо постулировать вид угловой зависимости интенсивности излучения, в каждом из полупространств, например

$$J_{\omega}^{\pm} = \sum_{p=1}^P a_p^{\pm} \mu^{P-p}, \quad (14.53)$$

где P – порядок приближения. Далее рассмотрим приближение второго порядка $P=2$, в котором имеется линейная зависимость интенсивности от μ : $J_{\omega}^{\pm} = a_1^{\pm} \mu + a_2^{\pm}$, что дает однозначную связь между полумоментными характеристиками

$$M_{2,\omega}^+ = -M_{0,\omega}^+ / 6 + M_{1,\omega}^+, \quad M_{2,\omega}^- = -M_{0,\omega}^- / 6 - M_{1,\omega}^-, \quad (14.54)$$

Подставляя (14.54) в (14.51) при $n=0, 1$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dM_{0,\omega}^+}{d\tau_{\omega}} + 6M_{0,\omega}^+ - M_{1,\omega}^+ &= 6\pi J_{b,\omega}, \\ \frac{dM_{1,\omega}^+}{d\tau_{\omega}} + M_{0,\omega}^+ &= 2\pi J_{b,\omega}, \\ \frac{dM_{0,\omega}^-}{d\tau_{\omega}} - 6M_{0,\omega}^- - 6M_{1,\omega}^- &= -6\pi J_{b,\omega}, \\ \frac{dM_{1,\omega}^-}{d\tau_{\omega}} + M_{0,\omega}^- &= 2\pi J_{b,\omega}, \end{aligned} \quad (14.55)$$

которая при граничных условиях вида

$$M_{1,\omega}^+(x=0) = M_{0,\omega}^+(x=0) = M_{1,\omega}^-(x=H) = M_{0,\omega}^-(x=H) = 0, \quad (14.56)$$

имеет следующее решение:

$$M_{n,\omega}^+(\tau_\omega) = 0.5 \sum_{m=1}^2 \beta_m^{1-n} \int_0^{\tau_\omega} I_{b,\omega} \exp[-\beta_m(\tau_\omega - \tau)] d\tau, \quad (14.57)$$

$$M_{n,\omega}^-(\tau_\omega) = 0.5 (-1) \sum_{m=1}^2 \beta_m^{1-n} \int_{\tau_\omega}^{\tau_{\omega,H}} I_{b,\omega} \exp[-\beta_m(\tau - \tau_\omega)] d\tau,$$

где $I_{b,\omega} = 2\pi J_{b,\omega}$, $\beta_1 = 3 + \sqrt{3}$, $\beta_2 = 3 - \sqrt{3}$, $n = 0, 1$; $\tau_\omega = \int_0^x \kappa_\omega dx$.

Если в постановке задачи учитываются потоки излучения, падающие на границы $x=0$ и $x=H$, то соответствующие граничные условия формулируются с использованием формул (14.52) и подходящей аппроксимации угловой зависимости спектральной интенсивности излучения. Заметим, что, несмотря на простоту соотношений (14.57), следует иметь в виду особенность аппроксимации функции Планка на оптически толстых расчетных ячейках (см. п. 3.2).

С целью применения статистического метода учета линейчатой структуры, проинтегрируем по спектру соотношения (14.57) в пределах спектрального диапазона $\Delta\omega$

$$M_n^+(x) = 0.5 \sum_{m=1}^2 \beta_m^{1-n} I_m^+, \quad M_n^-(x) = 0.5 (-1) \sum_{m=1}^2 \beta_m^{1-n} I_m^-, \quad (14.58)$$

где

$$I_m^+ = I_m^+(0, x) = \int_0^x dx' \int_{\Delta\omega} \kappa_\omega(x') I_{b,\omega}(x') \exp\left[-\beta_m \int_{x'}^x \kappa_\omega(x'') dx''\right] d\omega,$$

$$I_m^- = I_m^-(x, H) = \int_x^H dx' \int_{\Delta\omega} \kappa_\omega(x') I_{b,\omega}(x') \exp\left[-\beta_m \int_x^{x'} \kappa_\omega(x'') dx''\right] d\omega.$$

Дальнейший анализ достаточно выполнить для одного из интегралов, например $I_m^-(x)$

$$I_m^-(x, H) = \int_x^H I_{b, \Delta\omega} \beta_m^{-1} \frac{dW_m(x, x')}{dx'} dx', \quad (14.59)$$

где
$$W_m(x, x') = \int_{\Delta\omega} \left\{ 1 - \exp \left[-\beta_m \int_x^{x'} \kappa_\omega(x'') dx'' \right] \right\} d\omega,$$

$$I_{b, \Delta\omega} = (\Delta\omega)^{-1} \int_{\Delta\omega} I_{b, \omega} d\omega.$$

Введем конечно-разностную сетку $\varpi = \{x_j, j=1, 2, 3, \dots, \delta\}$ где $x_1 = 0, x_\delta = H$. Тогда для любого фиксированного узла сетки с индексом f имеем

$$I_m^-(x_f, x_\delta) = \beta_m^{-1} \sum_{j=f}^{\delta-1} I_{b, \Delta\omega, j} \left[W_m(x_f, x_{j+1}) - W_m(x_f, x_j) \right]. \quad (14.60)$$

Считая поглощение в атомных линиях $\kappa_\omega^d(x)$ аддитивным с поглощением в непрерывном спектре $\kappa_\omega^c(x) = \kappa^c(x)$, т.е. $\kappa_\omega(x) = \kappa_\omega^d(x) + \kappa_\omega^c(x)$, получаем

$$W_m(x_f, x_j) = \left\{ 1 - \exp \left[-\beta_m (\tau_j^c - \tau_f^c) \right] \right\} \Delta\omega + \exp \left[-\beta_m (\tau_j^c - \tau_f^c) \right] W_m^*(x_f, x_j), \quad (14.61)$$

где
$$\tau_j^c = \int_0^{x_j} \kappa^c(x') dx', \quad \tau_f^c = \int_0^{x_f} \kappa^c(x') dx',$$

$$W_m^*(x_f, x_j) = \int_{\Delta\omega} \left\{ 1 - \exp \left[-\beta_m \int_{x_f}^{x_j} \kappa_\omega^d(x'') dx'' \right] \right\} d\omega, \quad (14.62)$$

$W_m^*(x_f, x_j)$ – эквивалентная ширина линий, попавших в спектральный диапазон $\Delta\omega$.

Для определения эквивалентной ширины $W_m^*(x_f, x_j)$ воспользуемся статистической моделью спектра

$$W_m^*(x_f, x_j) = A_{\Delta\omega, m} \Delta\omega = [1 - T_{\Delta\omega, m} \Delta\omega] \Delta\omega = \\ = \left\{ 1 - \prod_g \exp[-D_g^m \Delta\omega] \right\} \Delta\omega, \quad (14.63)$$

а среднее пропускание группы линий g , имеющих фойгтовский контур, аппроксимируем следующей связью между пропусканием групп линий с лоренцовским $D_{L,g}^m$ и доплеровским контуром $D_{D,g}^m$ (Rodgers C.D., et al., 1974):

$$D_g^m(x_f, x_j) = \sqrt{\left(D_{L,g}^m\right)^2 + \left(D_{D,g}^m\right)^2 + \left(D_{L,g}^m D_{D,g}^m / \chi_{m,g}\right)^2}, \\ D_{L,g}^m = D_{L,g}^m(x_f, x_j) = \chi_{m,g} / \sqrt{1 + \left(\chi_{m,g} / 4a_{L,g}^m\right)}, \quad (14.64)$$

$$D_{D,g}^m = D_{D,g}^m(x_f, x_j) = 1.7a_{D,g}^m \sqrt{\ln \left[1 + \left(\chi_{m,g} / 1.7a_{D,g}^m\right) \right]}.$$

Функции $\chi_{m,g}$, $a_{L,g}^m$, $a_{D,g}^m$ определяются в рамках приближения Кертиса – Годсона для каждой g -й группы линий

$$\chi_{m,g} = \chi_{m,g}(x_f, x_j) = (\beta_m / \Delta\omega) \int_{x_f}^{x_j} N_a F_g [T(x')] dx', \quad (14.65)$$

$$a_{L,g}^m = a_{L,g}^m(x_f, x_j) = \\ = \left(\beta_m / \Delta\omega^2 \chi_{m,g}\right) \int_{x_f}^{x_j} N_a F_g [T(x')] N_e G_{L,g} [T(x')] dx', \quad (14.66)$$

$$a_{D,g}^m = a_{D,g}^m(x_f, x_j) = \\ = \left(\beta_m / \Delta\omega^2 \chi_{m,g}\right) \int_{x_f}^{x_j} N_a F_g [T(x')] N_e G_{D,g} [T(x')] dx'. \quad (14.67)$$

Введенные групповые функции $F_g, G_{L,g}$ и $G_{D,g}$ пропорциональны суммарному интегральному поглощению всех линий N_g данной g -й группы, сумме лоренцевских γ_L и доплеровских γ_D полуширин (Суржиков С.Т., 2004 (а)):

$$F_g(T) = N_a^{-1} \sum_{j=1}^{N_g} S_j = \frac{\pi e^2}{mc^2} Q^{-1} \sum_{j=1}^{N_g} f_j g_j \exp(-E_j/kT), \quad (14.68)$$

$$G_{L,g}(T) = N_e^{-1} \sum_{j=1}^{N_g} \gamma_{L,j} = \begin{cases} \left(4.57 \times 10^{-17} T^{1/6}\right) \sum_{j=1}^{N_g} C_{4,j}^a, \\ \left(1.11 \times 10^{-16} T^{1/2}\right) \sum_{j=1}^{N_g} C_{4,j}^i, \end{cases} \quad (14.69)$$

$$G_{D,g}(T) = 3.58 \times 10^{-7} \sqrt{T/M_a} \sum_{j=1}^{N_g} \omega_{0,j}, \quad (14.70)$$

где N_a, N_e – концентрация поглощающих атомов и электронов; f_j, g_j – сила осциллятора в поглощении и статистический вес нижнего уровня с энергией E_j , при переходе с которого образуется атомная линия; $C_{4,j}^a, C_{4,j}^i$ – константы квадратичного эффекта Штарка при уширении атомных (a) и ионных (i) линий; $\omega_{0,j}$ – волновое число центра j -й линии; S_j – интегральный коэффициент поглощения в j -й линии; M_a – атомный вес; Q – статистическая сумма по состояниям:

$$Q = \sum_{i=1}^{L_a} g_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right), \quad (14.71)$$

где L_a – число энергетических состояний, учитываемых для данного атома, k – постоянная Больцмана.

Обратим внимание на то, что в условиях локального термодинамического равновесия групповые функции зависят только от температуры и не зависят от заселенностей поглощающих уровней. Это означает, что при расчетах переноса излучения они могут быть определены один раз заранее. При практической численной

реализации такого подхода температурные зависимости в круглых скобках (14.69) можно включить в подынтегральные выражения (14.66) и (14.67), тогда для каждой группы остается запомнить в памяти компьютера лишь две постоянные, вычисляемые суммированием констант квадратичного эффекта Штарка и волновых чисел центров линий.

14.7. Математическая технология обработки информации по атомным линиям для расчета температурных зависимостей групповых функций

В работе (Суржиков С.Т., 1993 (б)) показано, что использование метода полумоментов совместно со статистическими моделями групп атомных линий позволяет с высокой вычислительной эффективностью решать задачи о переносе теплового излучения в слоях низкотемпературной плазмы. Экономия расчетного времени составляет порядка 10^4 раз, а ожидаемая точность предсказания плотностей радиационных тепловых потоков оценивается в $20 \div 30\%$. Для успешного использования данного метода необходимо реализовать алгоритм построения групповых функций атомных линий. Алгоритм включает в себя следующие этапы.

1. Определение номенклатуры атомных линий.
2. Расчет параметров этих линий $S, f_j, g_j, E_j, C_{4,j}^a, C_{4,j}^i, \omega_{0,j}$, т.е. величин, позволяющих рассчитать функции (14.68)–(14.70).
3. Выбор спектральных групп, в пределах которых будет использоваться статистическая модель.
4. Расчет групповых функций (14.68)–(14.70) для каждой группы.

Учитывая большое число атомных линий, целесообразно компьютеризировать указанную процедуру. Пример базы данных атомных линий элементов C, N, O, C⁺, N⁺, O⁺ приведен в работе (Surzhikov S.T., 2002 (а)). Указанная база данных, в свою очередь, была создана с использованием специально разработанных автоматизированных процедур расчета параметров атомных линий на основе компьютерного представления информации, содержащей-

ся в электронной базе данных уровней энергии атомных частиц, созданной на основе таблиц экспериментальных значений уровней энергии атомов и ионов (Moore С.Е., 1949, 1952, 1958). Созданная таким образом электронная база данных уровней энергии представлена также в работе (Surzhikov S.T., 2002 (a)).

14.8. Перенос излучения в объемах произвольной геометрии с учетом спектральных линий

Среди рассмотренных методов интегрирования уравнения переноса по угловым переменным особое место занимает метод дискретных направлений (*Ray-tracing method*), поскольку только этот метод наиболее гармонично сочетается со статистическими моделями спектральных линий. В рамках указанного метода расчет плотности интегрального потока излучения путем интегрирования уравнения переноса излучения вдоль луча с применением статистических моделей производится очевидным способом. Однако вычисление дивергенции плотности потока излучения с использованием этого метода является чрезмерно трудоемким.

Рассмотрим применение статистической модели спектра при нахождении интегральной (или групповой) дивергенции лучистого потока в случаях, когда в выделенной точке пространства x_0 известна спектральная интенсивность излучения $J_\omega(x_0)$ (Суржи-ков С.Т., 1993 (a)). В этом случае дивергенция группового лучистого потока определяется по формуле

$$Q_{\Delta\omega}(x_0) = 4\pi \int_{\Delta\omega} \kappa_\omega(x_0) J_{b,\omega}(x_0) d\omega - \int_{\Delta\omega} \kappa_\omega(x_0) \int_{4\pi} J_\omega(x_0, \Omega) d\Omega d\omega, \quad (14.72)$$

а данная формула применима к объемам произвольных геометрий. Спектральный диапазон $\Delta\omega$ включает в себя, в общем случае, ультрафиолетовый, видимый и инфракрасный участки спектра. Для того чтобы воспользоваться статистическим подходом к расчету $Q_{\Delta\omega}(x_0)$, делается ряд упрощающих допущений.

Допущение 1. Спектральный интервал по $\Delta\omega$ делится на такие участки $\Delta\omega_l$ (общим числом $N_{\Delta\omega}$), в пределах которых функция Планка может быть с достаточной степенью точности заменена средней величиной.

Тогда первое слагаемое в (14.72) можно представить в виде

$$I_1 \approx 4\pi \sum_{l=1}^{N_{\Delta\omega}} \langle J_{b, \Delta\omega} \rangle_l \int_{\Delta\omega_l} \kappa_{\omega} (x_0) d\omega, \quad (14.73)$$

где $\langle J_{b, \Delta\omega} \rangle_l = \frac{1}{\Delta\omega_l} \int_{\Delta\omega_l} J_{b, \omega} d\omega$.

Допущение 2. Объемный спектральный коэффициент поглощения можно представить в виде суммы коэффициента поглощения в непрерывном спектре κ_{ω}^c и коэффициента поглощения в линиях κ_{ω}^d . Считается, что в пределах любого участка $\Delta\omega$ коэффициент поглощения в непрерывном спектре не зависит от частоты: $\kappa_{\omega}^c(x_0) = \kappa_l^c(x_0)$. Это допущение позволяет формально продолжить запись формулы (14.73)

$$I_1 \approx 4\pi \sum_{l=1}^{N_{\Delta\omega}} \langle J_{b, \Delta\omega} \rangle_l \left[\Delta\omega_l \kappa_{\omega}^c + \int_{\Delta\omega_l} \sum_{i=1}^{N_{L,l}} \kappa_{\omega,i}^d (x_0) d\omega \right], \quad (14.74)$$

где $N_{L,l}$ – число линий, попавших в диапазон l .

Допущение 3. Диапазон $\Delta\omega_l$ должен быть достаточно большим для того, чтобы выполнилось условие

$$\int_{\Delta\omega_l} \kappa_{\omega,i}^d (x_0) d\omega \approx \int_0^{\infty} \kappa_{\omega,i}^d (x_0) d\omega = S_i (x_0),$$

где S_i – интегральный коэффициент поглощения i -й линии. Это позволяет записать окончательное выражение для второго слагаемого в сумме (14.74)

$$I_1 \approx 4\pi \sum_{l=1}^{N_{\Delta\omega}} \langle J_{b, \Delta\omega} \rangle_l \left[\Delta\omega_l \kappa_{\omega}^c + \sum_{i=1}^{N_{L,l}} S_i (x_0) \right]. \quad (14.75)$$

Второе слагаемое в формуле (14.72) описывает удельную объемную мощность поглощения лучистой энергии. Отметим, что в первом слагаемом формулы (14.72) интегрирование по телесному углу выполнялось тривиально, поскольку функции $J_{b,\omega}$ и κ_ω являются изотропными. Спектральная интенсивность $J_\omega(x_0, \Omega)$ зависит от направления, поэтому представим искомое слагаемое в виде

$$I_2 = \sum_{j=1}^{N_\Omega} \int_{\Delta\omega_j} \kappa_\omega(x_0) J_{\omega,j}(x_0) d\omega \Delta\Omega_j, \quad (14.76)$$

где $J_{\omega,j}$ рассчитывается для одного из направлений, принадлежащего элементарному телесному углу $\Delta\Omega_j$, число которых равно N_Ω , и приписывается всему $\Delta\Omega_j$:

$$J_{\omega,j}(x_0) = \int_{x_0}^x \kappa_\omega(x') J_{b,\omega}(x') \exp\left[-\int_{x'}^x \kappa_\omega(x'') dx''\right] dx'.$$

Ключевым моментом излагаемого численного метода является способ взятия интеграла $I_{3,l,j}$:

$$I_{3,l,j} = \int_{\Delta\omega_j} \kappa_\omega(x_0) \int_{x_0}^{x'} J_{b,\omega}(x') \frac{dW_\omega(x_0, x')}{dx'} dx' d\omega, \quad (14.77)$$

где
$$dW_\omega(x_0, x') = 1 - \exp\left[-\int_{x_0}^{x'} \kappa_\omega(x'') dx''\right] dx'. \quad (14.78)$$

для чего вводится еще одно допущение.

Допущение 4. Пусть расчетная сетка построена настолько хорошо, что

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x J_{b,\omega}(x') \frac{dW_\omega(x_0, x')}{dx'} dx' &\approx \\ &\approx \sum_{k=1}^{N_{\xi-1}} J_{b,\omega,k} [W_\omega(x_0, x_{k+1}) - W_\omega(x_0, x_k)], \end{aligned} \quad (14.79)$$

где $J_{b,\omega,k}$ – средняя на шаге сетки планковская функция; N_δ – число точек координатной сетки.

Тогда, используя *Допущение 1*, получаем

$$I_{3,l,j} = \sum_{k=1}^{N_\delta-1} \langle J_{b,\omega,k} \rangle \int_{\Delta\omega_l} \kappa_\omega(x_0) [W_\omega(x_0, x_{k+1}) - W_\omega(x_0, x_k)] d\omega. \quad (14.80)$$

В (14.80) входит интеграл вида

$$I_{4,l} = \int_{\Delta\omega_l} \kappa_\omega(x_0) [W_\omega(x_0, x_k)] d\omega,$$

расчет которого, с учетом формул представленных выше, будет означать решение задачи в целом. Учитывая разделение суммарного коэффициента поглощения на непрерывную и линейчатую составляющие, получаем

$$I_{4,l} = \kappa_l^c \Delta\omega_l + \sum_{i=1}^{N_{L,l}} S_i + \frac{d}{dx_0} \int_{\Delta\omega_l} W_\omega(x_0, x_k) d\omega. \quad (14.81)$$

При выводе этой формулы было использовано свойство дифференцирования интеграла с переменными пределами интегрирования.

Именно при расчете последнего интеграла возникает необходимость использования статистического моделирования спектра линий. Этот интеграл можно представить в виде

$$W_l(x_0, x_k) = \Delta\omega_l [1 - T_c(x_0, x_k)] + T_c(x_0, x_k) W_l^*(x_0, x_k), \quad (14.82)$$

где

$$T_c(x_0, x_k) = \exp \left[- \int_{x_0}^{x_k} \kappa_l^c(x') dx' \right],$$

$$W_l^*(x_0, x_k) = \int_{\Delta\omega_l} \left[1 - \exp \left(- \int_{x_0}^{x_k} \kappa_l^d(x') dx' \right) \right] d\omega. \quad (14.83)$$

Теперь остается рассмотреть производную

$$\begin{aligned} \frac{dW(x_0, x_k)}{dx_0} &= \kappa_l^c(x_0) T_c(x_0, x_k) [W_l^*(x_0, x_k) - \Delta\omega_l] + \\ &+ T_c(x_0, x_k) \frac{dW_l^*(x_0, x_k)}{dx_0}, \\ \frac{dW_l^*(x_0, x_k)}{dx_0} &= \Delta\omega_l \exp \left[-\sum_{n=1}^K W_{V,n}(x_0, x_k) \right] + \sum_{n=1}^K \frac{dW_{V,n}(x_0, x_k)}{dx_0}, \end{aligned} \quad (14.84)$$

где K – число групп атомных или молекулярных линий в $\Delta\omega_l$.

Формула (14.84) получена с использованием статистической модели. Функции $W_{V,n}(x_0, x_k)$ представляют собой эквивалентные ширины групп атомных линий, выражения для которых получены в разделе 14.4. Суммируемые производные в (14.84) находятся в аналитическом виде, для чего используются аппроксимационные зависимости для эквивалентных ширин.

Таким образом, применение метода дискретных направлений (Ray-tracing method) совместно со статистическими моделями спектра вдоль каждого из моделируемого направления распространения излучения позволяет с высокой вычислительной эффективностью найти усредненные на спектральном диапазоне интенсивность излучения и среднюю по спектру дивергенцию вектора лучистого потока, т.е. энерговыделения в среде, обусловленного радиационным теплообменом.

14.9. Макростатистическая модель для описания теплообмена излучением с учетом спектра колебательных полос

Выше были изложены вычислительные модели расчета плотности потока излучения в плоском слое с использованием метода полумоментов и расчета дивергенции плотности потока излучения с использованием метода дискретных направлений, в которых интегрирование уравнения переноса по спектру излучения производится с использованием статистических моделей

спектральных линий. Эти методы применимы как к спектру атомных линий, так и к спектру вращательных линий молекулярного спектра.

В каждой из этих моделей исследуемый спектральный диапазон $\Delta\omega$ разбивается на более мелкие спектральные участки (спектральные группы), в пределах каждого из которых тем или иным способом решается уравнение переноса излучения. Интегральная поглощательная (излучательная) способность в диапазоне $\Delta\omega$ определяется суммированием интегральных поглощательных (излучательных) способностей в отдельных диапазонах. Средние характеристики находятся делением интегральных характеристик на величину $\Delta\omega$. Очевидно, что чем больше спектральных диапазонов вводится внутри $\Delta\omega$, тем расчеты становятся менее экономичными.

Существует дальнейшее обобщение статистических моделей, состоящее в их применении не к вращательным линиям, а к совокупности колебательных полос молекулярного спектра. Такие модели, получившие название *макростатистических моделей*, отличаются еще большей экономичностью, чем обычные статистические модели.

Макростатистическая модель спектра, представленная в работе (Суржиков С.Т., 1998 (а)), предназначена для определения интегральных (средних) радиационных характеристик в диапазоне $\Delta\omega$ без его деления на более мелкие спектральные участки. С этой целью статистическая модель молекулярных линий обобщается на описание спектра колебательных полос. Особенностью используемой статистической модели является то, что она формулируется применительно к одной линии, попавшей в спектральный диапазон $\Delta\omega$. При этом, как отмечалось выше, никакого противоречия с традиционной формулировкой статистических моделей нет, так как в данной статистической модели предполагается, что в рассматриваемый спектральный диапазон $\Delta\omega$ попала только одна спектральная линия из бесконечной совокупности, среднее расстояние между линиями в которой равно $\Delta\omega$. При этом предполагается справедливость статистического принципа Гуди о пропускательной способности совокупности линий.

В следующем разделе дана подробная формулировка статистической модели спектральных линий, обобщающая формулировку, данную в п. 14.2.

14.9.1. Формулировка статистической модели молекулярных линий применительно к одной линии

Статистическая модель молекулярных линий была предложена и первоначально исследовалась в работах (Гуди Р.М., 1966; Plass G.M, 1958; Wyett P.J., et al., 1962; Goody R.M., 1952; Пеннер С.С., 1963). В работе (Сошников В.М., 1961) дано уточнение вывода основных соотношений, состоящее в учете линий, расположенных за исследуемым спектральным диапазоном $\Delta\omega$. Показано, что для расчета среднего пропускания в спектральном диапазоне $\Delta\omega$ необходимо провести дополнительное интегрирование по $\Delta\Omega$ с последующим делением на $\Delta\Omega$, где $\Delta\Omega$ – спектральный диапазон, охватывающий $\Delta\omega$. В работе (Пластинин Ю.А. и др., 1981) выполнено обобщение статистических моделей молекулярного спектра на спектр атомных линий. Основываясь на указанных работах, получим расчетные соотношения, обобщающие ранее разработанные модели.

Пусть в спектральном диапазоне $\Delta\omega$ присутствует N молекулярных линий. Тогда спектральная пропускательная способность в пренебрежении линиями, лежащими вне $\Delta\omega$, вдоль однородного отрезка оптического пути L найдется по следующей формуле:

$$T(\omega) = \prod_{i=1}^N T(\omega, \omega_i), \quad (14.85)$$

где $T(\omega, \omega_i) = \exp[-\kappa_i(\omega, \omega_i)L]$, $\kappa_i(\omega, \omega_i)$ – спектральный коэффициент поглощения в i -ой линии; ω_i – волновое число центра i -й линии.

Интегральное пропускание в спектральном диапазоне $\Delta\omega$ определяется по формуле

$$T = \int_{\Delta\omega} T(\omega) d\omega, \quad (14.86)$$

а среднее пропускание

$$T_{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} T(\omega) d\omega. \quad (14.87)$$

Очевидно, что среднее пропускание (14.87) будет зависеть от того, как линии располагаются внутри диапазона $\Delta\omega$. Интуитивно также ясно, что при большом числе N эта зависимость будет не сильной. Справедливость такого предположения легко проверить посредством *line-by-line* интегрирования для любой совокупности линий.

Этот факт позволяет дать вероятностную трактовку среднему пропусканию. Для этого необходимо сформулировать вероятность реализации именно данной конфигурации спектра линий внутри диапазона $\Delta\omega$, а затем оценить математическое ожидание среднего пропускания для всевозможных конфигураций.

Определим вероятность того, что i -я линия будет иметь интенсивность в диапазоне dS_i в окрестности S_i , полуширину – в диапазоне $d\gamma_i$ в окрестности γ_i , и будет находиться в пределах $d\omega_i$ вблизи ω_i следующим образом:

$$dP_i = dP_i(\omega_i, S_i, \gamma_i) = p_i(\omega_i) p_i(S_i) p_i(\gamma_i) d\omega_i dS_i d\gamma_i, \quad (14.88)$$

где предполагается статистическая независимость реализации местоположения, интенсивности и полуширины линии; $p(\omega_i)$, $p(S_i)$, $p(\gamma_i)$ – плотности вероятностей распределения местоположения, интенсивности и полуширины линии. Экспериментальное доказательство справедливости принципа статистической независимости и подробное его обсуждение выполнено в работах (Burch D.E, et al., 1956; Kaplan L.D., 1953; Godson W.L., 1955). Тогда математическое ожидание интегрального пропускания определяется следующим образом:

$$\bar{T} = \int_{\Delta\omega} \left\{ \int_{\Delta\omega_1} \int_{\Delta S_1} \int_{\Delta\gamma_1} \dots \int_{\Delta\omega_N} \int_{\Delta S_N} \int_{\Delta\gamma_N} \left[T(\omega) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \prod_{i=1}^N p_i(\omega_i) d\omega_i p_i(S_i) dS_i p_i(\gamma_i) d\gamma_i \right] \right\} d\omega. \quad (14.89)$$

Предположим, что вероятность реализации параметров i -й линии $(\omega_i, S_i, \gamma_i)$ не зависят от реализации параметров любой другой линии. Это позволяет упростить соотношение (14.89)

$$\bar{T} = \int_{\Delta\omega} \left[\prod_{i=1}^N \int_{\Delta\omega_i} \int_{\Delta S_i} \int_{\Delta\gamma_i} T(\omega, \omega_i, S_i, \gamma_i) p_i(\omega_i) p(S_i) p(\gamma_i) d\omega_i dS_i d\gamma_i \right] d\omega. \quad (14.90)$$

Здесь для наглядности в список аргументов спектрального пропускания в явном виде введена зависимость от ω_i, S_i и γ_i .

Среди линий, попавших в спектральный диапазон $\Delta\omega$, могут находиться как сильно различающиеся линии, так и линии с достаточно близкими параметрами. Введем условное деление линий на группы (общим числом G), в пределах которых вероятности реализации параметров линий могут быть описаны единым законом. При этом напомним, что в пределах любой выделенной группы от перестановки линий ничего не меняется, т.е. линии неразличимы (статистическая независимость параметров линий уже использовалась при переходе от (14.89) и (14.90)). Тогда (14.90) можно переписать в виде

$$\bar{T} = \int_{\Delta\omega} \left[\prod_{g=1}^G \prod_{i=1}^{N_g} \int_{\Delta\omega_i} \int_{\Delta S_i} \int_{\Delta\gamma_i} T(\omega, \omega_i, S_i, \gamma_i) p_i(\omega_i) p_i(S_i) p_i(\gamma_i) d\omega_i dS_i d\gamma_i \right] d\omega, \quad (14.91)$$

где N_g — число линий в g -й группе.

Дальнейший анализ (14.91) будет связан с конкретизацией вида плотностей вероятностей. Примем, что все спектральные диапазоны $\Delta\omega_i$ равны между собой $\Delta\omega_i = \Delta\omega$, $i = 1, 2, \dots, N_g$, при этом $\Delta\omega \leq \Delta\Omega$. Предположим, что все линии внутри $\Delta\Omega$ распределены равномерно, т.е. $p_i(\omega_i) = 1/\Delta\Omega$, тогда

$$\bar{T} = \int_{\Delta\omega} \prod_{g=1}^G \left[\frac{1}{\Delta\Omega} \int_{\Delta\Omega} \int_{\Delta S_g} \int_{\Delta\gamma_g} T(\omega, \omega', S', \gamma') p(S') p(\gamma') d\omega' dS' d\gamma' \right]^{N_g} d\omega, \quad (14.92)$$

где ΔS_g и $\Delta \gamma_g$ – диапазоны изменения соответствующих G параметров в пределах g -й группы.

Далее рассмотрим преобразование выражения в квадратных скобках

$$T_g(\omega) = \left[\frac{1}{\Delta\Omega} \int_{\Delta\Omega} \int_{\Delta S_g} \int_{\Delta\gamma_g} T(\omega, \omega', S', \gamma') p(S') p(\gamma') d\omega' dS' d\gamma' \right]^{N_g}. \quad (14.93)$$

Введем новую шкалу волновых чисел, связанную с центром спектрального диапазона $\Delta\Omega = \Omega_{\max} - \Omega_{\min}$

$$\nu = \omega - \Omega_0, \quad (14.94)$$

где $\Omega_0 = 0.5(\Omega_{\min} + \Omega_{\max})$; $\Omega_{\min}, \Omega_{\max}$ – границы спектрального диапазона.

Тогда $\nu_{\min} = -0.5\Delta\Omega, \nu_{\max} = +0.5\Delta\Omega.$ (14.95)

Если среднее расстояние между линиями в g -й группе определить как

$$\delta_g = \Delta\Omega / N_g, \quad (14.96)$$

то $\nu_{\min} = -0.5N_g\delta_g, \nu_{\max} = +0.5N_g\delta_g.$

Теперь (14.93) можно переписать в следующем виде :

$$T_g(\omega) = \left[\frac{1}{N_g} \int_{\Delta S_g} \int_{\Delta\gamma_g} \frac{1}{\delta_g} \int_{-(1/2)N_g\delta_g}^{+(1/2)N_g\delta_g} T(\omega, \omega', S', \gamma') \times \right. \\ \left. \times p(S') p(\gamma') d\nu' dS' d\gamma' \right]^{N_g} = \left\{ 1 - \frac{1}{N_g} \frac{1}{\delta_g} \times \right. \\ \left. \times \int_{-(1/2)N_g\delta_g}^{+(1/2)N_g\delta_g} \left[1 - \int_{\Delta S_g} \int_{\Delta\gamma_g} T(\omega, \omega', S', \gamma') p(S') p(\gamma') dS' d\gamma' \right] d\nu' \right\}^{N_g}. \quad (14.97)$$

При достаточно большом числе N_g в соотношении (14.97) можно перейти к экспоненте

$$T_g(v) = \exp\left(-\frac{W_g}{\delta_g}\right),$$

где

$$\begin{aligned} W_g(v) &= \int_{-\frac{1}{2}N_g\delta_g}^{+\frac{1}{2}N_g\delta_g} \left[1 - \int_{\Delta S_g} \int_{\Delta \gamma_g} T(\omega, \omega', S', \gamma') P(S') P(\gamma') dS' d\gamma' \right] dv \approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \int_{\Delta S_g} \int_{\Delta \gamma_g} T(\omega, \omega', S', \gamma') P(S') P(\gamma') dS' d\gamma' \right] dv'. \end{aligned} \quad (14.98)$$

Величина W_g называется эквивалентной шириной линий g -й группы. Переход от конечных пределов интегрирования в (14.98) к бесконечным можно осуществить, потребовав, чтобы $N_g \rightarrow \infty$. Однако достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\gamma \ll \Delta\Omega, \quad (14.99)$$

поэтому такой переход справедлив даже при $N_g = 1$.

Выше уже говорилось о том, что все линии в диапазоне $\Delta\Omega$ можно разделить на ряд групп по некоторым признакам. В простейшем случае предполагается близость полуширин линий в пределах группы и одинаковый вероятностный закон распределения интенсивностей линий:

$$p(\gamma') = \delta(\gamma' - \gamma_g), \quad (14.100)$$

$$p(S') = \frac{1}{S_g} \exp\left(-\frac{S'}{S_g}\right). \quad (14.101)$$

Соотношение (14.100) означает, что в пределах группы все линии имеют одинаковую полуширину. Соотношение (14.101) часто используется в теории статистического моделирования

вращательных линий молекулярного спектра и физически обосновано в (Пеннер С.С., 1963). С учетом (14.100) и (14.101) вместо (14.98) имеем

$$W_g(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \int_0^{\infty} T(\nu, \nu', S', \gamma_g) \frac{1}{S_g} \exp\left(-\frac{S'}{S_g}\right) dS' \right] d\nu'. \quad (14.102)$$

По определению сила линии S' является интегральным коэффициентом поглощения в этой линии

$$k(\nu, \nu', S', \gamma_g) = S' f(\nu, \nu', \gamma_g), \quad (14.103)$$

где функция контура линии удовлетворяет следующему условию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu, \nu', \gamma_g) = 1,$$

поэтому, подставив (14.103) в (14.102), получим

$$W_g(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{S_g} \exp\left(-\frac{S'}{S_g}\right) \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \exp\left(-S' f(\nu, \nu', \gamma_g) L\right) \right] dS' \right\} d\nu'. \quad (14.104)$$

Дальнейшее преобразование (14.104) возможно при детализации спектральной зависимости коэффициента поглощения в молекулярных линиях. В теории статистического моделирования спектральных линий (Гуди Р.М., 1966; Пеннер С.С., 1963) получены точные и аппроксимирующие выражения для эквивалентных ширин линий лоренцевского, доплеровского и фойгтовского контуров (см. также п.14.1). Например, для линии лоренцевского контура применительно к рассматриваемому случаю

$$k(\nu, \nu') = \frac{S' \gamma_g}{\pi \left[(\nu - \nu')^2 + \gamma_g^2 \right]}, \quad (14.105)$$

поэтому для эквивалентной ширины получается

$$W_g(v) = W_g = \frac{S_g L}{\sqrt{1 + (S_g L / \pi \gamma_g)}}. \quad (14.106)$$

Обратим внимание на важную особенность соотношения (14.106): эквивалентная ширина линий g -й группы не зависит от v , что является следствием использования бесконечных пределов интегрирования в (14.104) (или, что одно и то же, следствием использования условия (14.99)), наряду с предложением о равновероятности распределений линий в $\Delta\Omega$.

Таким образом, математическое ожидание интегрального пропускания в диапазоне $\Delta\omega$ приобретает следующий вид:

$$\bar{T} = \Delta\omega \prod_{g=1}^G \exp\left(-\frac{W_g}{\delta_g}\right). \quad (14.107)$$

Следовательно, среднее пропускание в любом диапазоне $\Delta\omega \leq \Delta\Omega$ не зависит от волнового числа

$$\bar{T}_{\Delta\omega} = \prod_{g=1}^G \exp\left(-\frac{W_g}{\delta_g}\right) = \prod_{g=1}^G T_g. \quad (14.108)$$

В данной формулировке статистической модели содержится большое разнообразие статистических моделей: от простой статистической модели ($G=1$) до обобщенной статистической модели ($G=N$) наложения линий различных серий (Гуди Р.М., 1966). Условие $G=N$ означает, что статистическая модель используется для одной линии в $\Delta\omega = \Delta\Omega$. Другими словами, удается определить среднее пропускание в спектральном диапазоне, содержащем всего одну линию, являющуюся членом спектральной серии со средним расстоянием линий $\Delta\Omega$.

14.9.2. Формулировка макростатистической модели для однородного оптического пути

Основная идея макростатистической модели состоит в том, что колебательная полоса (осредненная по вращательной структуре) рассматривается как изолированная линия поглощения. Для

того чтобы можно было воспользоваться статистической моделью, изложенной в предыдущем пункте, необходимо задать функцию профиля полосы поглощения $f(v, v', S', \gamma')$, где под интенсивностью S' и полушириной γ' теперь следует понимать параметры, задающие интегральный коэффициент поглощения в полосе и полуширину полосы. Необходимо также следить за выполнением условия (14.99), т.е. полуширина полосы должна быть много меньше, чем размер спектрального диапазона $\Delta\Omega$.

В настоящей работе рассматривается аппроксимация функции профиля колебательной полосы, предложенная Эдвардсом (Edwards D.K., 1976):

$$\kappa(v, v') = \frac{C_1}{C_3} \exp\left[-\frac{|v - v'|}{C_3}\right], \quad (14.109)$$

где v' – центр полосы поглощения; C_1 и C_3 – параметры, определяющие интенсивность и полуширину полосы. Положим $v' = 0$, тогда

$$S = 2 \int_0^{\infty} \frac{C_1}{C_3} \exp\left(-\frac{v}{C_3}\right) dv = 2C_1.$$

Вид аппроксимации (14.109) позволяет принять, что $\gamma_g = C_3$, тогда

$$\kappa(v, v') = \frac{S'}{2\gamma_g} \exp\left[-\frac{|v - v'|}{\gamma_g}\right]. \quad (14.110)$$

Если предположить, что плотность вероятности распределения интенсивностей колебательных полос имеет такой же вид, как и для вращательных линий в колебательной полосе, т.е.

$$P(S') = \frac{1}{S_g} \exp\left(-\frac{S'}{S_g}\right),$$

то для нахождения эквивалентной ширины остается вычислить интеграл (14.104), подставив в него

$$f(v, v', \gamma_g) = \frac{1}{2\gamma_g} \exp \left[-\frac{|v - v'|}{\gamma_g} \right].$$

В результате получается

$$W_g = 2\gamma_g \ln \left(1 + \frac{S_g L}{2\gamma_g} \right). \quad (14.111)$$

Таким образом, среднее пропускание спектрального диапазона $\Delta\omega$, содержащего колебательные молекулярные полосы, может быть рассчитано по формуле

$$\bar{T}_{\Delta\omega} = \prod_{g=1}^G \exp \left(-\frac{W_g}{\Delta\omega} \right), \quad (14.112)$$

где эквивалентная ширина g -ой колебательной полосы W_g рассчитывается по формуле (14.111), а функции C_1 и C_3 из аппроксимационных формул Эдвардса. Аналогичные расчетные соотношения можно получить для других аппроксимационных формул поглощения в полосах молекул.

14.9.3. Формулировка макростатистической модели для неоднородного оптического пути

Для расчета среднего в $\Delta\omega$ пропускания неоднородного оптического пути используется метод Кертиса – Годсона. Суть этого метода состоит во введении для каждой линии (или каждой полосы) осредненных по оптическому пути параметров: средней интенсивности линии \bar{S}_g и средней полуширины $\bar{\gamma}_g$.

Введение осредненных параметров \bar{S}_g и $\bar{\gamma}_g$ фактически означает переход к рассмотрению некоторого эффективного однородного оптического пути. Для того чтобы найти осредненные параметры необходимо, как это и было предложено Кертисом и Годсоном, интегральное поглощение (или, что одно и то же, эквивалентную ширину) эффективного однородного оптического пути приравнять интегральному поглощению истинного неоднородно-

го пути в двух предельных случаях: в случае оптически тонкого и оптически толстого слоя.

Повторим получение расчетных соотношений Кертиса—Годсона, рассмотренных в п. 14.3, применительно к изолированной колебательной полосе. Запишем точное выражение для эквивалентной ширины в следующем виде:

$$\begin{aligned} W_T &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 - \exp \left[- \int_L \kappa(\nu, S(x), \gamma(x)) dx \right] \right\} d\nu = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \exp \left[- \int_L \kappa(\nu, S(x), \gamma(x)) dx \right] \right\} d\nu. \end{aligned} \quad (14.113)$$

Тогда, для эффективного однородного слоя имеем

$$\bar{W} = 2 \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \exp \left[- \kappa(\nu, \bar{S}, \bar{\gamma}) L \right] \right\} d\nu. \quad (14.114)$$

И в том, и в другом случае, волновое число отсчитывается от центра полосы.

Для нахождения осредненных величин \bar{S} и $\bar{\gamma}$ потребуем выполнения условия $W_T = \bar{W}$, или

$$\int_0^{\infty} \exp \left[- \kappa(\nu, \bar{S}, \bar{\gamma}) L \right] d\nu = \int_0^{\infty} \exp \left[- \int_L \kappa(\nu, S(x), \gamma(x)) dx \right] d\nu. \quad (14.115)$$

Очевидно, что из этого соотношения можно определить искомые величины лишь приближенно, для чего и рассматривается два противоположных приближения: оптически тонкой ($\kappa(\nu, \bar{S}, \bar{\gamma}) L \ll 1$) и оптически толстой ($\kappa(\nu, \bar{S}, \bar{\gamma}) L \gg 1$) среды. Эквивалентная формулировка этих приближений выглядит следующим образом:

$$\int_L \kappa[\nu, S(x), \gamma(x)] dx \ll 1 \quad \text{для любого } \nu,$$

$$\text{и} \quad \int_L \kappa[\nu, S(x), \gamma(x)] dx \gg 1 \quad \text{при } \nu < \nu_1.$$

Смысл последнего неравенства состоит в том, что обязательно найдется волновое число $\nu_1 \gg \max\{\gamma(x)\}$, при котором оптическая толщина среды станет меньше единицы. В этом случае перенос излучения будет иметь место только в далеких крыльях полос ($\nu > \nu_1$).

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} \left\{ \exp[-\kappa(\nu, \bar{S}, \bar{\gamma})L] - \exp\left[-\int_L \kappa(\nu, S(x), \gamma(x)) dx\right] \right\} d\nu = 0. \quad (14.116)$$

В случае оптически тонкого оптического пути получаем

$$L \int_0^{\infty} \kappa(\nu, \bar{S}, \bar{\gamma}) d\nu = \int_L dx \int_0^{\infty} \kappa(\nu, S(x), \gamma(x)) d\nu$$

или по определению интенсивности

$$\bar{S} = \frac{1}{L} \int_L S(x) dx. \quad (14.117)$$

В случае оптически толстой среды при $\nu < \nu_1$ будет наблюдаться полное поглощение излучения, а значит, обе экспоненты в (14.116) практически равны нулю и приближенно можно записать

$$\int_{\nu_1}^{\infty} \left\{ \exp[-\kappa(\nu, \bar{S}, \bar{\gamma})L] - \exp\left[-\int_L \kappa(\nu, S(x), \gamma(x)) dx\right] \right\} d\nu = 0. \quad (14.118)$$

Для некоторых видов функции контура линии, вместо (14.118) можно потребовать, чтобы подынтегральное выражение равнялось нулю при любом волновом числе, а именно

$$\exp[-\kappa(\nu, \bar{S}, \bar{\gamma})L] = \exp\left[-\int_L \kappa(\nu, S(x), \gamma(x)) dx\right]$$

или
$$\kappa(\nu, \bar{S}, \bar{\gamma}) = \frac{1}{L} \int_L \kappa(\nu, S(x), \gamma(x)) dx.$$

Например, для линии лоренцевского контура получается (с учетом $\nu_1 \gg \max\{\gamma(x)\}$) хорошо известное соотношение

$$\bar{S}\bar{\gamma} = \frac{1}{L} \int_L S(x) \gamma(x) dx. \quad (14.119)$$

Несколько сложнее обстоит дело с экспоненциальным контуром линии (14.110). Здесь не удастся приравнять нулю подинтегральную функцию. Поэтому при получении соотношения для средней полуширины приходится использовать дополнительные приближения.

Интеграл (14.118) можно представить в следующем виде:

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} \left\{ \exp[-\kappa(\nu, \bar{S}, \bar{\gamma})L] - \exp\left[-\int_L \kappa(\nu, S(x), \gamma(x)) dx\right] \right\} d\nu = 0, \quad (14.120)$$

где ν_2 – волновое число, при котором экспоненты в (14.120) при расчетах на компьютере становятся равными «машинному» нулю в силу экспоненциального уменьшения коэффициента поглощения при больших ν . Воспользовавшись теоремой о среднем, можно утверждать, что подинтегральное выражение будет равно нулю хотя бы в одной точке ν^* спектрального диапазона $[\nu_1, \nu_2]$, т.е.

$$\kappa(\nu^*, \bar{S}, \bar{\gamma}) = \frac{1}{L} \int_L \kappa(\nu^*, S(x), \gamma(x)) dx$$

или
$$\frac{\bar{S}}{2\bar{\gamma}} \exp\left(-\frac{\nu^*}{\bar{\gamma}}\right) = \frac{1}{L} \int_L \frac{S(x)}{2\gamma(x)} \exp\left(-\frac{\nu^*}{\gamma(x)}\right) dx.$$

Допустим, что функцию $\gamma(x)$ в показателе экспоненты можно заменить средней величиной $\bar{\gamma}$, тогда получим приближенное соотношение для средней полуширины

$$\frac{1}{\bar{\gamma}} = \frac{1}{\bar{S}L} \int_L \frac{S(x)}{\gamma(x)} dx. \quad (14.121)$$

Соотношения (14.111), (14.112), (14.117), (14.121) составляют макростатистическую модель поглощательной (пропускательной) способности однородных и неоднородных слоев молекулярного

газа, учитывающую колебательную структуру спектра. В следующем разделе будет рассмотрен способ применения макростатистической модели при расчете переноса излучения в плоских неоднородных слоях газа и выполнена оценка точности этой модели.

14.9.4. Расчет переноса излучения методом полумоментов совместно с макростатистической моделью

Цель настоящего раздела – показать, как формулы макростатистической модели можно применять в расчетах переноса селективного теплового излучения в плоских неоднородных слоях горячих газов. Для этого опять воспользуемся методом полумоментов (см. п. 14.6).

За основу возьмем уравнение переноса излучения следующего вида:

$$\frac{\partial J_{\omega}}{\partial s} = \kappa_{\omega} (J_{b,\omega} - J_{\omega}), \quad (14.122)$$

где J_{ω} , $J_{b\omega}$ – спектральная интенсивность излучения среды и абсолютно черного тела; κ_{ω} – спектральный объемный коэффициент поглощения; S – направление распределения излучения.

В п. 14.6 было показано, что уравнение (14.122) может быть аппроксимировано приблизительно эквивалентной системой дифференциальных уравнений относительно спектральных полумоментных характеристик $M_{n,\omega}^{\pm}$

$$\frac{dM_{n+1,\omega}^{+}}{d\tau_{\omega}} = -M_{n,\omega}^{+} + \frac{2\pi}{n+1} J_{b,\omega}, \quad (14.123)$$

$$\frac{dM_{n+1,\omega}^{-}}{d\tau_{\omega}} = -M_{n,\omega}^{-} + \frac{2\pi(-1)^n}{n+1} J_{b,\omega}, \quad (14.124)$$

где
$$M_{n,\omega}^{+} = 2\pi \int_0^1 J_{\omega}^{+} \mu^n d\mu, \quad M_{n,\omega}^{-} = 2\pi(-1)^n \int_0^1 J_{\omega}^{-} \mu^n d\mu, \quad (14.125)$$

$$J_{\omega} = \begin{cases} J_{\omega}^{+}, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ J_{\omega}^{-}, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \quad \mu = \cos \theta, \quad d\tau_{\omega} = \kappa_{\omega} dx,$$

θ – угол между направлением распространения излучения и осью x (см. рис. 14.1).

Допустим, что на внешние границы слоя падает излучение, которое характеризуется спектральной интенсивностью J_{ω}^{\pm}

$$x = 0, J_{\omega}(\mu, x = 0) = J_{\omega}^{+}(x = 0), \quad \mu \in [0, 1],$$

$$x = H, J_{\omega}(\mu, x = H) = J_{\omega}^{-}(x = H), \quad \mu \in [-1, 0].$$

Для того чтобы ограничить число решаемых уравнений в системе (14.123 – 14.124), необходимо использовать какое-либо замыкающее условие, положив все полумоментные функции, начиная с некоторого номера, равными нулю. Такое замыкающее условие можно получить, аппроксимируя угловую зависимость интенсивности конечным рядом по косинусам угла θ . Проинтегрировав этот ряд по двум полусферическим углам (в диапазоне $0 \leq \theta \leq \pi/2$ и $\pi/2 < \theta \leq \pi$) с разными весовыми функциями μ^n , можно получить следующие замыкающие соотношения:

$$M_{n,\omega}^{+}(\tau_{\omega}) = \sum_{j=1}^N 2\pi \frac{a_j^{+}(\tau_{\omega})}{N - j + n + 1}, \quad (14.126)$$

$$M_{n,\omega}^{-}(\tau_{\omega}) = \sum_{j=1}^N 2\pi \frac{(-1)^{N-j+n} a_j^{-}(\tau_{\omega})}{N - j + n + 1}, \quad (14.127)$$

где $a_j^{+}(\tau_{\omega})$ и $a_j^{-}(\tau_{\omega})$ коэффициенты разложения. Исключив их из системы (14.123) – (14.124), можно найти связь между полумоментными характеристиками

$$M_{2,\omega}^{+} = -\frac{1}{6} M_{0,\omega}^{+} + M_{1,\omega}^{+}, \quad M_{2,\omega}^{-} = -\frac{1}{6} M_{0,\omega}^{-} - M_{1,\omega}^{-}.$$

В первом приближении метода полумоментов ($N=2$, $n=0,1$) система уравнений (14.123–14.124) имеет следующее решение:

$$M_{0,\omega}^+(x) = \sum_{m=1}^2 \beta_m \int_0^x I_{b,\omega}(x') \kappa_\omega(x') \exp \left[-\beta_m \int_{x'}^x \kappa_\omega(x'') dx'' \right] dx' + \\ + \sum_{m=1}^2 \beta_m C_m^+ \exp \left[-\beta_m \int_0^x \kappa_\omega(x') dx' \right], \quad (14.128)$$

$$M_{1,\omega}^+(x) = \sum_{m=1}^2 \int_0^x I_{b,\omega}(x') \kappa_\omega(x') \exp \left[-\beta_m \int_{x'}^x \kappa_\omega(x'') dx'' \right] dx' + \\ + \sum_{m=1}^2 C_m^+ \exp \left[-\beta_m \int_0^x \kappa_\omega(x') dx' \right], \quad (14.129)$$

$$M_{0,\omega}^-(x) = \sum_{m=1}^2 \beta_m \int_x^H I_{b,\omega}(x') \kappa_\omega(x') \exp \left[-\beta_m \int_x^{x'} \kappa_\omega(x'') dx'' \right] dx' - \\ - \sum_{m=1}^2 \beta_m C_m^- \exp \left[-\beta_m \int_x^H \kappa_\omega(x') dx' \right], \quad (14.130)$$

$$M_{1,\omega}^-(x) = - \sum_{m=1}^2 \int_x^H I_{b,\omega}(x') \kappa_\omega(x') \exp \left[-\beta_m \int_x^{x'} \kappa_\omega(x'') dx'' \right] dx' + \\ + \sum_{m=1}^2 C_m^- \exp \left[-\beta_m \int_x^H \kappa_\omega(x') dx' \right], \quad (14.131)$$

где $I_{b,\omega} = \pi J_{b,\omega}(x)$, $\beta_1 = 3 - \sqrt{3}$, $\beta_2 = 3 + \sqrt{3}$

$$C_1^+ = - \frac{F_0^+ - \beta_2 F_1^+}{\beta_2 - \beta_1}, \quad C_2^+ = \frac{F_0^+ - \beta_1 F_1^+}{\beta_2 - \beta_1},$$

$$C_1^- = \frac{F_0^- + \beta_2 F_1^-}{\beta_2 - \beta_1}, \quad C_2^- = -\frac{F_0^- + \beta_1 F_1^-}{\beta_2 - \beta_1},$$

$$F_0^+ = 2\pi \int_0^1 J_\omega^+(x=0) d\mu, \quad F_1^+ = 2\pi \int_0^1 J_\omega^+(x=0) \mu d\mu,$$

$$F_0^- = 2\pi \int_0^1 J_\omega^-(x=H) d\mu, \quad F_1^- = 2\pi \int_0^1 J_\omega^-(x=H) \mu d\mu.$$

Теперь найдем интегральные полумоментные характеристики в спектральном диапазоне $\Delta\omega$. Вычисление для четырех полумоментных функций идентичны, поэтому получим требуемое соотношение для $M_{1,\omega}^+(x)$, т.е. для односторонней плотности потока излучения.

Проинтегрируем (14.129) по ω в пределах $\Delta\omega$

$$\begin{aligned} M_{1,\Delta\omega}^+(x) &= \int_{\Delta\omega} M_{1,\omega}^+(x) d\omega = \\ &= \sum_{m=1}^2 \int_0^x \int_{\Delta\omega} I_{b,\omega}(x') \kappa_\omega(x') \exp\left[-\beta_m \int_{x'}^x \kappa_\omega(x'') dx''\right] d\omega dx' + \\ &+ \sum_{m=1}^2 \int_{\Delta\omega} C_m^+ \exp\left[-\beta_m \int_0^x \kappa_\omega(x') dx'\right] d\omega. \end{aligned} \quad (14.132)$$

Рассмотрим преобразование интеграла, отвечающего собственному излучению среды:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^x \int_{\Delta\omega} I_{b,\omega}(x') \kappa_\omega(x') \exp\left[-\beta_m \int_{x'}^x \kappa_\omega(x'') dx''\right] d\omega dx' = \\ &= - \int_0^x \bar{I}_{b,\omega}(x') \frac{1}{\beta_m} \frac{dW_m(x',x)}{dx'} dx', \end{aligned} \quad (14.133)$$

где
$$W_m(x',x) = \int_{\Delta\omega} \left\{ 1 - \exp\left[-\beta_m \int_{x'}^x \kappa_\omega(x'') dx''\right] \right\} d\omega, \quad (14.134)$$

$$\bar{I}_{b,\omega}(x) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} I_{b,\omega}(x) d\omega.$$

При расчете интеграла I_1 на компьютере удобно использовать следующую формулу:

$$I_1 = -\frac{1}{\beta_m} \sum_{i=1}^{i=f-1} \bar{I}_{b,\omega}(x_i) [W_m(x_{i+1}, x_f) - W_m(x_i, x_f)], \quad (14.135)$$

где f – номер расчетной точки, в которой ищется решение.

Представим коэффициент поглощения $\kappa_\omega(x)$ в виде суммы коэффициентов поглощения в линиях $\kappa_\omega^l(x)$ и в непрерывном спектре $\kappa_\omega^c(x)$, т.е. воспользуемся комбинированной моделью

$$\kappa_\omega(x) = \kappa_\omega^c(x) + \kappa_\omega^l(x).$$

Считается, что $\kappa_\omega^c(x) = \kappa^c(x)$, т.е. не зависит от волнового числа в пределах $\Delta\omega$. Тогда выражение для эквивалентной ширины (14.134) можно представить в следующем виде:

$$W_m(x_i, x_f) = \left\{ 1 - \exp \left[-\beta_m \int_{x_i}^{x_f} \kappa_\omega^c(x') dx' \right] \right\} \Delta\omega + \exp \left[-\beta_m \int_{x_i}^{x_f} \kappa_\omega^c(x') dx' \right] W_m^*(x_i, x_f), \quad (14.136)$$

$$W_m^*(x_i, x_f) = \int_{\Delta\omega} \left\{ 1 - \exp \left[-\beta_m \int_{x_i}^{x_f} \kappa_\omega^l(x') dx' \right] \right\} d\omega. \quad (14.137)$$

Для расчета эквивалентной ширины линий $W_m^*(x_i, x_f)$ может быть применена макростатистическая модель, построенная в предыдущем разделе:

$$W_m^*(x_i, x_f) = \sum_{g=1}^G W_{g,m}^*(x_i, x_f), \quad (14.138)$$

$$\text{где} \quad W_{g,m}^*(x_i, x_f) = 2\gamma_g \ln \left(1 + \beta_m \frac{S_g L}{2\gamma_g} \right), \quad (14.139)$$

G – число колебательных полос, учитываемых в расчете. Средние для эффективного однородного слоя $[x_i, x_f]$ интегральный коэффициент поглощения S_g и полуширина γ_g находятся с использованием метода Кертиса – Годсона.

Рассмотрим преобразование интеграла, отвечающего вкладу внешнего излучения, падающего на плоский слой. Предположим, что интенсивность внешнего излучения слабо изменяется по спектру в пределах $\Delta\omega$, так что коэффициенты c_m^\pm считаем независимыми от волнового числа. Тогда

$$I_2 = \int_{\Delta\omega} \exp \left[-\beta_m \int_0^{x_f} \kappa_\omega(x') dx' \right] d\omega.$$

Воспользовавшись комбинированной моделью спектра, получим

$$I_2 = \exp \left[-\beta_m \int_0^{x_f} \kappa_\omega^c(x') dx' \right] \int_{\Delta\omega} \exp \left[-\beta_m \int_0^{x_f} \kappa_\omega^l(x') dx' \right] d\omega.$$

В этой формуле интеграл по волновому числу представляет собой интегральное пропускание спектрального диапазона $\Delta\omega$, т.е. в соответствие с макростатистической моделью

$$T(x_1 = 0, x_f) = \Delta\omega \prod_{g=1}^G \exp \left[-\frac{W_{g,m}^*(x_1 = 0, x_f)}{\Delta\omega} \right],$$

тогда

$$I_2 = \exp \left[-\beta_m \int_0^{x_f} \kappa_\omega^c(x') dx' \right] \prod_{g=1}^G \exp \left[-\frac{W_{g,m}^*(x_1 = 0, x_f)}{\Delta\omega} \right]. \quad (14.140)$$

Таким образом, расчетная формула для определения полу-моментной характеристики $M_{1,\Delta\omega}^+(x_f)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 M_{1,\Delta\omega}^+(x_f) = & \sum_{m=1}^2 \frac{1}{\beta_m} \sum_{i=1}^{i=f-1} \bar{I}_{b,\omega}(x_i) [W_m(x_{i+1}, x_f) - W_m(x_i, x_f)] + \\
 & + \sum_{m=1}^2 \exp \left[-\beta_m \int_0^{x_f} \kappa_{\omega}^c(x') dx' \right] \times \\
 & \times \prod_{g=1}^G \exp \left[-\frac{W_{g,m}(x_1=0, x_f)}{\Delta\omega} \right] \Delta\omega, \quad (14.141)
 \end{aligned}$$

где эквивалентные ширины рассчитываются по формуле (14.139).

14.9.5. Результаты расчетов интегральных радиационных потоков в плоских неоднородных слоях газов, содержащих молекулы H_2O и CO_2

Предварительная оценка точности приближенного метода расчета осредненных радиационных характеристик была выполнена при расчете полусферической излучательной способности однородного плоского слоя, толщиной $H=1$ см, содержащего среду, поглощающую и испускающую излучение в спектральных линиях лоренцевского профиля при температуре $T=5000$ К. Коэффициент поглощения в непрерывном спектре полагался равным $\kappa^c = 0.0001 \text{ см}^{-1}$. В спектральном диапазоне $\Delta\omega = 3600 \div 3620 \text{ см}^{-1}$ располагалось 5 одинаковых линий, коэффициент поглощения в центре которых, изменялся в диапазоне $\kappa^l(\omega_0) = 0.1 \div 10 \text{ см}^{-1}$, т.е. оптическая толщина слоя в центре линий составляла $\tau_0 = \kappa^l(\omega_0)H = 0.1 \div 10$. Полуширина линий изменялась в диапазоне $\gamma = 0.05 \div 0.5 \text{ см}^{-1}$. Результаты расчетов полусферической излучательной способности

$$\varepsilon = \frac{M_1^+(x=H)}{\pi J_b} \quad (14.142)$$

представлены в табл. 14.1.

Расчеты выполнялись два раза при каждом значении оптической толщины τ_0 и полуширины линий. Результаты, полученные

с использованием алгоритма *line-by-line* интегрирования, могут быть приняты за точные (погрешность 1-го приближения метода полумоментов по сравнению с точным решением в интегро-экспоненциальных функциях не превосходит 2%). Спектральный диапазон $\Delta\omega$ делился на 1000 элементарных спектральных участков шириной $\Delta\omega_i = 0.02 \text{ см}^{-1}$, в центре каждого из которых ω_i определялся спектральный коэффициент поглощения

$$\kappa'_{\omega}(\omega_i) = \sum_{n=1}^{N_n} \frac{S\gamma}{\pi \left[(\omega_i - \omega_n)^2 + \gamma^2 \right]}, \quad (14.143)$$

где $S = \pi\tau_0/H$; ω_n – волновое число центра n -линий, которое определялось по следующей формуле:

$$\omega_n = \omega_{\min} - h_{\omega} \left(n - \frac{1}{2} \right), \quad h_{\omega} = \frac{\Delta\omega}{N_n}, \quad (14.144)$$

N_n – число линий в полосе (в данном случае $N_n = 5$); ω_{\min} – нижняя граница спектрального диапазона. В пределах $\Delta\omega_i$ коэффициент поглощения $\kappa'(\omega_i)$ полагался постоянным.

Таблица 14.1

**Полусферическая излучательная способность плоского слоя
в пяти линиях лоренцевского профиля**

$\gamma, \text{см}^{-1}$	<i>Line-by-line</i> расчеты	Статистическая модель
	$\tau_0 = 0.1$	
0.05	0.0075	0.0073
0.1	0.0146	0.0142
0.5	0.0683	0.0677
$\tau_0 = 1.0$		
0.05	0.0487	0.0448
0.1	0.0961	0.0870
0.5	0.4140	0.3550
$\tau_0 = 10$		
0.05	0.1800	0.1650
0.1	0.3436	0.3000
0.5	0.9340	0.8120

В расчетах использовалась простая статистическая модель, согласно которой все линии в диапазоне $\Delta\omega$ включались в одну полосу, т.е. полагалось, что $G = 1$. Среднее расстояние между линиями равно

$$\delta_1 = \Delta\omega / N_n. \quad (14.145)$$

Расчеты по методу полумоментов проводились с использованием обоих алгоритмов на однородной сетке вдоль оси x с числом узлов $N_j = 100$.

Сравнение результатов расчетов, представленных в табл. 14.1 показывает, что погрешность приближенного метода не превосходит $\sim 15\%$ в широком диапазоне изменения определяющих параметров. Указанная погрешность является характерной для статистической модели несильно различающихся линий при расчетах поглощательной способности однородных слоев.

Макростатистическая модель колебательных полос молекул H_2O и CO_2 применялась при расчете переноса излучения в плоских неоднородных слоях. Распределение температуры и относительных мольных концентраций указанных молекул по толщине слоя задавалось в следующем виде:

$$T(x) = T_0 + (T_{\max} - T_0) \exp\left[-\left|\frac{x - x_c}{d_x}\right|^n\right], \quad (14.146)$$

$$x_k(x) = x_{k,0} + (x_{k,\max} - x_{k,0}) \exp\left[-\left|\frac{x - x_c}{d_x}\right|^n\right], \quad (14.147)$$

где T_{\max} , T_0 , $x_{k,\max}$, $x_{k,0}$ – наибольшее и наименьшее значение температуры и концентрации k -й компоненты; d_x , n – параметры, определяющие степень неоднородности исследуемого слоя.

На рис. 14.2 показано типичное распределение температуры и концентраций в плоском слое (для 2-го варианта расчета из табл. 14.2). Значения параметров, которые использовались в расчетных вариантах приведены в табл. 14.2. Общими для всех расчетов были следующие величины: $T_0 = 300$ К, $T_{\max} = 2500$ К, $x_{H_2O,0} = 0.01$, $x_{H_2O,\max} = 0.7$, $x_{CO_2,0} = 0.01$, $x_{CO_2,\max} = 0.3$.

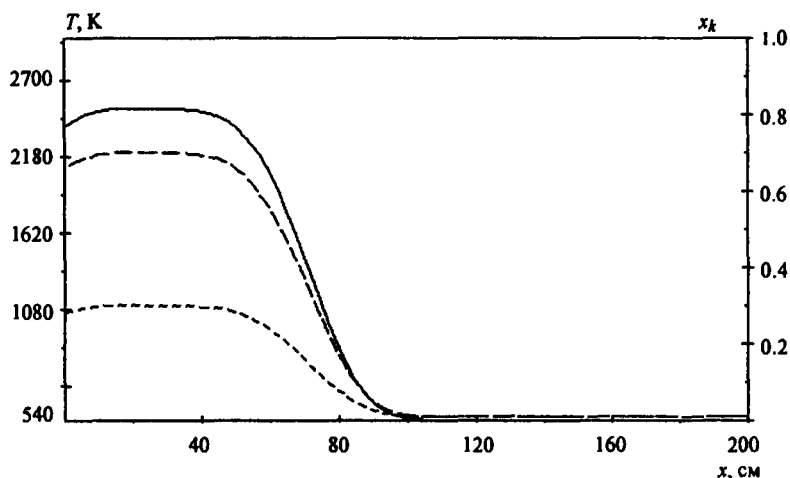


Рис. 14.2. Распределение температуры (сплошная кривая, шкала слева) относительных мольных концентраций паров воды (штриховая линия; шкала справа) и двуокси углерода (пунктирная линия; шкала справа)

Расчеты каждого варианта проводились два раза: с использованием алгоритма *line-by-line* интегрирования и макростатистической модели. В спектральном диапазоне $\Delta\Omega = 1000 + 10000 \text{ см}^{-1}$ учитывалось 4 колебательных полосы молекулы H_2O и 4 полосы молекулы CO_2 .

Таблица 14.2

Параметры, определяющие распределение температуры и концентраций в плоском слое

Параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
n	2	20	4
x_c , см	25	25	25
H , см	100	100	200
d_x , см	50	50	50

Использованные в расчетах параметры моделей колебательных полос, соответствующих классу экспоненциальных широкополосных моделей Эдвардса, были заимствованы из работы (Зигель Р. и др., 1975). Они приведены в табл. 14.3.

Таблица 14.3

Параметры моделей колебательных полос молекул H_2O и CO_2

g	H_2O			CO_2		
	ω_g , см^{-1}	$c_{1,g}$, $\text{м}^2/\text{кг}$	$c_{3,g}$, см^{-1}	ω_g , см^{-1}	$c_{1,g}$, $\text{м}^2/\text{кг}$	$c_{3,g}$, см^{-1}
1	1600	41.2	$52\sqrt{T/100}$	1060	$0.76F_1$	$12.4\sqrt{T/100}$
2	3750	23.3	$65\sqrt{T/100}$	2410	$0.76F_1$	$12.4\sqrt{T/100}$
3	5350	$3F_{011}$	$46\sqrt{T/100}$	3750	110	$11.5\sqrt{T/100}$
4	7250	$2.5F_{101}$	$46\sqrt{T/100}$	5200	$4F_2$	$24\sqrt{T/100}$

$$F_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \left[1 - \exp\left(-\frac{hc}{kT} \sum_{i=1}^3 \nu_i \omega_i\right) \right] \prod_{i=1}^3 \left[1 - \exp\left(-\frac{hc\omega_i}{kT}\right) \right]^{\nu_i},$$

$$\omega_1 = 3652 \text{ см}^{-1}, \quad \omega_2 = 1595 \text{ см}^{-1}, \quad \omega_3 = 3756 \text{ см}^{-1},$$

$$F_1(T) = \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{hc}{kT}(\omega_3 - \omega_1)\right) \right] \left[\exp\left(-\frac{hc}{kT}\omega_1\right) - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2hc}{kT}\omega_1\right) \right]}{\left[1 - \exp\left(-\frac{hc}{kT}\omega_1\right) \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{hc}{kT}\omega_3\right) \right]},$$

$$F_2(T) = \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{hc}{kT}(\omega_3 + \omega_1)\right) \right]}{\left[1 - \exp\left(-\frac{hc}{kT}\omega_1\right) \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{hc}{kT}\omega_3\right) \right]}$$

$$\omega_1 = 1351 \text{ см}^{-1}, \quad \omega_2 = 667 \text{ см}^{-1}, \quad \omega_3 = 2396 \text{ см}^{-1}.$$

В *line-by-line* вычислениях спектральный диапазон $\Delta\Omega$ разбивался на 450 элементарных спектральных участков $\Delta\omega_i$, в центре каждого из которых ω_i вычислялся суммарный коэффициент поглощения (осредненный по вращательной структуре)

$$\kappa(\omega_i) = 0.01 \sum_{g=1}^{G_{\text{H}_2\text{O}}} \frac{C_{1,g}}{C_{3,g}} \exp\left(-\frac{|\omega_i - \omega_g|}{C_{3,g}}\right) \rho_{\text{H}_2\text{O}} +$$

$$+0.01 \sum_{g=1}^{G_{\text{CO}_2}} \frac{C_{1,g}}{C_{3,g}} \exp\left(-\frac{|\omega_i - \omega_g|}{C_{3,g}}\right) \rho_{\text{CO}_2}, \quad (14.148)$$

где $G_{\text{H}_2\text{O}}$, G_{CO_2} – число колебательных полос, учитываемых для молекул H_2O и CO_2 соответственно; $\rho_{\text{H}_2\text{O}}$, ρ_{CO_2} – плотность молекул H_2O и CO_2 .

Давление в слое полагалось постоянным и равным $p = 1$ атм, поэтому плотность k -й молекулярной компоненты (с молекулярным весом M_k) рассчитывалась по формуле

$$\rho_k = M_k x_k p \left(10^5 / 8314\right), \text{ кг/м}^3. \quad (1.149)$$

В пределах $\Delta\omega_i$ коэффициент поглощения полагался постоянным.

Спектральный коэффициент поглощения в двух точках внутри плоского слоя (для варианта 1, см. табл. 14.2), используемый в *line-by-line* расчетах показан на рис. 14.3.

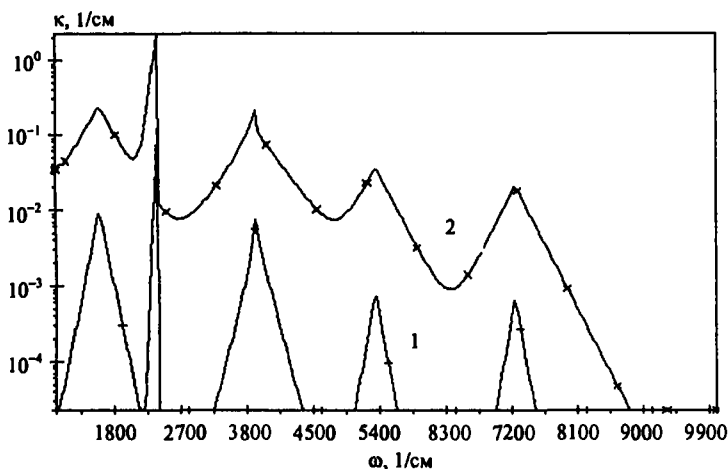


Рис. 14.3. Спектральный коэффициент поглощения осредненный по вращательной структуре в точках слоя с координатами $x = 0$ (1) и $x = H$ (2)

Варианты расчетов различались степенью неоднородности исследуемых слоев. Наименьшая неоднородность параметров газа в расчетной области задавалась в первом варианте, наибольшая –

во втором. В третьем варианте половина расчетной области занята холодным газом, что моделирует сильно неоднородные излучающие слои. В этом случае ширина колебательных полос в холодных слоях существенно ниже их ширины в горячих слоях. Естественно, что это же наблюдается и для отдельных вращательных линий. Распределения интегральных полумоментных функций в плоском слое показаны на рис. 14.4 для каждого из вариантов. Как и прежде, следует обратить внимание на знакопостоянство полумоментных характеристик радиационного переноса. M_1^+

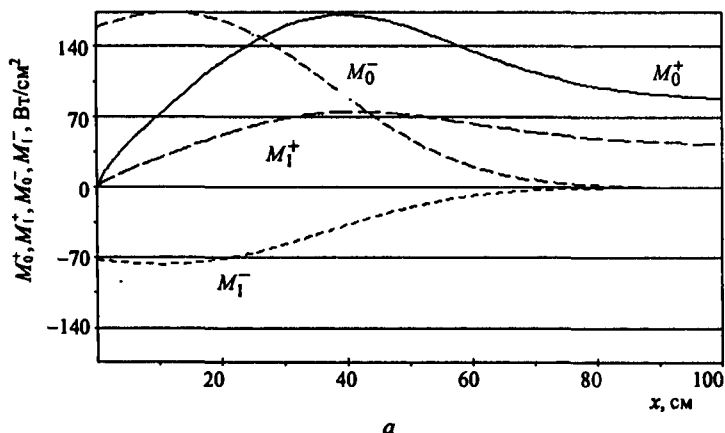


Рис. 14.4. Распределение интегральных полумоментных характеристик в плоском слое для расчетных вариантов: 1 - а, 2 - б, 3 - в. (Начало)

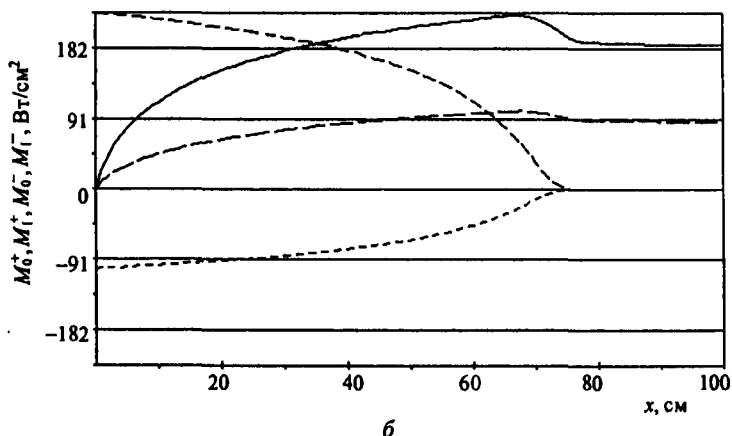


Рис. 14.4. (Продолжение)

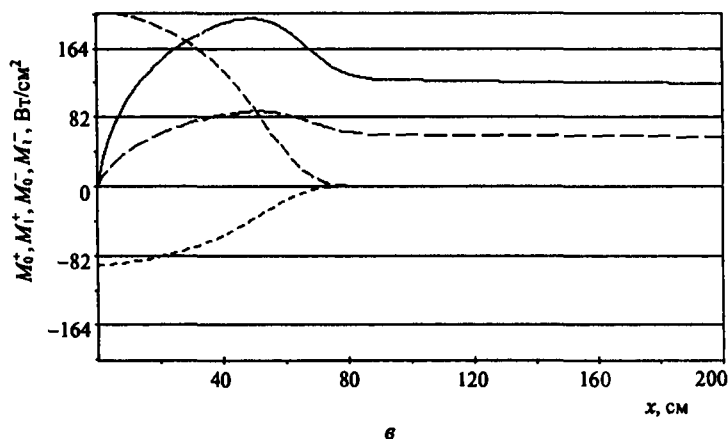


Рис. 14.4. (Окончание)

На рис. 14.5 показано распределение полного интегрального потока, полученного в *line-by-line* вычислении

$$W_T(x) = M_1^+(x) + M_1^-(x) \quad (14.150)$$

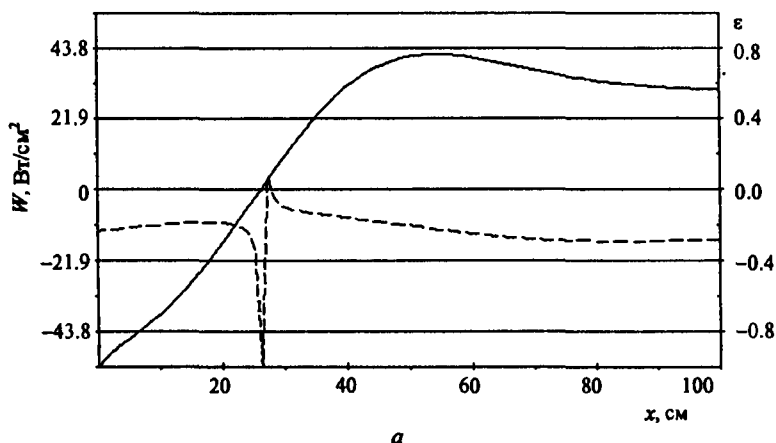


Рис. 14.5. Полный интегральный поток в слое (сплошная кривая; шкала слева) и погрешность его расчета с использованием макростатистической модели (штриховая кривая; шкала справа). Варианты 1 - а, 2 - б, 3 - в. (Начало)

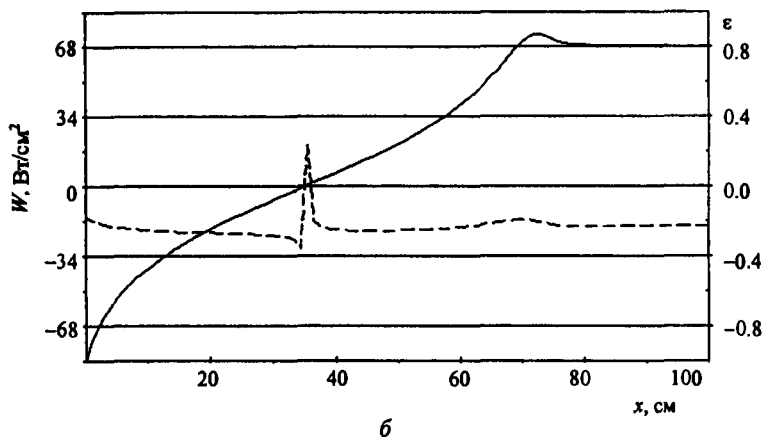


Рис. 14.5. (Продолжение)

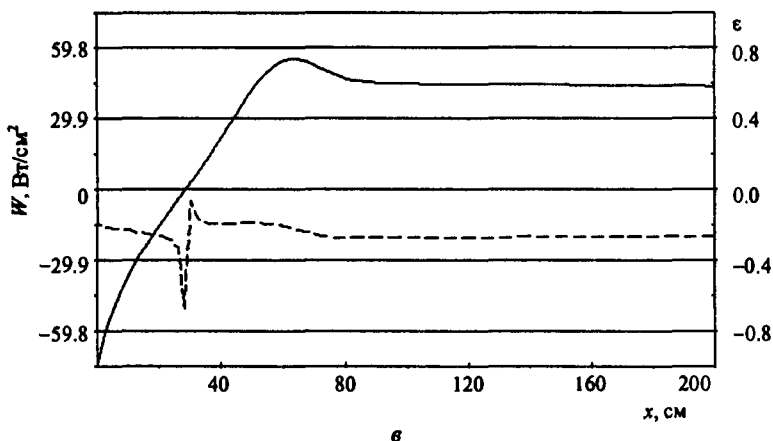


Рис. 14.5. (Окончание)

На этом же рисунке даны погрешности его расчета ($W_{\text{MSM}}(x)$) по макростатистической модели

$$\varepsilon = \frac{|W_T(x) - W_{\text{MSM}}(x)|}{|W_T(x)|}. \quad (14.151)$$

Отсюда видно, что уровень погрешности можно оценить величиной 30 %.

А на рис. 14.6 показано распределение дивергенции полного интегрального потока и погрешности ее расчета по макростатистической модели.

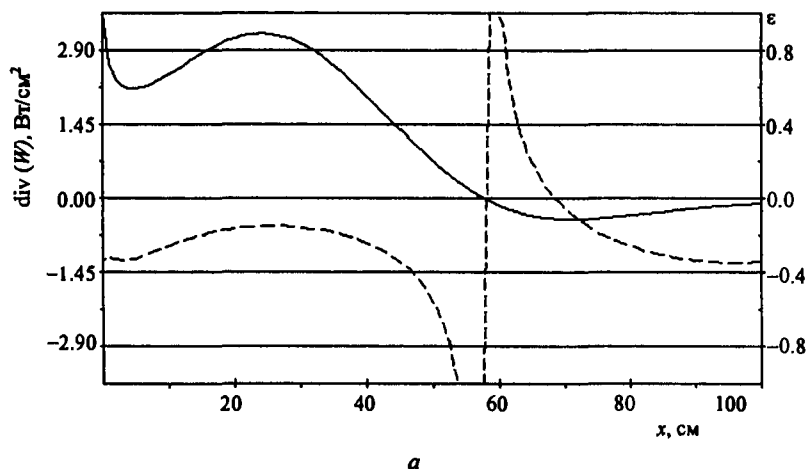


Рис. 14.6. Дивергенция полного интегрального потока в слое (сплошная кривая; шкала слева) и погрешность расчета дивергенции полного интегрального потока с использованием макростатистической модели (штриховая кривая; шкала справа). Варианты 1 - а, 2 - б, 3 - в. (Начало)

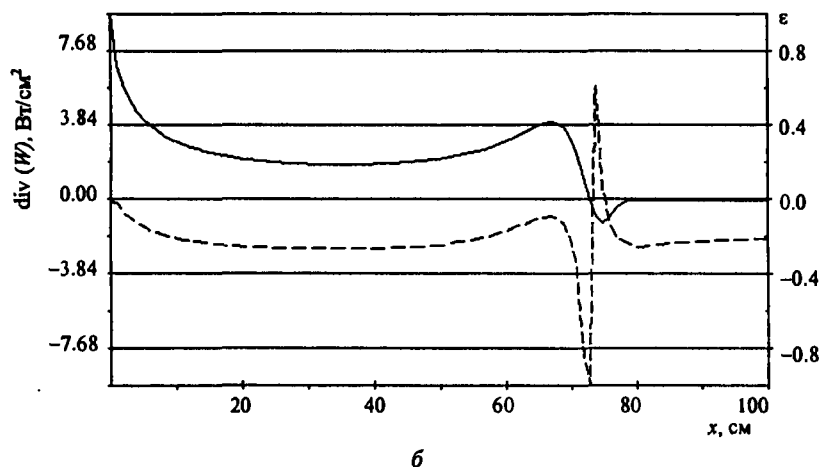


Рис. 14.6. (Продолжение)

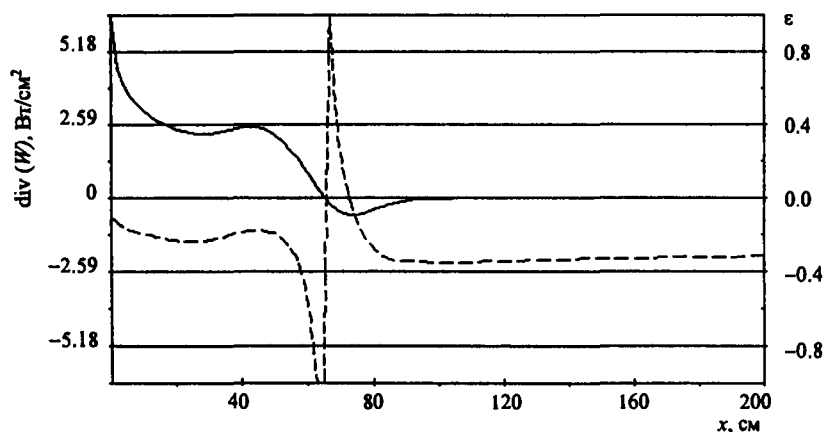


Рис. 14.6. (Окончание)

Поскольку по своему физическому смыслу дивергенция радиационного потока определяет объемную мощность тепловыделения, обусловленного переносом теплового излучения, то эта величина в первую очередь необходима для решения задач сопряженного радиационно-конвективного теплообмена.

И, наконец, на рис. 14.7 показано распределение спектральных радиационных потоков на границах плоского слоя, что позволяет при сопоставлении со спектральной зависимостью объемного коэффициента поглощения получить представление о том, в каких спектральных диапазонах слой излучает как абсолютно черное тело, а в каких диапазонах – излучение доходит от наиболее удаленных слоев объема.

Погрешность расчета полного интегрального потока и его дивергенция практически во всей расчетной области и для всех расчетных вариантов составляет величину $\sim 30\%$, что является вполне приемлемым для практики расчета теплообмена излучением. В отдельных очень узких участках эта погрешность может доходить до нескольких сот процентов, однако это наблюдается только в тех точках внутри слоя, где полный интегральный поток или его дивергенция близка к нулю, поэтому указанные погрешности не ухудшают в целом точность данного приближенного метода.

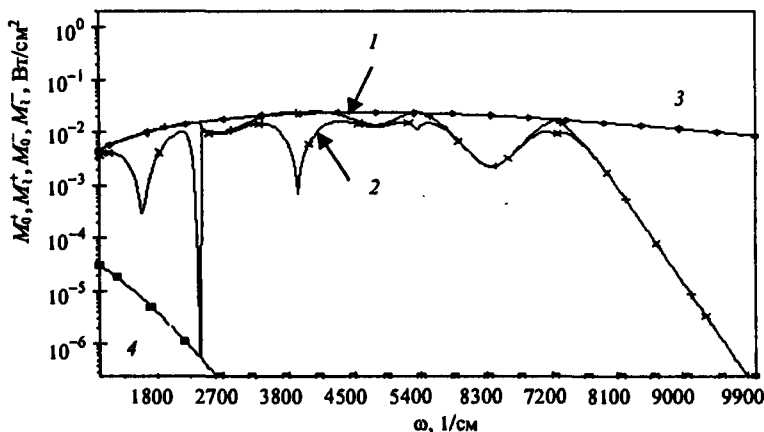


Рис. 14.7. Распределение спектральных односторонних радиационных потоков при $x = 0$ (M_1^- , кривая 1) и $x = H$ (M_1^+ , кривая 2), а также спектральной плотности потока излучения абсолютно черного тела при температуре в точках $x = 0$ (кривая 3) и $x = H$ (кривая 4)

Анализ расчетных данных позволяет сделать вывод об удовлетворительной точности макростатистической модели. Данная модель может быть рекомендована для проведения инженерных расчетов теплообмена излучения, а учитывая ее высокую экономичность – и для радиационно-газодинамических расчетов.

14.10. Расчет имитационными методами Монте-Карло переноса излучения с учетом вращательных линий молекулярного спектра

В предыдущих разделах рассмотрены способы применения статистических моделей спектральных линий совместно с методом дискретных направлений (Ray-tracing method) и методом полумоментов.

Дальнейшее развитие статистических моделей спектра состоит в их использовании совместно с имитационными методами Монте-Карло. Указанная комбинация методов представляется весьма перспективной, поскольку наиболее органично отражает статистическую природу процесса распространения теплового излучения.

Задача расчета переноса селективного теплового излучения в светорассеивающих средах с учетом линейчатой структуры спектра является одной из наиболее трудоемких в теории теплообмена излучением и прикладной вычислительной физики. Проблема селективности теплового излучения представляет значительный интерес не только для фундаментальных исследований, но и чрезвычайно важна в различных приложениях, таких, как построение вычислительных моделей теплообмена излучением в различных энергетических устройствах, разработка тепловой защиты спускаемых космических аппаратов, создание средств дистанционного обнаружения старта ракет и дистанционных методов экологической безопасности (Simmons F.S., 2000; Surzhikov S.T., et al., 2003).

Даже без учета светорассеяния задача расчета переноса селективного теплового излучения состоит в интегрировании уравнения переноса в десятках тысячах спектральных диапазонов, при этом характерная оптическая толщина среды τ_ω по спектру может меняться в миллионы раз от $\tau_\omega \ll 1$ (оптически тонкий слой) до $\tau_\omega \gg 1$ (оптически толстый слой). При расчете радиационного переноса в инфракрасной (ИК) области спектра $\Delta\omega \sim 500 + 10000 \text{ см}^{-1}$ оказываются важными следующие два масштаба спектральных диапазонов: характерный масштаб колебательной полосы $\Delta\omega_v \sim 200 + 500 \text{ см}^{-1}$ и характерный размер вращательной линии, который задается ее полушириной $\gamma \sim 0.01 + 1 \text{ см}^{-1}$. При учете вращательной структуры спектра необходимо проводить расчеты с шагом по волновому числу $\Delta\omega_r \sim 0.1\gamma$. Такие вычисления называются *line-by-line* (LBL), т.е. расчетами переноса селективного теплового излучения с учетом вращательной структуры спектра молекулярных линий. Если, исходя из физической постановки задачи, достаточно учесть лишь колебательную структуру спектра, усреднив коэффициенты поглощения и испускания по вращательной структуре, то спектральные расчеты можно проводить с шагом $\Delta\omega_g \sim 10 + 50 \text{ см}^{-1}$. Это так называемые многогрупповые спектральные расчеты без учета вращательной структуры. Величина $\Delta\omega_g$ должна быть не слишком малой, чтобы в этот диапазон попадало достаточное число вращательных линий, и не слишком

большой, чтобы при усреднении вращательной структуры спектра не слишком искажался контур колебательной полосы.

Заметим, что в подавляющем большинстве задач, возникающих при определении селективного теплового излучения в газах атмосферного давления вполне достаточно учитывать лишь колебательную структуру ИК-спектра. С понижением давления до десятых и тысячных долей атмосферы неучет вращательной структуры может привести к большим погрешностям. Итак, далее будем различать два типа спектральных расчетов: с учетом и без учета вращательной структуры.

Трудоемкость решения проблемы селективности существенно возрастает, если необходимо учитывать светорассеяние реальных сред (например, в топках паровых котлов, в струях продуктов сгорания ракетных двигателей твердого топлива – РДТТ) и проводить расчеты переноса излучения в объемах сложных геометрий. Одним из возможных путей решения данной проблемы является разработка приближенных методов, позволяющих с достаточной для практики точностью учитывать основные закономерности переноса теплового излучения с учетом линейчатой структуры спектра и процессов светорассеяния. Однако с каждым годом возрастает также актуальность совершенствования LBL-методов расчета, поскольку производительность современных вычислительных комплексов уже позволяет решать этими методами задачи практической важности.

В данном разделе проводится сравнительный анализ некоторых алгоритмов статистического моделирования переноса селективного теплового излучения, основанных на классе имитационных методов Монте-Карло (Ермаков С.М., 1971; Соболев И.М., 1973; Франк-Каменецкий А.Д., 1978; Ермаков С.М., Михайлов Г.А., 1982), развитых в работах (Суржиков С.Т., 1987, 1993, (в, г); Даладова Л.А. и др., 1990; Surzhikov S.T., et al., 1998) применительно к проблеме расчета спектральной направленной излучательной способности струй продуктов сгорания ракетных двигателей. Указанный анализ выполняется на примере определения полусферической степени черноты плоского и цилиндрического объемов, усредненной на спектральном диапазоне, содержащем

вращательные линии, а также на примере вычисления спектральной направленной излучательной способности модельной струи РДГТ с усреднением и без усреднения вращательной структуры. Будет показано как использовать следующие методы расчета: LBL-метод, гибридный метод статистического моделирования, метод усредненных коэффициентов, LBL-метод с малым числом моделируемых траекторий.

14.10.1. LBL-метод

Этот метод, является наиболее трудоемким, и его целесообразно применять, прежде всего, для получения эталонных решений. При использовании LBL-метода спектральный диапазон $\Delta\omega_g$, в пределах которого рассчитываются усредненные радиационные характеристики, делится, в свою очередь, на N_n спектральных диапазонов (групп) $\Delta\omega_n$, число которых должно быть достаточно большим для того, чтобы рассчитать контур каждой из учитываемых вращательных линий, по меньшей мере, в 10 точках. В любой спектральной точке $\omega_{0,n}$ диапазона $\Delta\omega_n$ (как правило – в его центре) рассчитывается спектральный коэффициент поглощения $\kappa(\omega)$, составными частями которого являются: коэффициент поглощения в непрерывном спектре газообразных компонентов смеси $\kappa^c(\omega_{0,n})$, коэффициент поглощения твердых и (или) жидких частиц $\kappa^p(\omega_{0,n})$, присутствующих в исследуемом объеме и спектральный коэффициент поглощения в спектре вращательных линий $\kappa^l(\omega_{0,n})$. При расчете коэффициента поглощения $\kappa^l(\omega_{0,n})$ необходимо учитывать все близлежащие вращательные линии, поскольку поглощение в их крыльях может быть весьма заметным

$$\kappa^l(\omega_{0,n}) = \sum_i^{N_l} \kappa_i^l(\omega_{0,n}, \omega_i). \quad (14.152)$$

Здесь $\kappa_i^l(\omega_{0,n}, \omega_i)$ – коэффициент поглощения в спектральной точке $\omega_{0,n}$, обусловленный вращательной линией, расположенной в точке ω_i . Число вращательных линий N_l , которые следует учесть в сумме (14.152), определяется условиями в газе и контуром линий (уширением и интенсивностью).

Напомним, что для вращательной линии лоренцевского контура имеем

$$\kappa_i^l(\omega_{0,n}, \omega_i) = \frac{S_i \gamma_{L,i}}{\pi \left[(\omega_{0,n} - \omega_i)^2 + \gamma_{L,i}^2 \right]}, \quad (14.153)$$

где S_i, γ_i – интенсивность и лоренцевская полуширина i -й вращательной линии.

При вычислениях можно задать фиксированную величину $\Delta\omega^* \sim 5 \div 10 \text{ см}^{-1}$ и в сумме (14.152) учитывать все линии, попавшие в спектральный диапазон $[\omega_{0,n} - 0.5\Delta\omega^*, \omega_{0,n} + 0.5\Delta\omega^*]$. Однако для получения эталонных решений такой алгоритм может оказаться не достаточно точным, что потребует использования более трудоемкого учета далеко лежащих от $\Delta\omega^*$ линий.

В пределах каждой спектральной группы $\Delta\omega_n$ моделирование траекторий фотонов выполняется с использованием имитационного метода Монте-Карло, как это обычно делается для серого газа (см. главу 10). Заметим, что использование вполне обоснованного для рассматриваемого класса задач допущения о линейности процесса переноса по отношению к энергии фотонов (независимость свойств среды от интенсивности излучения) позволяет моделировать относительно небольшое число траекторий ($N_f \sim 10^4 \div 10^5$), применяя полученные результаты к полному числу фотонов. Подчеркивая этот факт, далее будем использовать термин имитация траекторий групп фотонов. В рассматриваемом варианте LBL-метода общее число моделируемых траекторий для одного спектрального диапазона $\Delta\omega_g$ является весьма большим и оценивается величиной $N_{tot} = N_f N_n \sim 10^7 \div 10^8$.

14.10.2. Гибридный метод статистического моделирования

В данном случае за основу выбирается обычный имитационный метод Монте-Карло. Расчеты проводятся в пределах целого спектрального диапазона $\Delta\omega_g$ без его деления на поддиапазоны. Однако с использованием имитационного метода Монте-Карло

проводится моделирование не монохроматических групп фотонов, а имитация распространения групп фотонов, энергия которых определяется усреднением на всем спектральном диапазоне $\Delta\omega_g$. При этом усредненные энергетические характеристики групп фотонов для различных оптических путей находятся с использованием статистических моделей реальных линейчатых спектров и метода Кертиса–Годсона, позволяющего учесть неоднородность свойств среды вдоль траектории движения.

Отметим преимущества такого подхода: интегрирование по волновому числу в этом методе производится аналитически, и для выделенного спектрального диапазона $\Delta\omega_g$, содержащего сотни спектральных линий, достаточно решить практически монохроматическую задачу, т.е. один раз для всего спектрального диапазона. Таким образом, расчетная эффективность метода возрастает в $\sim N_n$ раз по сравнению с LBL-методом.

Для реализации этого метода на базе существующих программ расчета переноса излучения методом Монте-Карло достаточно модифицировать подпрограмму расчета длины свободного пробега фотонов и в очень незначительной степени геометрический модуль.

Тип рассчитываемых спектральных линий (атомные или молекулярные) не имеет принципиального значения, как и характер их расположения (регулярное или хаотическое), а также тип их контура (лоренцевский, доплеровский, фойгтовский). Все указанные особенности учитываются в рамках статистических моделей, которые можно использовать без каких либо ограничений.

В случае необходимости учета очень резкого изменения оптических свойств среды вдоль траектории фотона, вместо приближенной модели Кертиса–Годсона можно использовать любую другую модель, более адекватно учитывающую неоднородность среды.

Метод сохраняет главные преимущества имитационных методов Монте-Карло, связанные с возможностью решения задач для объемов сложных геометрий и учета многообразия физических процессов, в том числе неравновесности излучения.

В качестве основных недостатков следует отметить неустрашимую погрешность статистических моделей полос, что не позволяет выполнить асимптотический переход к LBL-интегрированию, и необходимость введения в модель эмпирических параметров, учитывающих вращательную структуру анализируемого спектра.

Расчет по гибриднему статистическому методу начинается с момента формирования вектора координат l_j , соответствующих точкам пересечения анализируемого луча, направленного вдоль предполагаемого движения фотона в неоднородной среде. При этом учитываются встречающиеся на луча пути граничные поверхности элементарных объемов, на которые разделена исследуемая область введенной разностной сеткой; l_j , $j = 1, 2, 3, \dots, N$; $l_1 = 0$, l_N – координата пересечения луча с граничной поверхностью расчетной области. Геометрия исследуемого объема может быть произвольной. Заметим, что в работе (Surzhikov S.T., 2003) предложен имитационный алгоритм, свободный от необходимости находить координаты точек пересечения каждого из испущенных лучей с гранями элементарных физических объемов. Это позволило заметно сократить расчетное время и реализовать имитационный алгоритм на произвольных неортогональных сетках.

Поскольку при нахождении координат l_j обязательно фиксируются элементарные расчетные объемы, то можно считать, что помимо вектора l_j сформированы также векторы значений газовой температуры T_j^g , температуры частиц T_j^p , концентрации оптически активных компонент газовой смеси $x_{k,j}^g$ (для определенности будем считать, что $x_{k,j}^g$ – молярные концентрации), суммарного давления в смеси газов p_j , концентрации оптически активных жидких и твердых компонент смеси $n_{k,j}^p$. При этом $n_{k,j}^p$ – число частиц заданного размера в единице объема; если смесь полидисперсная, $n_{k,j}^p$ – числовая концентрация частиц с некоторым средним размером. Размерность всех перечисленных векторов равна $(N - 1)$, поскольку внутри каждой элементарной зоны свойства предполагаются постоянными.

Это позволяет в пределах каждого отрезка вектора l_j рассчитать следующие оптические характеристики, определяющие процесс переноса излучения вдоль луча:

1) коэффициенты поглощения κ_j^p и рассеяния σ_j^p конденсированной фазы (этот расчет производится обычно с использованием теории Ми (Борен К. и др., 1986)), а также индикатрису рассеяния или средний косинус рассеяния $\bar{\mu}_j$, характеризующий степень асимметрии индикатрисы рассеяния (в дальнейшем указанные функции считаются независимыми от волнового числа в пределах спектрального диапазона $\Delta\omega_g$);

2) коэффициенты поглощения κ_j^c в непрерывном спектре газовой фазы;

3) средний коэффициент поглощения в спектральных линиях $\kappa_{k,b,j} = (S/d)_{k,b,j}$, параметр уширения спектральных линий $\beta_{k,b,j}$, эффективное давление $(P_e)_{k,b,j}$ (Edwards D.K., et al., 1973; Edwards D.K., et al., 1967).

Указанные усредненные функции рассчитываются для каждой молекулярной полосы (индекс «b») каждой компоненты (индекс «k»), дающей вклад в поглощение излучения в диапазоне $\Delta\omega_g$, S, d – усредненная интенсивность вращательных линий и среднее расстояние между ними.

Следующим этапом расчетного алгоритма является построение вектора эффективных оптических толщин для каждой полосы спектральных линий, для чего используется метод Кертиса – Годсона. Пусть основным механизмом уширения является столкновительный, т.е. линии имеют лоренцевский профиль. Тогда

$$\tau_{k,b,j} = \frac{\chi_{k,b,j}}{\sqrt{1 + \frac{\chi_{k,b,j}}{4\varphi\alpha_{k,b,j}^L}}}, \quad (14.154)$$

$$\chi_{k,b,j} = \int_{l_1}^{l_j} \left(\frac{S}{d}\right)_{k,b} \rho_k dl \approx \sum_{m=2}^j \left(\frac{S}{d}\right)_{k,b,m} \rho_k (l_m - l_{m-1}), \quad (14.155)$$

$$\begin{aligned}
 a_{k,b,j}^L &= \left\langle \left(\frac{\gamma_L}{d} \right)_{k,b,j} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\beta P_e}{4} \right)_{k,b,j} \right\rangle = \frac{\int_{l_1}^{l_j} \left(\frac{S}{d} \right)_{k,b} \left(\frac{\gamma_L}{d} \right)_{k,b} \rho_k dl}{\int_{l_1}^{l_j} \left(\frac{S}{d} \right)_{k,b} \rho_k dl} = \\
 &= \frac{\sum_{m=2}^j \left(\frac{S}{d} \right)_{k,b,j} \left[\frac{\beta_{k,b,j} (P_e)_{k,b,j}}{4} \right] \rho_k (l_m - l_{m-1})}{\sum_{m=2}^j \left(\frac{S}{d} \right)_{k,b,j} \rho_k (l_m - l_{m-1})}, \quad (14.156)
 \end{aligned}$$

где ρ_k – плотность k -й компоненты смеси; φ – эмпирический коэффициент, подбираемый для улучшения согласия с результатами LBL-расчета и учитывающий вращательную структуру анализируемого спектра. Заметим, что иногда усредненная интенсивность линий относится не к единице массы, как в данном случае, а к единице объема. В этом случае формулы (14.155) и (14.156) не содержат плотности.

Предполагая справедливым принцип статистической независимости пропускания в полосах спектральных линий, а также учитывая поглощение в непрерывном спектре, полную оптическую толщину находим суммированием

$$\tau_j^a = \sum_k \sum_b \tau_{k,b,j} + \sum_k \tau_{k,j}^c + \sum_k \tau_{k,j}^p, \quad (14.157)$$

где

$$\tau_{k,j}^c = \sum_{m=2}^j \kappa_{k,m}^c (l_m - l_{m-1}), \quad \tau_{k,j}^p = \sum_{m=2}^j \kappa_{k,m}^p (l_m - l_{m-1}). \quad (14.158)$$

Заметим, что при учете доплеровского уширения необходимо изменить способ расчета $\tau_{k,b,j}$ по формуле (14.154).

Параллельно с расчетом оптической толщины по поглощению производится расчет оптической толщины по рассеянию

$$\tau_j^s = \sum_k \sum_{m=2}^j \sigma_{k,m}^p (l_m - l_{m-1}), \quad (14.159)$$

что позволяет впоследствии оценить вероятность рассеяния при установлении факта столкновения моделируемого фотона с частицей среды.

Длина свободного пробега фотонов в излагаемом алгоритме находится обычным образом. Однако для нахождения физической координаты точки столкновения фотонов с частицами среды необходимо выполнить дополнительные расчеты. Главной причиной этого является нелинейная зависимость пропускания на участке, где есть спектральные линии, следствием чего является неравенство пропускания всего участка сумме пропусканий отдельных его составляющих.

Пусть после генерации очередного случайного числа оптическая толщина τ_c , отвечающая длине свободного пробега, удовлетворяет неравенству

$$\tau'_j \leq \tau^c \leq \tau'_{j+1}, \quad (14.160)$$

где $\tau'_j = \tau_j^a + \tau_j^s$.

Отсюда необходимо найти координату l^c , соответствующую величине τ^c . В общем случае следует организовать итерационный процесс для поиска величины l^c . Однако приемлемым является и следующий безытерационный метод. Если в диапазоне (14.160) справедлива линейная зависимость оптической толщины от физической координаты, что хорошо выполняется при малой оптической толщине расчетных ячеек, тогда

$$l^c = l_j + \frac{(l_{j+1} - l_j)(\tau^c - \tau'_j)}{(\tau'_{j+1} - \tau'_j)}. \quad (14.161)$$

Теперь осталось оценить вероятность поглощения (рассеяния) в точке столкновения фотона с частицей среды. В отличие от расчетов переноса монохроматического излучения методом Монте-Карло, где вероятность поглощения (рассеяния) оценивается отношением коэффициента поглощения (рассеяния) к полному коэффициенту ослабления, здесь аналогичная процедура выпол-

няется применительно к соответствующим оптическим толщинам. Например, вероятность рассеяния оценивается соотношением

$$P_s = \tilde{\omega} = \frac{\tau_c^s}{\tau_c^s + \tau_c^a}, \quad \tau_c^s = \tau_j^s - (l_{j+1} - l^c) \sigma_j^p, \quad (14.162)$$

$$\tau_c^a = \tau_j^a + \frac{l^c - l_j}{l_{j+1} - l_j} (\tau_{j+1}^a - \tau_j^a),$$

где $\tilde{\omega}$ – вероятность выживания кванта (альbedo однократного рассеяния).

Весьма важным для излагаемого метода является расчет усредненной энергии e_f для каждой моделируемой группы фотонов. Один из возможных методов состоит в следующем. Сначала вычисляется вероятность испускания фотонов из n -й пространственной зоны исследуемого объема. Для этого рассчитывается энергия E_n , испускаемая в единицу времени n -й пространственной зоной и полная энергия, испускаемая всем объемом

$$E = \sum_{n=1}^{N_V} E_n. \quad (14.163)$$

Здесь N_V – число ячеек (элементарных объемов) расчетной сетки. Искомая вероятность рассчитывается по формуле

$$p_n = \frac{E_n}{E}. \quad (14.164)$$

Затем вычисляется число групп фотонов, испускаемых n -й пространственной зоной

$$N_{f,n} = p_n N_f, \quad (14.165)$$

где N_f – число моделируемых траекторий.

И, наконец, энергия одной группы фотонов, испускаемых n -й зоной, определяется по формуле

$$e_{f,n} = \frac{E_n}{N_{f,n}} = \frac{E}{N_f}. \quad (14.166)$$

Несмотря на ясный физический смысл изложенного алгоритма, имеются значительные проблемы, связанные с расчетом полной энергии, испускаемой отдельной пространственной зоной. Величина E_n обычно рассчитывается по формуле

$$E_n = 4\pi \int_{V_n} \int_{\Delta\omega_g} \kappa(\omega) J_{b,\omega} d\omega dV. \quad (14.167)$$

Здесь V_n – объем n -й пространственной ячейки; $J_{b,\omega}$ – спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела (функция Планка); $\kappa(\omega)$ – спектральный коэффициент поглощения. В пределах небольшого спектрального участка $\Delta\omega_g$ с хорошей точностью можно ввести среднюю функцию Планка

$$\bar{J}_{b,n} = \frac{1}{\Delta\omega_g} \int_{\Delta\omega_g} J_{b,\omega,n} d\omega, \quad (14.168)$$

а интеграл от коэффициента поглощения представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta\omega_g} \kappa_{\omega,n} d\omega &= \kappa_n^p \Delta\omega_g + \kappa_n^c \Delta\omega_g + \int_{\Delta\omega_g} \sum_{i=1}^{N_i} \kappa_{i,n}^l(\omega) d\omega \approx \\ &\approx \kappa_n^p \Delta\omega_g + \kappa_n^c \Delta\omega_g + \sum_{i=1}^{N_i} S_{i,n}, \end{aligned} \quad (14.169)$$

где использовано допущение $\gamma_{i,n} \ll \Delta\omega_g$, поэтому

$$S_{i,n} = \int_0^{\infty} \kappa_{i,n}^l(\omega) d\omega \approx \int_{\Delta\omega_g} \kappa_{i,n}^l(\omega) d\omega. \quad (14.170)$$

Тогда энергия, испускаемая n -й зоной, рассчитывается по формуле

$$E_n = 4\pi \bar{J}_{b,n} V_n \left(\kappa_n^p \Delta\omega_g + \kappa_n^c \Delta\omega_g + \sum_{i=1}^{N_i} S_{i,n} \right), \quad (14.171)$$

которая легко обобщается на случай различия температур газовой и конденсированной фаз

$$E_n = 4\pi V_n \left(\bar{J}_{b,n}^p \bar{\kappa}_n^p + \bar{J}_{b,n}^g \bar{\kappa}_n^g \right) \Delta\omega_g$$

или

$$E_n = 4\pi V_n \left[\bar{J}_{b,n}^p \bar{\kappa}_n^p \Delta\omega_g + \bar{J}_{b,n}^g \left(\kappa_n^c \Delta\omega_g + \sum_{i=1}^{N_l} S_{i,n} \right) \right]. \quad (14.172)$$

Здесь $\bar{J}_{b,n}^p, \bar{J}_{b,n}^g$ – планковские интенсивности при температуре частиц T^p и газа T^g соответственно; $\bar{\kappa}_n^p, \bar{\kappa}_n^g$ – средние коэффициенты поглощения частиц и газа.

Подробный анализ допустимости использования соотношения (14.172) для расчета излучательной способности элементарного объема V_n выполнен в (Surzhikov S.T, et al., 1998). Главными условиями справедливости (14.172) являются условия локального термодинамического равновесия и малости оптической толщины объема V_n . Именно последнее условие может нарушаться в отдельных участках диапазона $\Delta\omega_g$, содержащих молекулярные линии. В этом случае рассчитываемая излучательная способность элементарной расчетной ячейки оказывается несколько завышенной, что является причиной возрастания погрешности расчетов с использованием указанного алгоритма. Несколько уменьшить данную погрешность удастся при учете самопоглощения (реабсорбции) испущенного излучения в элементарном расчетном объеме или расчетом излучения только с его поверхности.

14.10.3. Метод усредненных коэффициентов линейчатого поглощения

По сравнению с гибридным методом статистического моделирования здесь используется упрощающее допущение

$$\tau_{k,b,j} = \chi_{k,b,j}, \quad (14.173)$$

которое справедливо при выполнении условия $\frac{\chi_{k,b,j}}{4a_{k,b,j}^L} \ll 1$.

Заметим, что (14.173) не обязательно отвечает условию малой оптической толщины. Если уширение линий велико, так что

они перекрываются, то приближение (14.173) может быть приемлемым и для случая большой оптической толщины. Если же спектральные линии перекрыты слабо, то (14.173) будет приводить к значительной погрешности при увеличении оптической толщины слоя.

Достоинство данного метода по сравнению с гибридным заключается в возможности существенного упрощения алгоритма имитационного моделирования. Вследствие отсутствия квадратного корня в знаменателе (14.154) оптическая толщина $\tau_{k,b,j}$ любого составного отрезка становится аддитивной функцией оптических толщин отрезков его составляющих. А это в свою очередь позволяет использовать наиболее экономичный алгоритм *максимального сечения* для моделирования длины свободного пробега. Напомним, что суть этого метода состоит в замене реальной неоднородной среды некоторой фиктивной однородной средой с модифицированными оптическими свойствами. В работе (Ермаков С.М. и др., 1982) дано строгое обоснование этого метода и доказываемая эквивалентность прямого статистического моделирования длины свободного пробега методу максимального сечения. Главным преимуществом метода максимального сечения является радикальное упрощение геометрического модуля расчетной программы, поскольку нет необходимости рассчитывать пересечение луча каждого участка траектории с гранями элементарных расчетных объемов конечно-разностной сетки.

14.10.4. LBL-метод с малым числом моделируемых траекторий

Опыт решения задач теплообмена излучением в сером приближении с использованием имитационного метода Монте-Карло показывает, что для получения приемлемой точности необходимо моделировать примерно $N_f = 10^4 \div 10^5$ траекторий. Строгое статистическое обоснование этой оценки дано в работе (Суржиков С.Т., 1993, (г)). Для случая малых альбедо однократного рассеяния ($\tilde{\omega} < 0.9$) и малых оптических толщин ($\tau' < 1$) число N_f может быть уменьшено примерно на порядок. Однако для сильно

рассеивающих сред ($\bar{\omega} > 0.99$) и при $\tau' > 1$ величину N_f необходимо увеличивать с целью уменьшения погрешности вычислений. Спецификой расчета переноса излучения в спектральном диапазоне $\Delta\omega_g$, где присутствуют вращательные линии молекул, является существенная зависимость оптической толщины исследуемого объема от волнового числа ω . Вот почему, если использовать обычный метод LBL-интегрирования, спектральный диапазон $\Delta\omega_g$, как отмечалось выше, следует разделить на N_n поддиапазонов $\Delta\omega_n$, в пределах каждого из которых решать задачу в «серой» постановке. При этом алгоритм расчета числа моделируемых траекторий остается в силе для каждого такого поддиапазона. Таким образом, если в интервале $\Delta\omega_g$ присутствует N_l линий, то общее число моделируемых траекторий оценивается величиной $N_{tot} \sim 10N_lN_f$.

При использовании предлагаемого здесь метода усредненные в $\Delta\omega_g$ радиационные характеристики рассчитываются только для N_f моделируемых траекторий. Это достигается тем, что в каждом спектральном диапазоне $\Delta\omega_n$ моделируется не $N_f = 10^5 + 10^6$, а всего $N_f^* \sim 10 \div 20$ фотонов. Полное число моделируемых траекторий в этом случае определяется по формуле $N_{tot} \sim 10N_lN_f^*$.

Кроме возможной статистической компенсации погрешностей статистического моделирования на большом числе спектральных участков $\Delta\omega_n$, такой подход имеет следующие преимущества. Известно, что в имитационных методах Монте-Карло любая радиационная характеристика (в нашем случае – излучательная и поглощательная способности) определяется усреднением параметров моделируемых траекторий в заданной элементарной ячейке или на заданной элементарной площадке, размеры которых определяются используемой расчетной сеткой. Однако при больших оптических толщинах лишь малая доля этих траекторий заканчивается на границах области, где и накапливается информация, требуемая для расчета излучательной способности. Подавляющее большинство групп фотонов поглощается внутри объема, практически безвозвратно унося с собой накопленную информацию. В оптически толстой среде граничных поверхностей дости-

гают лишь группы фотонов, испущенные вблизи поверхности и практически не несущие информацию о состоянии среды во внутренних слоях объема. Поэтому при больших оптических толщинах нет необходимости в моделировании траекторий фотонов по всей расчетной области, т.е. можно не рассчитывать большое число траекторий в оптически толстой среде, определяя статистически усредненные результаты именно для участков с большой оптической толщиной. Кроме этого, для участков с большой оптической толщиной целесообразно применять весовой алгоритм моделирования (Ермаков С.М. и др., 1982; Суржиков С.Т., 1997). Для участков с малой оптической толщиной ситуация гораздо проще, так как небольшое число моделируемых траекторий в пределах одной подгруппы $\Delta\omega_n$, будучи умноженным на число этих подгрупп, дает вполне приемлемое общее число моделируемых траекторий. Результаты вычислительных экспериментов подтверждают эти качественные соображения.

14.10.5. Тестовые расчеты

Представленные алгоритмы статистического моделирования тестировались путем сравнения с расчетными и экспериментальными данными других авторов. Программная реализация разработанного метода ориентирована на решение широкого класса задач в объемах различных геометрий: в плоских бесконечных слоях, в сферических объемах, в бесконечных и конечных осесимметричных объемах произвольной геометрии.

В работе (Tang K.C., et al., 1994) выполнены расчеты плотностей лучистых тепловых потоков в плоском слое поглощающей, излучающей и рассеивающей среды, содержащей частицы углерода и смесь газов CO_2 , N_2 с температурой 1000 К и полным давлением – 1 атм. Частицы углерода имели концентрацию $n_C = 2 \times 10^7, 2 \times 10^8, 2 \times 10^9 \text{ м}^{-3}$ и представляли монодисперсную смесь частиц радиусом 15 микрон. Мольная концентрация двуокиси углерода принималась равной $x_{\text{CO}_2} = 0.21$. Ограничивающие объем поверхности считались холодными и абсолютно черными.

Коэффициент поглощения в полосах CO_2 рассчитывался с использованием модели равномерно распределенных линий Эльзассера (Гуди Р.М., 1966). Учитывались следующие полосы поглощения CO_2 : 2.0, 2.7, 4.3, 9.4, 10.4, 15 мкм. Радиационные свойства частиц углерода вычислялись с использованием теории Ми (Борен К и др., 1986), а оптические константы заимствовались из работы (Foster P.J., et al., 1962). Индикатриса рассеяния представлялась в транспортном приближении

$$p(\mu) = 2f\delta(1-\mu) + (1-f)(1+3g\mu), \quad (14.174)$$

где $\mu = \cos \theta$, θ – угол рассеяния фотона в системе координат, связанной с рассеивающим центром; $f = 0.111$ и $g = 0.215$ – коэффициенты, определяющие характер рассеяния. Задание индикатрисы рассеяния в таком виде позволяет использовать в расчетах модифицированную величину коэффициента рассеяния $\sigma_s = (1-f)\sigma$. Расстояние между вращательными линиями во всех расчетах полагалось постоянным и равным 1 см^{-1} .

Расчеты по гибриднему методу статистического моделирования проводились практически для тех же самых условий. Незначительные отличия состояли в следующем. При расчетах переноса излучения в молекулярных полосах границы колебательно-вращательных полос ($\omega_{\min}, \omega_{\max}$) выбирались в соответствии с работой (Edwards D.K., et al., 1967), так как в работе (Tang K.C., et al., 1994) они не указаны (табл. 14.4). Незначительная вариация границ спектральных диапазонов не сказалась на результаты.

Таблица 14.4

Границы колебательных полос CO_2

Имя полосы	$\omega_{\min}, \text{см}^{-1}$	$\omega_{\max}, \text{см}^{-1}$
15 мкм	565	770
10.4 мкм	955	965
9.4 мкм	1055	1065
4.3 мкм	2150	2410
2.7 мкм	3550	3770
1.9 мкм	5196	5204

В пределах каждой полосы вводилось от одного до десяти спектральных участков, в каждом из которых применялась гибридная статистическая модель. Параметры экспоненциальных моделей полос рассчитывались в соответствии с работой (Edwards D.K., et al., 1973), т.е. в данном случае использовалась так называемая широкополосная модель спектра. Так же, как и в работе (Tang K.C., et al., 1994), в расчетах рассеяния считалось справедливым транспортное приближение, т.е. реальная индикатриса рассеяния представлялась в виде суммы дельта рассеяния и изотропного рассеяния. Коэффициент рассеяния полагался равным $(1 - \bar{\mu})\sigma$, где средний косинус рассеяния соответствовал коэффициенту f в работе (Tang K.C., et al., 1994).

В табл. 14.5 представлено сравнение результатов расчетов плотности лучистого теплового потока к поверхности плоского слоя. В целом отметим хорошее соответствие расчетных результатов: относительные погрешности не превосходят 10%. Гибридный метод статистического моделирования показал, что для расчета интегрального радиационного потока для наиболее трудоемкого из представленных вариантов ($n_c = 2 \times 10^9 \text{ м}^{-3}$) потребовалось 10 с процессорного времени (Pentium - IV, тактовая частота процессора - 2.53 ГГц, $N_f = 10^5$).

В работе (Thynell S.T., 1990) проведено исследование переноса излучения в одномерной цилиндрической геометрии. Расчеты выполнены для колебательных полос двуокиси углерода с центрами в 15, 10.4, 9.4, 4.3, 2.7 и 2.0 мкм, а также для полос паров воды с центрами в 6.3, 2.7, 1.87, 1.38 мкм. Проведено параметрическое исследование полусферической излучательной способности при различных значениях вероятности выживания кванта. Вычислена также полусферическая излучательная способность для условий экспериментов Х. Хоттеля (Hottel H.C., 1954) и показано удовлетворительное согласие с экспериментальными данными при различных температурах и парциальных давлениях двуокиси углерода и паров воды. Кроме этого выполнено исследование влияния сажи и твердых частиц на полусферическую излучательную способность. Поверхность цилиндрической области считалась холодной и абсолютно черной.

Таблица 14.5

**Интегральные радиационные потоки на границе плоского слоя
в полосах поглощения CO₂**

Имя полосы	$n_c = 2 \times 10^{+7}, \text{ м}^{-3}$		$n_c = 2 \times 10^{+9}, \text{ м}^{-3}$	
	Tang K.C., et al., 1994	Гибридный метод	Tang K.C., et al., 1994	Гибридный метод
2.0 мкм	1.902×10^{-2}	2.01×10^{-2}	3.916×10^{-2}	4.2×10^{-2}
2.7 мкм	3.298×10^{-1}	3.4×10^{-2}	3.916×10^{-1}	4.3×10^{-1}
4.3 мкм	5.218×10^{-1}	5.0×10^{-1}	5.729×10^{-1}	6.1×10^{-1}
9.4 мкм	6.113×10^{-2}	6.3×10^{-2}	9.846×10^{-2}	1.1×10^{-1}
10.4 мкм	4.987×10^{-2}	5.1×10^{-2}	8.826×10^{-2}	9.3×10^{-2}
15.0 мкм	1.846×10^{-1}	2.0×10^{-1}	2.119×10^{-1}	2.5×10^{-1}

Для сравнения с результатами (Thynell S.T., 1990) и (Hottel H.C., 1954) методом гибридного имитационного моделирования рассчитывалась полусферическая излучательная способность на границе бесконечного цилиндрического объема, заполненного двуокисью углерода при температурах $T = 833, 1111, 1389, 1667, 1944$ К и парами воды при $T = 500, 1000, 1500, 2000$ К. Предполагалось, что цилиндрическая область радиусом R_0 заполнена прозрачным газом при давлении $p_0 = 1$ атм. Излучающие газовые компоненты (CO₂ и H₂O) составляли примесь, парциальное давление которой рассчитывалось по формуле

$$p_k = (p_k L_{\text{эфф}}) / R_0, \quad (14.175)$$

где $(p_{\text{CO}_2} L_{\text{эфф}}) = 0.003; 0.0091; 0.0244; 0.0609; 0.1827; 0.609$ и $(p_{\text{H}_2\text{O}} L_{\text{эфф}}) = 0.01; 0.02; 0.1; 0.2; 2.0$, $L_{\text{эфф}} = 1.9 R_0$.

Сравнение с расчетами (Thynell S.T., 1990) проводились на примере двух серий вычислений. Сначала сопоставлялись результаты параметрических расчетов полусферической излучательной способности однородного бесконечного цилиндрического объема для серого излучения. Результаты расчетов представлены в табл. 14.6. Здесь использованы обозначения

$$R = R_0 \beta, \quad \beta = \kappa + \sigma, \quad \bar{\omega} = \sigma / \beta. \quad (14.176)$$

В табл. 14.6 представлены результаты расчетов, соответствующие случаю $\bar{\mu}=1$, $R_0=1$ см при моделировании $N_f=10^4$ траекторий групп фотонов.

Таблица 14.6

Полусферическая излучательная способность бесконечного цилиндра с оптическим радиусом $R = R_0\beta$. Параметрическое исследование

R	$\kappa, \text{см}^{-1}$	$\sigma, \text{см}^{-1}$	$\bar{\omega}$	Thynell S.T., 1990	Гибридный метод
0.1	0.099	0.001	0.01	0.1754	0.1700
	0.09	0.01	0.1	0.1611	0.1560
	0.01	0.09	0.9	0.0197	0.0190
	0.001	0.099	0.99	0.0020	0.0019
1.0	0.99	0.01	0.01	0.8108	0.7840
	0.9	0.1	0.1	0.7773	0.7610
	0.1	0.9	0.9	0.1736	0.1710
	0.01	0.99	0.99	0.0197	0.0190
10.0	9.9	0.1	0.01	0.9959	0.9900
	9.0	1.0	0.1	0.9750	0.9800
	1.0	9.0	0.9	0.4872	0.4900
	0.1	9.9	0.99	0.1386	0.1510

Сравнение полусферической излучательной способности цилиндрического объема, содержащего CO_2 и H_2O , при разных температурах и парциальных давлениях приведено в табл. 14.7 и 14.8.

Таблица 14.7

Интегральная полусферическая способность бесконечного цилиндра, заполненного двуокисью углерода

T, K	$p_{\text{CO}_2} L_{\text{эфф}},$ атм·м	Thynell S.T., 1990	Hottel H.C., 1954	Гибридный метод
833	0.003	0.0286	0.03	0.033
	0.0244	0.0669	0.072	0.076
	0.1827	0.1205	0.115	0.120
1389	0.003	0.0187	0.02	0.024
	0.0244	0.0529	0.057	0.059
	0.1827	0.1094	0.11	0.120
1944	0.003	0.0097	0.0105	0.011
	0.0244	0.0331	0.0340	0.038
	0.1827	0.0760	0.078	0.08

Таблица 14.8

**Интегральная полусферическая способность бесконечного
цилиндра, заполненного парами воды**

T, K	$p_{H_2O} L_{эфф},$ атм·м	Thynell S.T., 1990	Hottel H.C., 1954	Гибридный метод
500	0.01	0.0623	0.049	0.052
	0.1	0.1812	0.180	0.194
	2.0	0.4689	0.480	0.510
1000	0.01	0.0348	0.026	0.029
	0.1	0.1307	0.130	0.132
	2.0	0.4022	0.430	0.440
1500	0.01	0.0201	0.013	0.011
	0.1	0.946	0.085	0.085
	2.0	0.3475	0.330	0.340
2000	0.01	0.0114	0.0065	0.0068
	0.1	0.0648	0.046	0.049
	2.0	0.2916	0.230	0.240

Можно сделать вывод об удовлетворительной точности, которую позволяет обеспечить предлагаемый гибридный метод статистического моделирования в рассмотренных задачах нахождения плотностей радиационных потоков. Однако выполненные тестовые расчеты не могут служить обоснованием применимости гибридного метода для других расчетных случаев, например, для нахождения направленной излучательной способности.

14.10.6. Результаты расчетов спектральной направленной излучательной способности

Имитационные алгоритмы Монте-Карло применялись для расчета спектральной направленной излучательной способности модельной струи РДТТ. Распределения температуры газа и конденсированной фазы, а также объемной концентрации частиц Al_2O_3 показаны на рис. 14.8 (давление в газовой фазе полагалось равным 1 атм).

На рис. 14.9 представлены распределения относительных мольных концентраций молекул CO_2 и H_2O .

Газодинамические параметры на срезе сопла полагались близкими к исследованным в (Нельсон Х.Ф., 1986) при анализе направленной излучательной способности (сигнатуры) однородного цилиндрического объема, аппроксимирующего струю продуктов сгорания тактической ракеты на твердом металлизированном топливе. Частицы Al_2O_3 полагались монодисперсными с радиусом $r = 2$ мкм. Их оптические свойства рассчитывались по теории Ми, а спектральные коэффициенты преломления и поглощения заимствовались из (Plastinin Yu.A., et al., 2001).

Анализ различных оптических моделей излучающих газовых компонент продуктов сгорания ракетных топлив был выполнен в (Surzhikov S.T., 2002). Было показано, что использование базы данных молекулярных линий HITRAN (Rothman L.S., et al., 1992) для расчета сигнатур струй продуктов сгорания ограничено лишь центрами колебательных полос поглощения. Поэтому для сравнительного анализа представленных в данной работе алгоритмов был выбран спектральный диапазон $\Delta\omega_g = 3600 \div 3620$ cm^{-1} , отвечающий центру полосы поглощения 2.7 мкм H_2O . Параметры вращательных линий рассчитывались по формулам

$$S_i = S_i^* Q_\Sigma \exp \left[1.44 \times E_i \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right] \frac{1 - \exp(-1.44\omega_i/T)}{1 - \exp(-1.44\omega_i/T_0)}, \quad (14.177)$$

$$\gamma_{L,i} = \sum_{j \neq i} (\gamma_{i,j})_{273} P_j \left(\frac{273}{T} \right)^{n_{i,j}} + (\gamma_{i,i})_{273} P_i \left(\frac{273}{T_i} \right)^{n_{i,i}}, \quad (14.178)$$

$$\gamma_{D,i} = 0.358 \times 10^{-6} \omega_i \sqrt{T/W_m}. \quad (14.179)$$

Здесь $T_0 = 296$ К, $Q_\Sigma = Q_{rot} Q_{vib}$,

$$Q_{rot} = (T_0/T)^{m/2}, \quad m = 3 (H_2O), 2 (CO_2),$$

$$Q_{vib} = \prod_{k=1}^{N_{vib}} \left\{ \left[1 - \exp \left(-\frac{1.44\Omega_k}{T} \right) \right] / \left[1 - \exp \left(-\frac{1.44\Omega_k}{T_0} \right) \right] \right\},$$

$$\Omega_{k,H_2O} = \{3657, 1595, 3756\}, \text{ см}^{-1}, \quad \Omega_{k,CO_2} = \{1388, 2349, 667, 667\}, \text{ см}^{-1},$$

S_i – интегральный коэффициент поглощения во вращательной линии, см^2 ; $\gamma_{L,i}, \gamma_{D,i}$ – лоренцевская и доплеровская полуширины i -й линии; ω_i – волновое число центра линии, см^{-1} ; S_i^* – интенсивность вращательной линии, приведенная в базе данных HITRAN; E_i – энергия нижнего уровня, см^{-1} ; W_m – молекулярный вес, г/моль; $(\gamma_{i,i})_{273}, (\gamma_{i,j})_{273}$ – полуширины, обусловленные резонансными и нерезонансными столкновениями при нормальных условиях; $\eta_{i,j}$ – эмпирический коэффициент температурной коррекции полуширин ($\eta_{i,j} = 0.5, \eta_{i,i} = 1$).

Результаты выполненных расчетов анализировались по спектральной излучательной способности в двух направлениях (углы наблюдения струи $\theta = 90^\circ$ и 150° , θ – измеряется от оси симметрии струи X) и по интегральной излучательной способности в спектральном диапазоне $\Delta\omega_g$ в нормальном к оси струи направлении S_\perp . Сравнение результатов по интегральной излучательной способности позволяет сделать вывод об эффективности используемых имитационных алгоритмов (табл. 14.9).

Таблица 14.9

Интегральная направленная излучательная способность модельной струи РДТТ в диапазоне $\Delta\omega_g = 3600 + 3620 \text{ см}^{-1}$

Метод	N_f	S_\perp , Вт/ср	t , с
Нерассеивающая среда			
LBL	10^4	276	226
LBL + метод максимального сечения	10^4	277	197
LBL с малым числом траекторий	10^2	282	17.4
Гибридный метод	10^5	336	10.1
Метод усредненных коэффициентов	10^5	327	9.20
Рассеивающая среда			
LBL	10^4	313	705
LBL + метод максимального сечения	10^4	304	689
LBL с малым числом траекторий	10^2	283	187
Гибридный метод	10^5	303	11.5
Метод усредненных коэффициентов	10^5	271	8.9

Влияние светорассеяния изучалось путем увеличения концентрации частиц Al_2O_3 в модельной струе (при неизменных кон-

центрациях газовых компонент). В табл. 14.9 представлены результаты расчетов для нерассеивающей и сильно рассеивающей струи с объемной концентрацией частиц на срезе сопла $n_{\text{Al}_2\text{O}_3} = 5 \times 10^6 \text{ см}^{-3}$.

При использовании LBL-метода диапазон $\Delta\omega_g$ разбивался на $N_n = 1000$ участков $\Delta\omega_n$. Число моделируемых траекторий фотонов N_f в каждом спектральном диапазоне $\Delta\omega_n$ указано в табл. 14.9. Последняя колонка таблицы содержит время решения задачи для каждого варианта (Pentium-IV, тактовая частота процессора 2.53 ГГц).

В табл. 14.9 представлены расчетные данные, полученные с использованием двух имитационных LBL-алгоритмов Монте-Карло (метод максимального сечения и прямое моделирование траекторий внутри каждой зоны), гибридного метода имитационного моделирования и метода усредненных коэффициентов линейчатого поглощения. Представлены также результаты LBL-моделирования с малым числом траекторий.

Спектральный коэффициент поглощения в нерассеивающей струе (в точке с координатами $X = 264 \text{ см}$ и $R = 0$) и в окружающем пространстве ($X = 264 \text{ см}$ и $R = 40 \text{ см}$) показан на рис. 14.10. При расчете поглощения в окружающей среде полагалось $x_{\text{H}_2\text{O}} = 3 \times 10^{-5}$. Очевидно, что выбранный для анализа расчетный случай обеспечивает широкий диапазон оптических толщин для моделируемых участков траекторий. Рассчитанная с использованием LBL-метода спектральная направленная излучательная способность модельной струи показана на рис. 14.11. Заметим, что спектральные осцилляции величины $S(\omega)$ в данном случае обусловлены не только истинной спектральной зависимостью, но и статистической погрешностью метода Монте-Карло, что легко устраняется увеличением числа моделируемых траекторий фотонов. Однако статистическая компенсация указанной погрешности приводит к весьма стабильному результату для интегральной в $\Delta\omega_g$ интенсивности излучения струи $S_\Omega = \int_{\Delta\omega} S_\Omega(\omega) d\omega$, где индекс Ω означает зависимость от угла наблюдения.

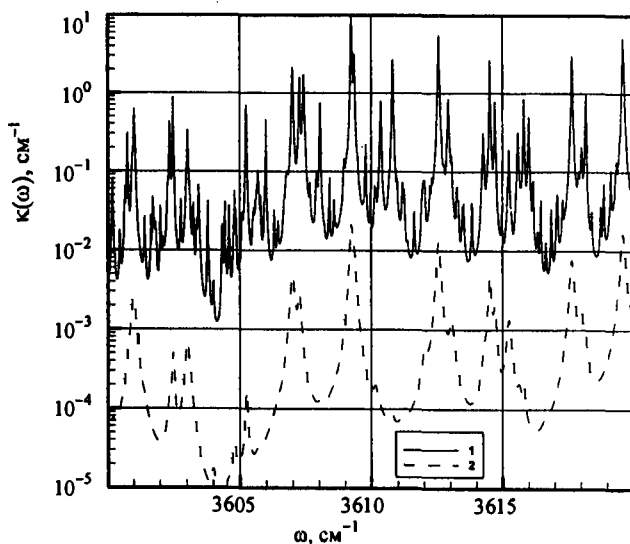


Рис. 14.10. Спектральный коэффициент поглощения внутри нерассеивающей струи 1 и в окружающей среде 2

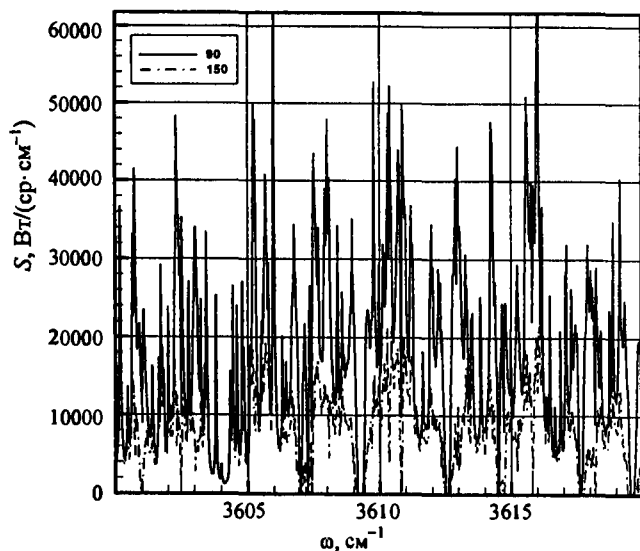


Рис. 14.11. Спектральная направленная излучательная способность нерассеивающей модельной струи РДТТ. Сплошная кривая – угол наблюдения 90° , штриховая кривая – 150°

Нормальная компонента $S_{\perp} = S_{90^{\circ}}$ представлена в табл. 14.9. Отсюда видно, что интеграл от сильно осциллирующей функции $S_{\Omega}(\omega)$ предсказывается с хорошей точностью независимо от алгоритма имитационного моделирования (первые две строки таблицы) и используемого числа N_f .

Определение величины S_{\perp} с использованием гибридных методов позволяет сократить время расчетов примерно в 10 раз. Эти вычисления проводились с применением подгоночного коэффициента $\varphi = 2-10$. При $\varphi = 1$ различие между результатами LBL- и гибридных расчетов для некоторых вариантов достигало 100%. Это подтверждает выводы (Гуди Р.М., 1966) о том, что неверный выбор параметров статистической модели спектра вращательных линий может привести к погрешности в $200 \div 300\%$. Расчеты модельного спектра случайно расположенных вращательных линий одинаковой интенсивности и полуширины дали типичную погрешность $20 \div 30\%$. Таким образом, следует принимать в учет, что в суммарной погрешности гибридного метода присутствуют источники погрешности разной природы: погрешность статистических моделей, погрешность статистического моделирования и погрешность самого гибридного метода.

Различие между результатами, полученными по гибриднему методу и методу усредненных коэффициентов в данном случае невелико, а экономия времени расчетов у менее точного метода незначительна.

На рис. 14.12 показаны спектральный коэффициент поглощения и альbedo однократного рассеяния для сильно рассеивающей струи в той же пространственной точке, что и на рис. 14.10.

Спектральная направленная излучательная способность для этого расчетного случая показана на рис. 14.13. Как и прежде, обращает на себя внимание стабильность результатов расчета интегральной величины S_{\perp} (см. табл. 14.9), что является дополнительным подтверждением принципа статистической компенсации погрешности. Гибридный метод имитационного моделирования показал высокую эффективность и в данном случае, поскольку позволил добиться приблизительно стократного сокращения времени расчета при незначительной потере точности.

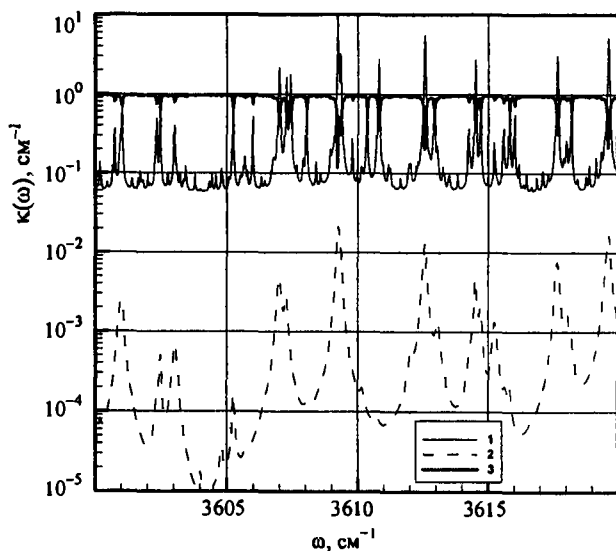


Рис. 14.12. Спектральный коэффициент поглощения 1 и альbedo однократного рассеяния 3 внутри рассеивающей струи, и коэффициент поглощения в окружающей среде 2

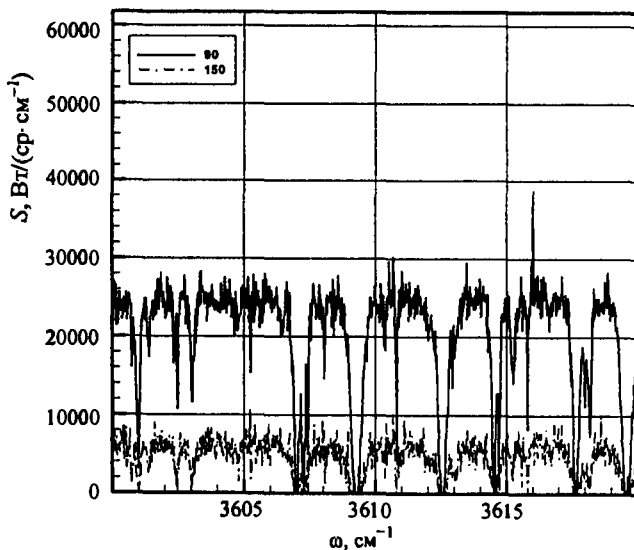


Рис. 14.13. Спектральная направленная излучательная способность модельной рассеивающей струи РДТТ. Сплошная кривая – угол наблюдения 90° , штриховая кривая – 150°

Таким образом, разработанные гибридные алгоритмы имитационного моделирования объединяют два метода: имитационный метод Монте-Карло и метод статистических моделей полос линий. Известно, что имитационный метод Монте-Карло имеет большую дисперсию и низкую скорость сходимости результатов при увеличении числа моделируемых фотонов. Несмотря на указанные недостатки, имеется широкий набор вычислительных приемов (методов), позволяющих получить достаточную для практических целей точность результатов за приемлемое расчетное время. Применительно к задачам переноса теплового излучения, возникающими на практике, достаточной точностью для имитационных расчетных методов можно считать величину $\approx 3\%$. Подчеркнем, что имеются в виду методы расчета, применяемые при решении прикладных задач, и не затрагиваются проблемы получения эталонных решений.

На самом деле точность $\approx 3\%$ является избыточной, поскольку используемые в расчетах радиационные свойства газов и твердых (жидких) частиц известны с меньшей определенностью. Для хорошо исследованных газов, таких, как H_2O и CO_2 , характерна примерно 10%-ная достоверность знания усредненных во вращательной структуре коэффициентов поглощения (или параметров, широкополосных моделей, позволяющих рассчитать перенос излучения с учетом линейчатой структуры) при давлениях, близких к атмосферному и температурах $500 \div 3000$ К. Вращательная структура спектра (номенклатура вращательных линий, их полуширина и интенсивность) известна при высоких температурах с меньшей точностью. Для менее изученных, чем H_2O и CO_2 , газовых смесей точность расчета коэффициентов поглощения снижается до $30 \div 50$ и более процентов. Исходя из этого, считается, что в инженерных приложениях суммарная погрешность расчетов лучистого теплопереноса в пределах 30% является удовлетворительной.

Второй из использованных методов – метод статистических моделей спектральных линий, не обладает асимптотической сходимостью. Детальное исследование точности методов статистических моделей полос, выполненное в работах (Гуди Р.М., 1966;

Surzhikov S.T., 2002), показало, что специальный выбор модели для описания конкретного спектра линий может позволить достичь точности $-10 \div 20\%$. Наличие сильно неоднородных слоев вдоль оптической трассы увеличивает эту погрешность примерно до 30% . Подчеркнем, что необоснованный выбор модели полосы приводит к погрешностям $100 \div 300\%$.

Таким образом, общую погрешность предложенного гибридного метода статистического моделирования можно оценить в $10 \div 30\%$ (при подходящем выборе эмпирического коэффициента).

Анализ имитационных алгоритмов Монте-Карло применительно к проблеме расчета спектральной излучательной способности продуктов сгорания РДТТ позволяет прогнозировать дальнейшее развитие LBL-методов имитационного моделирования, в особенности с использованием параллельных вычислений.

14.11. Пространственная модель излучения струй продуктов сгорания

Развитие методов численного моделирования спектрального направленного излучения струй продуктов сгорания жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) и ракетных двигателей твердого топлива (РДТТ) является одной из актуальных проблем спектральной диагностики работы двигателей, а также раннего обнаружения старта ракет и оптических методов сопровождения их полета по траектории (Simmons F.S., 2000). При этом наиболее трудоемкими задачами, требующими десятки и сотни часов расчетного компьютерного времени, являются задачи расчета направленной излучательной способности с высоким спектральным разрешением светорассеивающих струй продуктов сгорания (см. предыдущий раздел).

К проблемам физического характера следует отнести задачи расчета спектральных оптических свойств продуктов сгорания и окружающей атмосферы, включая возможность их пространственного и временного изменения, а также проблемы выбора адекватных спектральных диапазонов, в которых производится расчет. Размер спектральных диапазонов, в которых выполняется интег-

рирование уравнения переноса, определяется в первую очередь требованиями регистрирующей аппаратуры. Типичными спектральными диапазонами для регистрации теплового излучения струй продуктов сгорания являются $\Delta\omega = 10 \div 30 \text{ см}^{-1}$. В инфракрасной области спектра $\Delta\Omega = 2000 \div 5000 \text{ см}^{-1}$ такие спектральные диапазоны содержат сотни и тысячи вращательных линий испускания излучения молекулярными газами. Это означает, что расчеты переноса излучения проводятся с усреднением по вращательной структуре спектра. Повышение точности диагностических и расчетных методов ведет к необходимости учета реальной вращательной структуры спектра. Однако при этом возникают новые проблемы физического характера: чем выше точность расчета спектра излучения, тем менее точными и более громоздкими становятся расчетные методы определения параметров вращательных линий (интенсивности, полуширины, местоположения линий). Кроме этого, здесь также имеются проблемы расчетно-методического характера, связанные с тем, что подробные спектральные расчеты требуют исключительно больших затрат компьютерного времени. Оценка необходимого количества спектральных диапазонов для подробного спектрального расчета (так называемого *line-by-line* расчета) делается следующим образом: если предположить, что на описание контура каждой спектральной линии необходимо предусмотреть ~ 10 расчетных точек, то общее число расчетных точек оценивается величиной $\sim 10 N_l$, где N_l – число вращательных молекулярных линий в исследуемой спектральной области. Так как число вращательных линий, которые необходимо учитывать во всем спектральном диапазоне, достигает десятков и сотен тысяч, то полное число спектральных точек для расчета может быть порядка 10^6 . Использование неравномерных расчетных сеток по спектру и параллельных вычислений позволяет заметно сократить трудоемкость расчетов (в десятки раз), но принципиально решить проблему учета тонкой вращательной структуры спектра все же пока не удается.

В ряду перечисленных задач, проблема расчета пространственного поля спектральной направленной излучательной способности струй продуктов сгорания является не менее актуальной.

Имеется два класса задач, для решения которых необходимо использовать трехмерные расчетные методики. К первому классу относятся задачи предсказания излучения многоблочных ракет-носителей, имеющих расположение твердотопливных ускорителей в одной плоскости. Ко второму классу относятся задачи рассеяния солнечного излучения (или излучения другого источника) на осесимметричной и многоблочной струе.

К пространственным моделям спектральной направленной излучательной способности струй ракетных топлив предъявляются требования учета перечисленных выше особенностей расчетно-методического и физического характера.

Рис.14.14 и 14.15 иллюстрируют указанные два класса задач. В первом случае рассматривается осесимметричная струя продуктов сгорания, а во втором случае – блок трех струй продуктов сгорания.

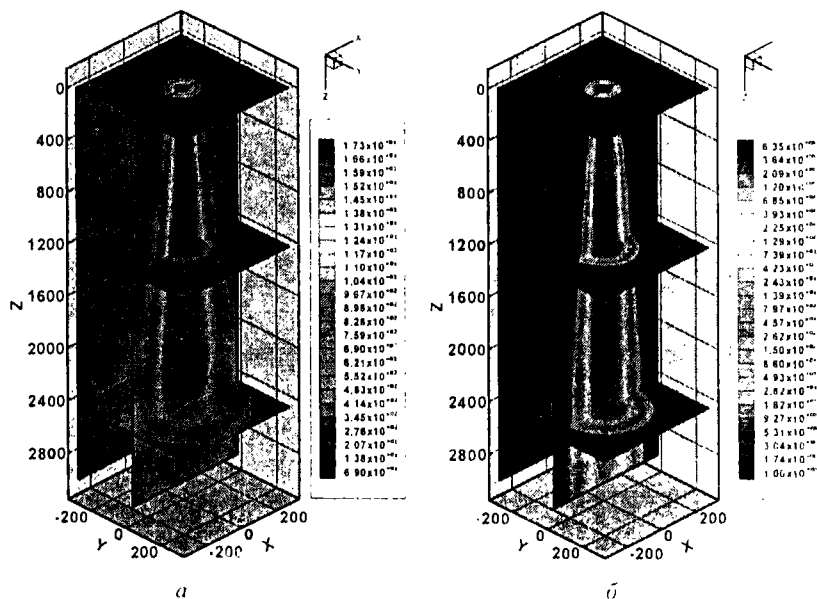
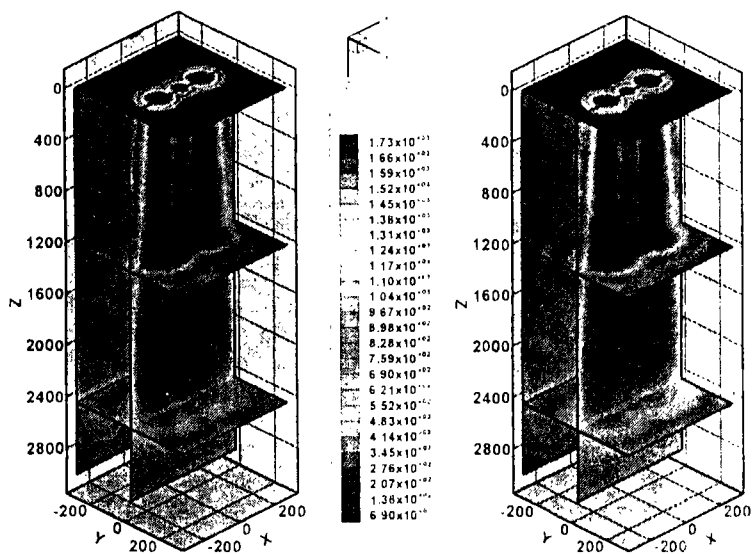
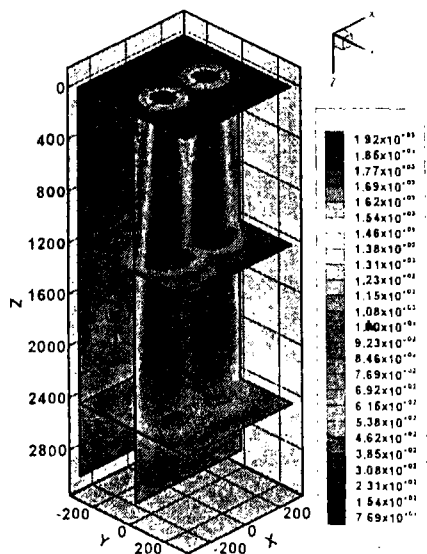


Рис. 14.14. Температура газа в К (а) и концентрация частиц Al_2O_3 в см^{-3} (б) в осесимметричной струе. Пространственные координаты в см



a

б



в

Рис. 14.15. Температура газа (а), частиц Al_2O_3 (б) и концентрация частиц Al_2O_3 (в) в трехблочной струе

Для дальнейшего анализа выбраны две простейшие конфигурации, одна из которых отвечает одиночной (осесимметричной) струе продуктов сгорания, а вторая – трехблочной струе продуктов сгорания, моделирующей газодинамическую конфигурацию ракеты-носителя типа Ariane-V, у которой на центральном ускорителе, работающем на криогенных компонентах топлива O_2 и H_2 , подвешены два твердотопливных ускорителя, расположенные в одной плоскости.

Рассмотрим представленные расчетные случаи более подробно, обращая особое внимание на особенности расчетно-методической части задачи.

Расчет направленной излучательной способности одиночной струи представляет большой интерес как для решения практически важных задач, так и для сравнения результатов с данными других авторов. Подавляющее большинство всех расчетно-теоретических исследований основано именно на модели осесимметричной струи. На рис. 14.14 (а) показано распределение температуры газовой фазы, а на рис. 14.14 (б) – распределение концентраций частиц Al_2O_3 со средним радиусом 2 мкм. Здесь и далее представлены параметры модельных струй, отражающие, тем не менее, особенности газовой динамики реальных ракетных струй. Обратим внимание, что в расчетной методике, основанной на имитационных методах Монте-Карло, легко учитывается различие температур газовой и конденсированной фаз.

Трехмерность проблемы переноса селективного теплового излучения возникает при анализе рассеянного поля излучения на одноблочной струе от произвольного источника внешнего излучения, например от Солнца. В этом случае считается, что на одну из плоскостей расчетной области падает плоскопараллельный поток излучения под произвольным углом атаки. Поскольку излучение Солнца можно сопоставить излучению абсолютно черного тела при температуре ~ 6000 К, то спектральное распределение этого излучения является достаточно гладким в диапазоне $\Delta\Omega$, а спектральная зависимость рассеянного солнечного излучения будет определяться оптическими свойствами газовой и конденсированной фаз продуктов сгорания.

Трехмерность задачи расчета спектральной излучательной способности многоблочных струй продуктов сгорания является очевидной даже по отношению к собственному излучению. Анализ расчетных методик, разработанных для предсказания спектральной направленной излучательной способности осесимметричных струй на ортогональных и криволинейных сетках (Surzhikov S.T., 2003) показал, что наибольшей простотой и эффективностью подобные методики обладают при решении трехмерных задач теории переноса излучения именно в прямоугольной декартовой системе координат. В этом случае легко реализуется следующий расчетный алгоритм.

1. В выбранной системе координат фиксируются направления наблюдения, а конфигурация струи задается произвольным образом.

2. Численное моделирование внутри светорассеивающей области производится по расчетным алгоритмам (см. п. 14.10).

3. Результаты статистического моделирования анализируются на всех поверхностях, ограничивающих расчетную область. Выполняется анализ углового распределения групп фотонов, покидающих поверхности, ограничивающие излучающий объем, например, через поверхности в плоскостях XOZ и YOZ , расположенных при максимальных и минимальных значениях y и x . Учитывая то, что направленная излучательная способность струй продуктов сгорания формируется плоскопараллельными лучами, исходящими от излучающей струи, на каждой из отмеченных плоскостей достаточно анализировать потоки групп моделируемых фотонов в следующих угловых зонах (рис. 14.16):

$$y = y_{\min}, \quad \varphi \in \left[\frac{3\pi}{2} \pm \Delta\varphi \right], \\ \theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}];$$

$$y = y_{\max}, \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{2} \pm \Delta\varphi \right], \\ \theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}];$$

$$\begin{aligned}
 x = x_{\min}, \quad \varphi \in [\pi \pm \Delta\varphi], \\
 \theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]; \\
 \\
 x = x_{\max}, \quad \varphi \in [\pm \Delta\varphi], \\
 \theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}],
 \end{aligned}$$

где $\Delta\varphi \sim 5^\circ$, $\theta_{\min} = 10^\circ$, $\theta_{\max} = 170^\circ$.

Выбор значений $\Delta\varphi$, θ_{\min} , θ_{\max} в значительной мере произволен. Однако чрезмерно большая величина $\Delta\varphi$ приведет к высокой погрешности расчета угловой зависимости излучательной способности, а маленькая величина – приведет к росту статистической погрешности результатов моделирования. Диапазон предельных значений θ_{\min} , θ_{\max} ограничен реальной видимостью излучающего объекта через ограничивающие расчетную область поверхности.

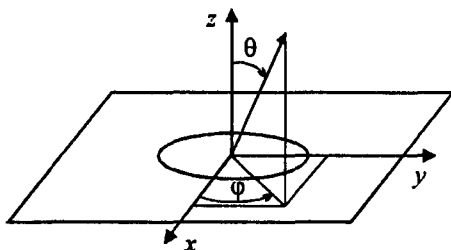


Рис. 14.16. Система координат измерения угловых переменных

Изложенный алгоритм имитационного моделирования переноса селективного теплового излучения в трехмерном случае использовался в работе (Суржиков С.Т., 2004 (6)) для анализа спектральной излучательной способности струй продуктов сгорания для двух расчетных случаев, показанных на рис. 14.14 и 14.15. В каждом из расчетных случаев анализировалась спектральная и интегральная излучательная способность при слабом уровне светорассеяния в струях (концентрация частиц Al_2O_3 на срезе сопел РДТТ $n_p = 10^3 \text{ см}^{-3}$) и при сильном светорассеянии (концентрация частиц Al_2O_3 на срезе сопел РДТТ $n_p = 10^7 \text{ см}^{-3}$). Радиус частиц во всех расчетных случаях полагался равным 2 мкм. Анализ свето-

рассеяния струями продуктов сгорания бокового излучения проводился на примере освещения этих струй солнечным светом под углом 90° и 10° . Распределение температур газа и конденсированной фазы задавались на основе приближенного аналитического решения задачи о двухфазной струе, а распределение массовых долей оптически активных компонент смеси задавалось с использованием теории подобия между тепло- и массообменными процессами. Спектральные оптические свойства продуктов сгорания рассчитывались с использованием компьютерной системы (Surzhikov S.T., 2003 (a)), расчеты оптических свойств частиц Al_2O_3 проводилось с использованием теории Ми (Борен К. и др., 1986) и оптических свойств частиц Al_2O_3 , предложенных в (Plastinin Yu.A., et al., 2001). Спектральные расчеты переноса излучения выполнялись по 100-групповой модели оптических свойств с осреднением по вращательной структуре спектра. В каждой спектральной группе моделировались траектории $10^5 + 10^6$ групп фотонов, так что общее число моделируемых частиц достигало 10^8 .

Результаты расчетов интегральной и спектральной направленной способности осесимметричной струи при двух значениях концентраций частиц Al_2O_3 на срезе сопла ($n_p = 10^3 \text{ см}^{-3}$ и $n_p = 10^7 \text{ см}^{-3}$) показаны на рис. 14.17.

Сравнение угловых зависимостей интегральной излучательной способности в двух плоскостях наблюдения позволяет сделать вывод о том, что разработанный алгоритм правильно моделирует условия симметрии излучения осесимметричной струи. Наблюдаемые осцилляции угловой зависимости интегральной излучательной способности являются типичными для используемого метода имитационного моделирования и устраняются путем увеличения числа моделируемых траекторий. Отметим также повышение погрешностей расчета в направлениях сильно отличающихся от нормальных по отношению к оси струи. Спектральная направленная излучательная способность, представленная для двух углов наблюдения (рис. 14.18 и 14.19), отражает спектральные оптические свойства струй продуктов сгорания (колебательные полосы CO_2 , CO , H_2O) и конденсированной фазы.

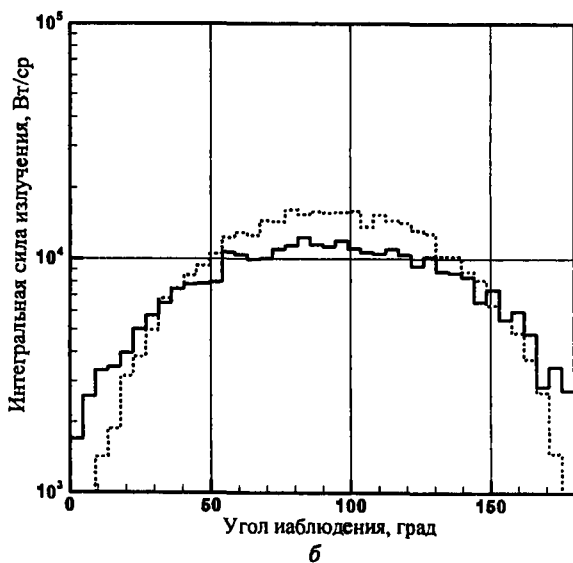
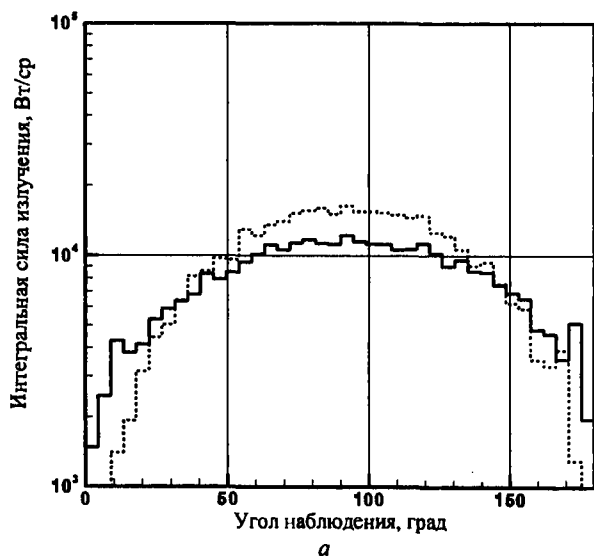


Рис. 14.17. Интегральная направленная излучательная способность осесимметричной струи с низким (сплошная кривая) и высоким (пунктирная кривая) уровнями светорассеяния. Поверхности наблюдения: $x = x_{\max}$ (а), $y = y_{\max}$ (б). Число моделируемых групп фотонов в каждой спектральной группе $N_{ph} = 10^5$

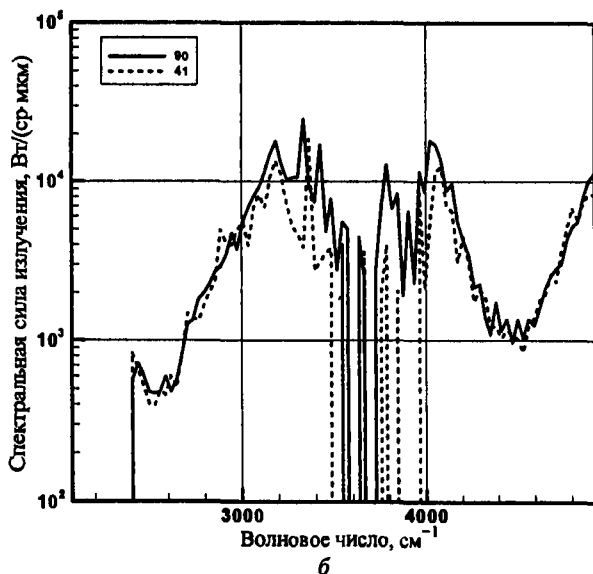
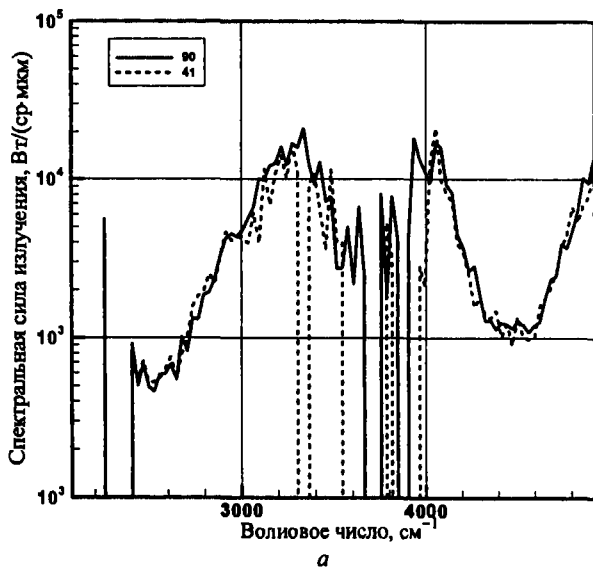


Рис. 14.18. Спектральная направленная излучательная способность осесимметричной струи с низким уровнем светорассеяния: сплошная кривая – угол наблюдения $\theta = 90^\circ$, пунктирная кривая – $\theta = 41^\circ$. Поверхности наблюдения: $x = x_{\max}$ (а), $y = y_{\max}$ (б). Число моделируемых групп фотонов в каждой спектральной группе $N_{ph} = 10^5$

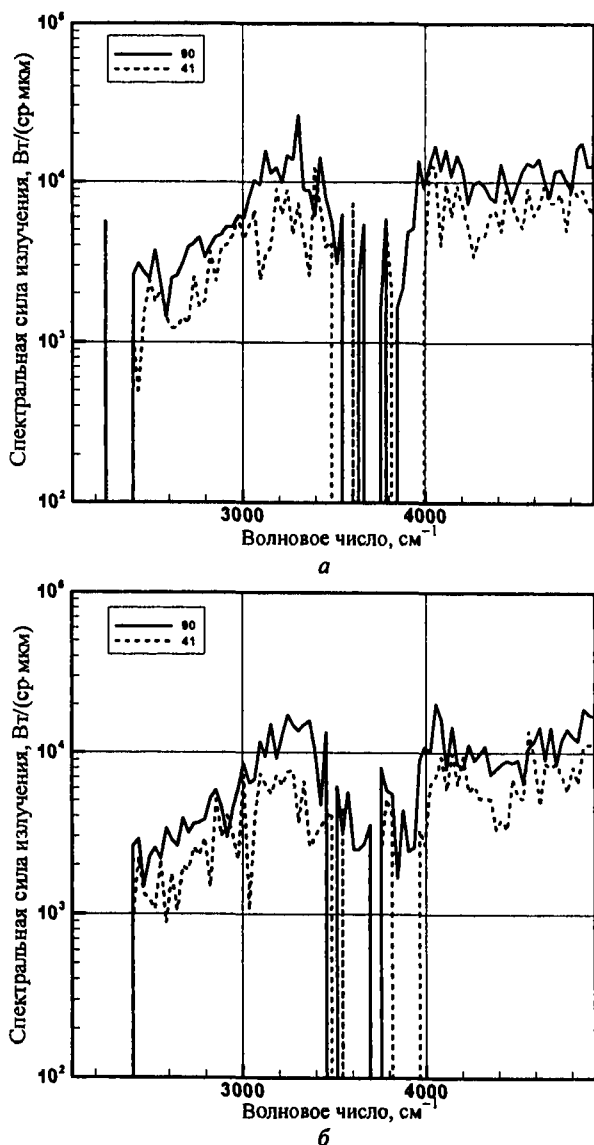


Рис. 14.19. Спектральная направленная излучательная способность осесимметричной струи с высоким уровнем светорассеяния: сплошная кривая – угол наблюдения $\theta = 90^\circ$, пунктирная кривая – $\theta = 41^\circ$. Поверхности наблюдения: $x = x_{\max}$ (а), $y = y_{\max}$ (б). Число моделируемых групп фотонов в каждой спектральной группе $N_{ph} = 10^5$

При увеличении концентрации твердых частиц в окнах прозрачности между колебательными полосами отчетливо видно увеличение испускательной способности (сравнить рис. 14.18 и 14.19). Здесь и далее спектральная направленная излучательная способность показана для двух углов наблюдения $\theta = 90^\circ$ и 41° .

Результаты расчетов излучательной способности такой же осесимметричной струи, но с моделированием на порядок большего числа траекторий групп фотонов в каждой спектральной группе ($N_{ph} = 10^6$), показаны на рис. 14.20, 14.21.

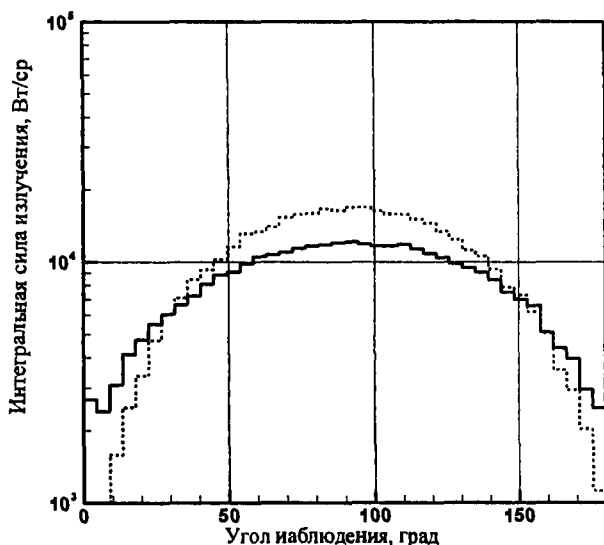


Рис. 14.20. Интегральная направленная излучательная способность осесимметричной струи с низким (сплошная кривая) и высоким (пунктирная кривая) уровнями светорассеяния. Поверхности наблюдения: $x = x_{\max}$. Число моделируемых групп фотонов в каждой спектральной группе $N_{ph} = 10^6$

Сравнение результатов расчетов с разным числом моделируемых фотонов позволяет сделать вывод об очевидном уменьшении стохастических пульсаций угловой и спектральной зависимостей излучательной способности при увеличении N_{ph} . Тем не менее, можно говорить и об удовлетворительной точности и расчетных данных, получаемых при моделировании $N_{ph} = 10^5$ групп фотонов в каждом спектральном диапазоне.

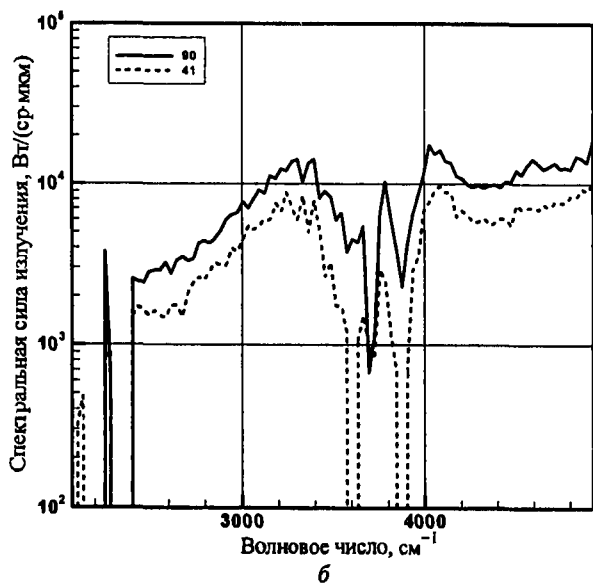
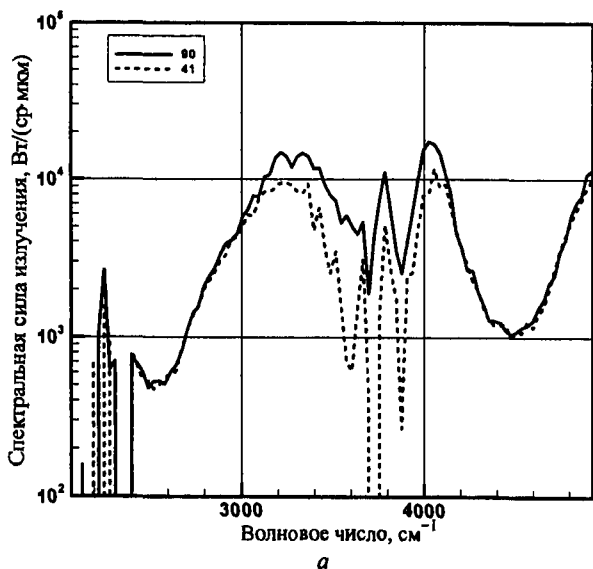


Рис. 14.21. Спектральная направленная излучательная способность осесимметричной струи с низким (а) и высоким (б) уровнями светорассеяния: сплошная кривая – угол наблюдения $\theta = 90^\circ$, пунктирная кривая – $\theta = 41^\circ$. Поверхности наблюдения: $x = x_{\max}$. Число моделируемых групп фотонов в каждой спектральной группе $N_{ph} = 10^6$

Излучательная способность трехблочной струи с высоким уровнем светорассеяния показана на рис. 14.22, 14.23. Интегральная излучательная способность в направлении перпендикулярном плоскости расположения струй продуктов сгорания увеличивается примерно в два раза по сравнению с направлением наблюдения, совпадающим с плоскостью расположения струй.

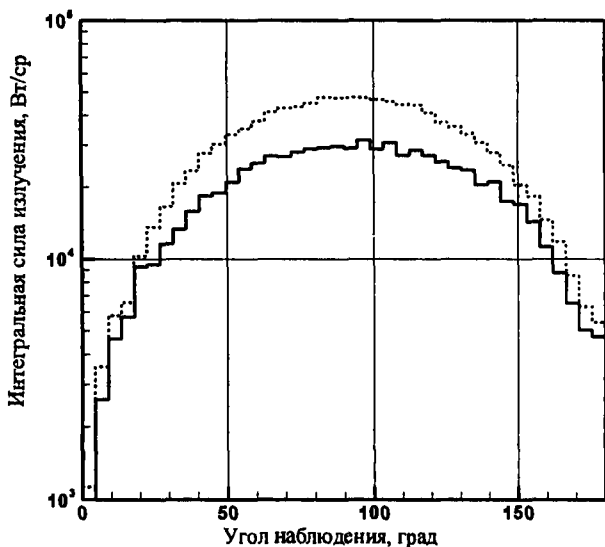


Рис. 14.22. Интегральная излучательная способность трехблочной струи с высоким уровнем светорассеяния. Поверхности наблюдения: $x = x_{\max}$ (сплошная кривая), $y = y_{\max}$ (пунктирная кривая). Число моделируемых групп фотонов в каждой спектральной группе $N_{ph} = 10^6$

При компьютерной имитации радиационных процессов в случае бокового освещения струй продуктов сгорания солнечным светом собственное излучение обычно не рассчитывается. Тем не менее допущение о линейности процессов переноса собственного и рассеянного излучения позволяет учесть суммарный эффект собственного излучения и светорассеяния путем простого сложения интегральных и спектральных излучательных способностей. Статистическое моделирование указанных процессов производится отдельно с использованием схожих расчетных алгоритмов.

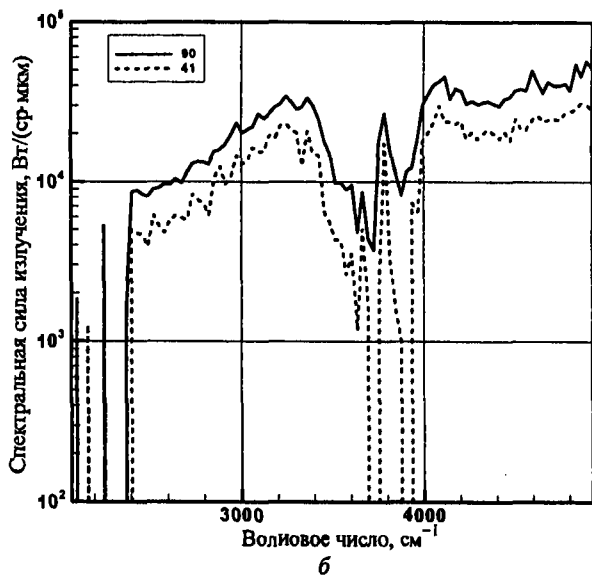
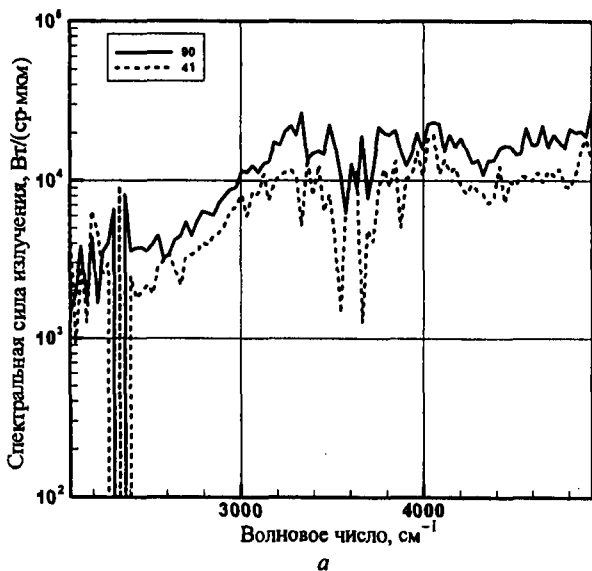
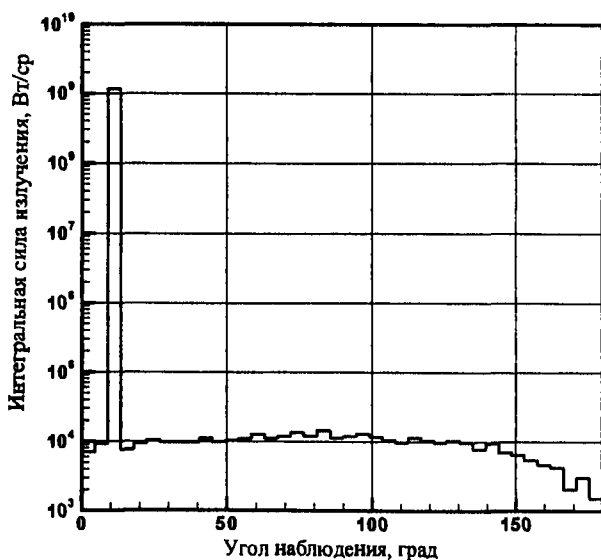


Рис. 14.23. Спектральная излучательная способность трехблочной струи с высоким уровнем светорассеяния: сплошная кривая – угол наблюдения $\theta = 90^\circ$, пунктирная кривая – $\theta = 41^\circ$. Поверхности наблюдения: $x = x_{\max}$ (а), $y = y_{\max}$ (б). Число моделируемых групп фотонов в каждой спектральной группе $N_{ph} = 10^6$

На рис. 14.24 показаны угловые зависимости интегральной излучательной способности в трех плоскостях наблюдения в тех же плоскостях. В данном случае солнечный свет освещает осесимметричную струю под углом $\theta = 10^\circ$ к ее оси, а концентрация частиц Al_2O_3 радиусом 2 мкм на срезе сопла полагалась равной $n_p = 10^7 \text{ см}^{-3}$, т.е. предполагался высокий уровень светорассеяния. Особенностью полученных результатов являются то, что излучательная способность, регистрируемая на плоскости XZ при $y = y_{\text{max}}$, содержит в себе незначительно ослабленное солнечное излучение (локальный максимум излучательной способности) и светорассеянное излучение с интенсивностью приблизительно 10^4 Вт/ср . В направлении нормали при $x = x_{\text{max}}$ наблюдается достаточно гладкое угловое распределение интегральной излучательной способности, достигающей в максимуме величины 3×10^4 . Наибольшая интенсивность рассеянного излучения наблюдается в направлениях противоположных падению солнечного излучения. Это связано с тем, что в других направлениях рассеяния повышается вероятность поглощения фотонов.



а

Рис. 14.24. (Начало)

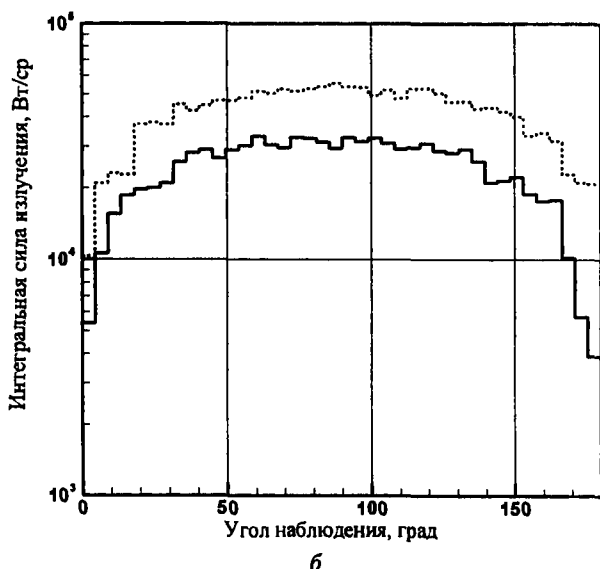


Рис. 14.24. Интегральная направленная способность светорассеяния осесимметричной струи, освещенной солнечным светом под углом $\theta = 10^\circ$. Высокий уровень светорассеяния. Поверхности наблюдения: $y = y_{\max}$ (a), $x = x_{\max}$ (б) – сплошная кривая; $y = y_{\min}$ (б) – пунктирная кривая. Число моделируемых групп фотонов в каждой спектральной группе $N_{ph} = 10^5$. (Окончание)

На рис. 14.25 представлены результаты расчетов рассеяния солнечного излучения на одноблочной осесимметричной струе продуктов сгорания при угле падения солнечного излучения $\theta = 90^\circ$. Сравнение угловых зависимостей интегральных сигнатур светорассеяния в двух рассмотренных выше случаях показывает, что за исключением направления падения солнечного света, они качественно подобны.

Спектральная направленная излучательная способность, обусловленная рассеянным солнечным излучением, показана на рис. 14.26. В рассматриваемых условиях высокой концентрации частиц Al_2O_3 спектральная излучательная способность в окнах прозрачности молекулярного поглощения близка излучательной способности абсолютно черного тела, рассеянного конденсированной фазой струи. Вблизи центров полос поглощения молекулярных газов наблюдается сильное поглощение рассеянного излучения.

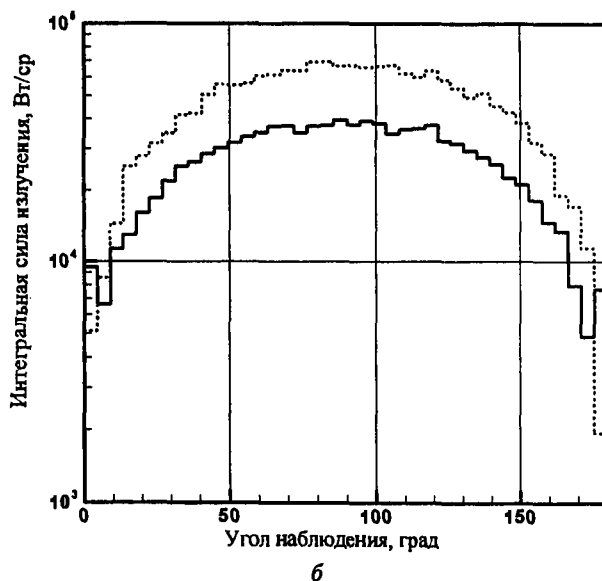
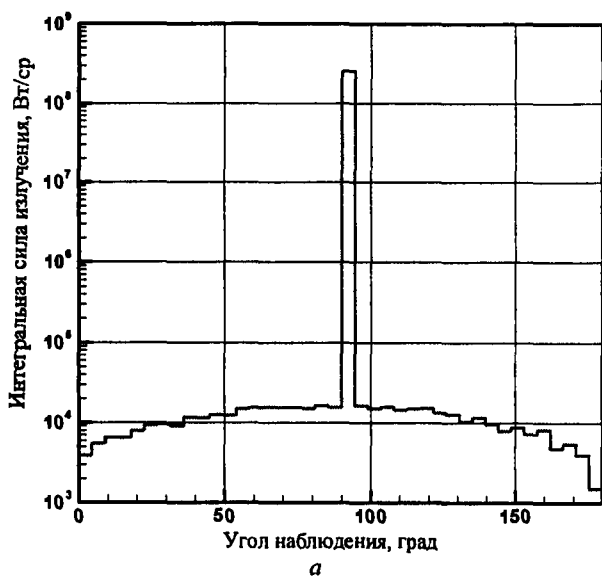


Рис. 14.25. Интегральная направленная способность светорассеяния осесимметричной струи, освещенной солнечным светом под углом $\theta = 90^\circ$. Высокий уровень светорассеяния. Поверхности наблюдения: $y = y_{\max}$ (а), $x = x_{\max}$ (б) – сплошная кривая; $y = y_{\min}$ (б) – пунктирная кривая. Число моделируемых групп фотонов в каждой спектральной группе $N_{ph} = 10^5$

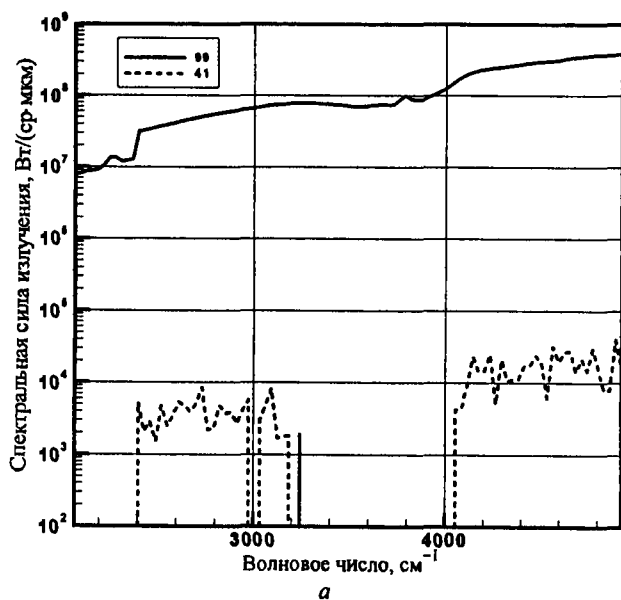


Рис. 14.26. (Начало)

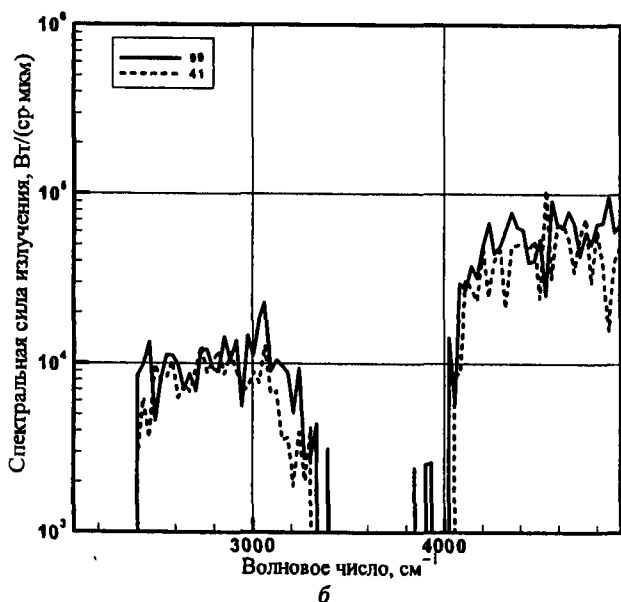


Рис. 14.26 (Продолжение)

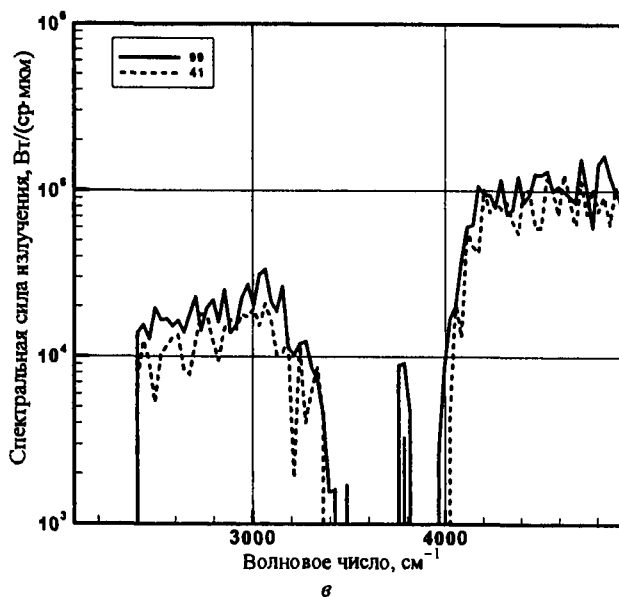


Рис. 14.26. Спектральная направленная способность светорассеяния осесимметричной струи, освещенной солнечным светом под углом: $\theta = 90^\circ$. Сплошная кривая — угол наблюдения $\theta = 90^\circ$, пунктирная кривая — $\theta = 41^\circ$. Высокий уровень светорассеяния. Поверхности наблюдения: $y = y_{\max}$ (а), $x = x_{\max}$ (б); $y = y_{\min}$ (в). Число моделируемых групп фотонов в каждой спектральной группе $N_{ph} = 10^5$. (Окончание)

Совместное моделирование фотонов собственного и внешнего излучения позволяет рассчитать полную интегральную и спектральную излучательную способность струи, освещенную солнечным светом. Результаты таких расчетов показаны на рис. 14.27. В данном случае концентрация частиц Al_2O_3 радиусом 2 мкм на срезе сопла полагалась равной $n_p = 10^7 \text{ см}^{-3}$, т.е. предполагался высокий уровень светорассеяния. Сопоставляя рис. 14.27 (собственное + рассеянное излучение внешнего источника), рис. 14.24 (собственное излучение), хорошо видно, что для всех углов наблюдения, не совпадающих с направлением падения солнечного излучения, спектральная и интегральная излучательная способность рассматриваемой струи определяется совместным вкладом собственного и рассеянного солнечного излучения.

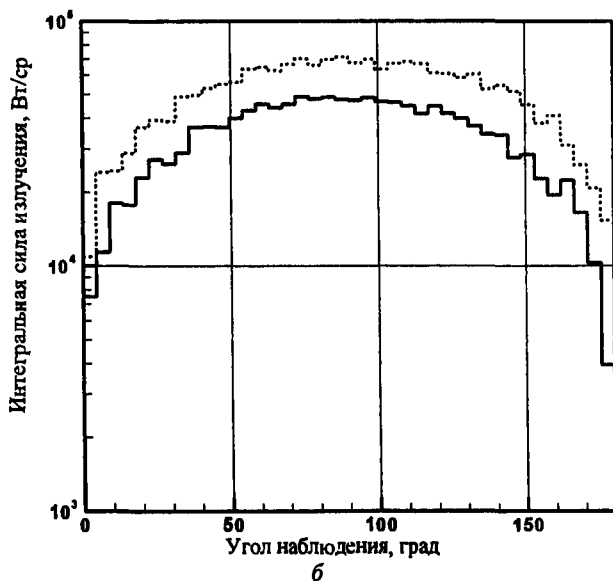
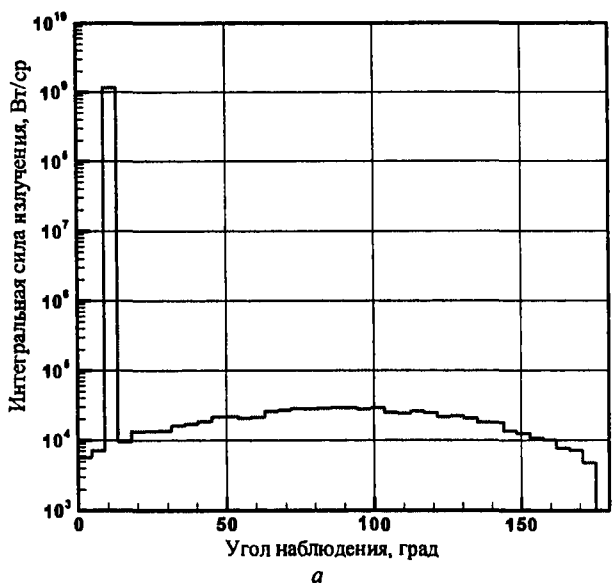


Рис. 14.27. Интегральное собственное излучение и рассеяние солнечного излучения, падающего на осесимметричную струю под углом $\theta = 90^\circ$. Высокий уровень светорассеяния. Поверхности наблюдения: $y = y_{\max}$ (а), $x = x_{\max}$ (б) – сплошная кривая; $y = y_{\min}$ (б) – пунктирная кривая. Число моделируемых групп фотонов в каждой спектральной группе $N_{ph} = 10^5$

Таким образом, расчетная модель переноса селективного теплового излучения основанная на имитационном методе Монте-Карло, позволяет учесть основные особенности пространственно-го поля излучения светорассеивающих струй продуктов сгорания. Заметим, что в расчетах использовалось умеренное число моделируемых групп фотонов (10^5) в каждой их 100 спектральных групп, что позволяло получить допустимый для данного исследования уровень статистической погрешности ($\sim 5\%$).

В заключение отметим, что изложенные методы расчета пространственного поля излучения с учетом тонкой структуры спектра посредством *line-by-line* интегрирования или с использованием статистических моделей спектра, несомненно, найдут дальнейшее развитие в будущем при решении задач переноса селективного неравновесного излучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

- Абрамовиц М., Стиган И. (ред)* Справочник по специальным функциям. М.: Наука. 1979. 832 с.
- Авилова И.В., Биберман Л.М., Воробьев В.С. и др.* Оптические свойства горячего воздуха. М.: Наука. 1970. 320 с.
- Адзерицо К.С.* Лекции по теории переноса лучистой энергии. Минск: Изд-во БГУ. 1975. 192 с.
- Адзерицо К.С., Анцупевич В.М., Некрасов В.П. и др.* Моделирование лучистого теплообмена в средах неплоской геометрии // Инж.-физ. ж. 1979. Т. 36. № 2. С. 231 – 243.
- Адзерицо К.С., Ноготов Е.Ф., Трофимов В.П.* Радиационный теплообмен в двухфазных средах. Минск: Наука и техника. 1987. 166 с.
- Адрианов В.Н.* Основы радиационного и сложного теплообмена. М.: Энергия. 1972. 464 с.
- Аксенов Н.Н., Гольдин В.Я.* Расчет двумерного стационарного уравнения переноса нейтронов методом квазидиффузии // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19. № 5. С. 1341 – 1343.
- Алексеев Б.В., Гришин А.М.* Физическая газодинамика реагирующих сред. М.: Высшая школа. 1985. 464 с.
- Амбарцумян В.А.* Курс астрофизики и звездной астрономии. Ч.1. ОНТИ, 1934.
- Амбарцумян В.А., Мустель Э.Р., Северный А.Б.* Теоретическая астрофизика. М.: Гостехиздат. 1952. 635 с.
- Андерсон Дж.Д.* Обзор исследований излучающего сжатого слоя с инженерной точки зрения // Ракетная техника и космонавтика. 1969. Т. 7. № 9. С. 3 – 17.
- Андерсон Дж.Д.* Несерый лучистый теплообмен в точке торможения // Ракетная техника и космонавтика. 1968 (а). Т. 6. № 4. С. 242 – 243.
- Андерсон Дж.Д.* Тепловой поток от сжатого слоя вязкого излучающего несерого газа // Ракетная техника и космонавтика. 1968 (б). Т. 6. № 8. С. 169 – 172.

* Список литературы оформлен не по ГОСТ 7.1-84, поскольку ссылки на литературу включают в себя фамилии авторов.

- Андерсон Дж.Д.* Уравнение для лучистого теплообмена в точке торможения // Ракетная техника и космонавтика. 1968 (в). Т. 6. № 11. С. 208 – 211.
- Анистратов Д.Ю., Гольдин В.Я.* Сравнение нелинейных потоковых методов численного решения уравнения переноса // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. № 130. М., 1989. 36 с.
- Анистратов Д.Ю., Гольдин В.Я.* Сравнение разностных схем квазидиффузионной системы уравнения переноса // ВАНТ. Сер.: Методики и программы численного решения задач математической физики. 1986. Вып.2. С. 17 – 23.
- Анфимов Н.А., Демьянов Ю.А., Заверняев Ю.А. и др.* Об измерении некоторых параметров атмосфер планет по излучению, сопровождающему полет спускаемых аппаратов на участке торможения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 1. С. 36 – 45.
- Анфимов Н.А., Шари В.П.* Решение системы уравнений движения селективно излучающего газа в ударном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 3. С. 18 – 25.
- Апресян Л.А., Кравцов Ю.А.* Теория переноса излучения: Статистические и волновые аспекты. М.: Наука. 1983. 216 с.
- Аристова Е.Н., Гольдин В.Я.* Эффективное понижение размерности уравнения переноса излучения для задач радиационной газовой динамики. Энциклопедии по низкотемпературной плазме. Вводный том // Под ред. Фортова В.Е. – М.: Наука. 2001.
- Ачасов О.В., Кудрявцев Н.Н., Новиков С.С. и др.* Диагностика неравновесных состояний в молекулярных лазерах. Минск: Наука и техника. 1985. 208 с.
- Базаров И.П.* Термодинамика. М.: Высшая школа. 1983. 344 с.
- Бай Ши-и.* Динамика излучающего газа. М.: Мир. 1968. 323 с.
- Баранов В.Б., Краснобаев К.В.* Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука. 1977. 333 с.
- Басс Л.П.* Конечно-разностные методы решения уравнения переноса в задачах со сложной геометрией // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. № 14. М., 1974. 74 с.
- Батенин В.М., Климовский И.М., Лысов Г.В., Троицкий В.Н.* СВЧ-генераторы плазмы: Физика, техника, применение. М.: Энергоатомиздат. 1988. 224 с.
- Батенин В.М., Минаев П.В.* К вопросу об излучении плотной низкотемпературной плазмы инертных газов // ТВТ. 1977. Т. 15. № 3. С. 647 – 649.

- Белоцерковский О.М., Биберман Л.М., Бронин С.Я. и др.* Обтекание и нагрев затупленных тел гиперзвуковым потоком газа с учетом переноса излучения // ТВТ. 1969. Т. 7. №3. С. 529 – 541.
- Бергельсон В.И., Лосева Т.В., Немчинов И.В.* Численный расчет задачи о распространении дозвуковой радиационной волны навстречу потоку излучения // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1974. №4. С. 22 – 34.
- Биберман Л.М.* К теории диффузии резонансного излучения // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. С. 416.
- Биберман Л.М.* Нарушение термодинамического равновесия в плазме, вызванное выходом излучения // ЖЭТФ. 1949. Т. 19. С. 584.
- Биберман Л.М., Бронин С.Я., Лагарьков А.Н.* Радиационно-конвективный теплообмен при гиперзвуковом обтекании затупленного тела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. №5. С. 112 – 123.
- Биберман Л.М., Воробьев В.С., Лагарьков А.Н. и др.* Течение воздуха за фронтом сильной ударной волны с учетом неравновесной ионизации и излучения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. №6. С. 46 – 57.
- Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т.* Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. – М.: Наука. 1982. 375 с.
- Биберман Л.М., Лагарьков А.Н.* Влияние спектральных линий на коэффициент лучистой теплопроводности // Оптика и спектроскопия. 1964. Т. 16. Вып. 2. С. 320 – 324.
- Биберман Л.М., Лагарьков А.Н.* О вычислении коэффициента лучистой теплопроводности при наличии молекулярного спектра // ТВТ. 1967. Т. 5. №5. С. 924 – 926.
- Блох А.Г.* Теплообмен в топках паровых котлов. Л.: Энергоатомиздат. 1984. 240 с.
- Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н.* Теплообмен излучением. Справочник. М.: Энергоатомиздат. 1991. 431 с.
- Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М.: Наука. 1976, 664 с.
- Бобко Р.П.* Направленные излучательные способности для двумерной поглощающей рассеивающей среды (полубесконечный слой) // Теплопередача. Сер. С. 1967. Т. 89. №4. С. 38 – 46.
- Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир. 1986. 660 с.
- Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука. 1973. 719 с.
- Бояринов П.М., Петров М.П.* Процессы формирования термического режима глубоких пресноводных водоемов. Л.: Наука. 1991. 174 с.
- Бронин С.Я., Брыкин М.В.* О применимости некоторых спектральных моделей // ТВТ. 1977. Т. 15. № 1. С. 137 – 142.

- Бронин С.Я., Брыкин М.В.* Приближенный метод расчета излучения спектральных линий // ТВТ. 1976. Т. 14. №6. С. 1158 – 1165.
- Бронин С.Я., Лагарьков А.Н.* Перенос излучения в неоднородных слоях в спектральной линии ударного профиля // ТВТ. 1970. Т. 8. №4. С. 741 – 748.
- Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука. 1986. 544 с.
- Васильев А.П., Кудрявцев В.М., Кузнецов В.А., Курпатенков В.Д. и др.* Основы теории и расчета жидкостных ракетных двигателей. М.: Высшая школа. 1967. 674 с.
- Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука. 1988. 480 с.
- Визе В.* Ширина спектральных линий. В кн.: Диагностика плазмы. М.: Мир. 1967. С. 218 – 262.
- Висканта Р.* Перенос тепла теплопроводностью и излучением в поглощающих и рассеивающих средах // Теплопередача. 1965. №1. С. 171 – 180.
- Владимиров В.С.* О некоторых вариационных методах приближенного решения уравнения переноса // Вычислительная математика. М.: Изд-во ВЦ АН СССР. 1961. Т. 7. С. 95 – 114.
- Владимиров В.С.* О некоторых вариационных методах приближенного решения уравнения переноса. В сб.: «Вычислительная математика». М.: Изд-во АН СССР. 1958. №7.
- Войтишек А.В., Махоткин О.А.* Решение задач радиационно-кондуктивного теплообмена методом Монте-Карло. В кн.: Теория и алгоритмы статистического моделирования. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР. 1984. С. 122 – 136.
- Волчинская М.И., Мажукин В.И., Четверушкин Б.Н. и др.* Решение двумерных нестационарных задач динамики излучающего газа // ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23. №5. С. 1177 – 1185.
- Гайтлер В.* Квантовая теория излучения. –М.: ИЛ. 1956. 491 с.
- Галанин А.Д.* Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М.: Атомиздат. 1957.
- Галишев В.С.* Метод модифицированных сферических гармоник в теории многократного рассеяния частиц. М.: Атомиздат. 1980. 132 с.
- Гермогенова Т.А., Сушкевич Т.А.* Решение уравнения переноса методом средних потоков. В кн.: Вопросы физики защиты реакторов. М.: Атомиздат. 1969. Вып. 3. С. 34 – 43, С. 69 – 77.

- Головнев И.Ф., Замураев В.П., Кацнельсон С.С. и др. Радиационный теплоперенос в высокотемпературных газах: Справочник. М.: Энергоатомиздат. 1984. 256 с.
- Головнев И.Ф., Севастьяненко В.Г., Солоухин Р.И. Математическое моделирование оптических характеристик углекислого газа // Инж.-физ. ж. 1979. Т. 36. №2. С. 197–203.
- Голубицкий Б.М., Закирова А.Р., Танташев М.В. Расчет переноса излучения в однородной рассеивающей среде с центральным точечным источником методом Монте-Карло // Физ. атмосферы и океана. 1966. Т. 2. № 11. С. 1200–1201.
- Голубь А.П. Численный метод решения уравнений переноса излучения в одномерных задачах радиационной газовой динамики // ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23. № 1. С. 142–151.
- Гольдин В.Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // ЖВМ и МФ. 1964. Т. 4. №6. С. 1078–1087.
- Гольдин В.Я. О математическом моделировании задач сплошной среды с неравновесным переносом // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука. 1982. С. 113–127.
- Гольдин В.Я. Характеристическая разностная схема для нестационарного кинетического уравнения. ДАН СССР. 1960. Т. 133. №4. С. 748–751.
- Гольдин В.Я., Дегтярев В.А. Расчет переноса излучения в линии с фойгтовским профилем // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. № 35. 1985. 17 с.
- Гольдин В.Я., Калиткин Н.Н., Шишова Т.В. Нелинейные разностные схемы гиперболических уравнений // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 15. №5. С. 938–944.
- Гольдин В.Я., Колпаков А.В. Нелинейный метод потоковой прогонки для решения многомерного диффузионного уравнения // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. № 22. 1982. 13 с.
- Гольдин В.Я., Кудинова Г.А. Расчет потока энергии излучения в воздухе // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16. №3. С. 805–808.
- Гольдин В.Я., Четверушкин Б.Н. Методы расчета переноса излучения в одномерных задачах низкотемпературной плазмы // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. № 12. 1970. 49 с.
- Гольдин В.Я., Четверушкин Б.Н. Методы решения одномерных задач радиационной газовой динамики // ЖВМ и МФ. 1972. Т. 12. №4. С. 990–1000.
- Гольдин В.Я., Четверушкин Б.Н. Эффективный метод решения уравнения переноса излучения в низкотемпературной плазме // ДАН. 1970. Т. 195. №2. С. 315–317.

- Горский В.В., Суржиков С.Т.* О применении метода полумоментов к решению задачи теплообмена излучением в ударном слое // ИФЖ. 1982. Т. 42. № 1. С. 129 – 133.
- Горский В.В., Товстоног В.А.* О применении метода моментов к решению уравнения лучистого переноса. В кн.: Тепловой режим конструкций из полупрозрачных материалов. Сб. научн. трудов МВТУ. №205. 1976. С. 70 – 78.
- Горский В.В., Штыря А.С.* Применение метода полумоментов к исследованию теплообмена излучением в поглощающих, излучающих и рассеивающих средах. В кн.: Вопросы теплообмена и тепловых испытаний конструкций. Труды МВТУ. №495. М. 1988. С. 43 – 57.
- Грим Г.* Спектроскопия плазмы. М.: Атомиздат. 1969. 452 с.
- Грим Г.* Уширение спектральных линий в плазме. М.: Мир. 1978. 489 с.
- Гринспен Х., Келбер К., Окрент Д.-М. (ред)* Вычислительные методы в физике реакторов. М.: Атомиздат. 1972. 370с.
- Грудницкая Т.Я., Шипилин А.В.* Дозвуковое течение излучающего водорода в канале с коаксиальными стенками. В кн.: Динамика излучающего газа. Вып. 1. М.: ВЦ АН СССР. 1974. С. 81 – 93.
- Грынь В.И.* О вариационных принципах для уравнения переноса и их связи с P_n -приближением метода сферических гармоник // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24. № 1. С. 75 – 91.
- Грынь В.И.* Схемы расчета переноса излучения. В кн.: Динамика излучающего газа. М.: ВЦ АН СССР. 1981. С. 17 – 55.
- Грязнов В.К., Иосилевский И.Л., Красников Ю.Г. и др.* Теплофизические свойства рабочих сред газофазного ядерного реактора. М.: Атомиздат, 1980. 303 с.
- Гудзовский А.В., Кондранин Т.В., Кузьминский И.Н.* Перенос излучения в линейчатом спектре в неоднородных газовых слоях. В кн.: Труды 4 Всес. конф. по динамике излучающего газа. Т. 2. –М.: Изд-во МГУ. 1981. С. 61 – 67.
- Гуди Р.* Атмосферная радиация. М.: Мир. 1966. 522 с.
- Гудмен Дж.* Статистическая оптика. М.: Мир. 1988, 527 с.
- Гурвич Л.В., Вейц И.В., Медведев В.А. и др.* Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Т. 1, 2. М.: Наука. 1978.
- Давыдов А.С.* Квантовая механика. М.: Наука. 1973. 703 с.
- Даладова Л.А., Макиенко А.И., Суржиков С.Т. и др.* Вычислительная модель теплового излучения осесимметричных объемов рассеивающих двухфазных сред // Математ. Моделирование. 1990. Т. 2. № 4. С. 54.
- Дейрменджан Д.* Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: Мир. 1971. 265 с.

- Детков С.П. Сопоставление простейших приближений в расчетах излучения неизотермического газа // ТВТ. 1972. Т. 10. № 3. С. 609 – 614.
- Дирак П. Лекции по квантовой механике. М.: ИЛ. 1964.
- Домбровский Л.А., Колпаков А.В., Суржиков С.Т. Приближенный метод расчета переноса направленного излучения в поглощающей и анизотропно рассеивающей среде // ТВТ. 1990. № 5. С. 983 – 987.
- Дорошенко В.М., Крючков С.И., Кудрявцев Н.Н. и др. Об ИК-излучении СО и СО₂ содержащих смесей колебательно-неравновесных газов // ТВТ. 1981. Т. 19. № 4. С. 735 – 745.
- Драгалов В.В., Никифоров А.Ф., Новиков В.Г. и др. Статистический метод учета спектральных линий при расчете коэффициентов поглощения света в плазме // Препр. ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР. № 157. 1987. 12 с.
- Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат. 1960. 520 с.
- Ельяшевич М.А. Атомная и молекулярная спектроскопия. М.: УРСС, 2001. 894 с.
- Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука. 1971. 327 с.
- Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука. 1982. 296 с.
- Ершов Ю.И., Шихов С.Б. Математические основы теории переноса. Т.1. Основы теории. М.: Энергоатомиздат. 1985. 232 с.
- Жуков М.Ф., Девятков Б.Н., Новиков О.Я. и др. Теория термической электродуговой плазмы. Ч.2. Нестационарные процессы и радиационный теплообмен в термической плазме. Новосибирск: Наука. 1987. 287 с.
- Жуков М.Ф., Коротеева А.С. (ред.) Теория термической электродуговой плазмы. Новосибирск: Наука. 1987. Т. 1, 2.
- Жуков М.Ф., Урюков Б.А., Энгельшт В.С. и др. Теория термической электродуговой плазмы: Новосибирск: Наука. 1987. 288 с.
- Зельдович Я.Б. и Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука. 1966. 686 с.
- Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.: Мир. 1975. 934 с.
- Золотухин В.Г., Усиков Д.А. Оценка реакторных параметров методом Монте-Карло. М.: Атомиздат. 1979. 93 с.
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука. 1981. 232 с.
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М: Наука. 1980. 447 с.
- Имшенник В.С., Морозов Ю.И. Радиационная релятивистская газодинамика высокотемпературных явлений. М.: Атомиздат. 1981. 88 с.

- Иолтуховский А.А., Стрелков С.А., Сушкевич Т.А.* Тестовые модели численного решения уравнения переноса // Препр. ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР. № 150. – М., 1988. 25 с.
- Исаев С.А., Кожин И.А., Кофанов В.И., Леонтьев А.И. и др.* Теория тепломассообмена. М.: Высшая школа. 1979. 495 с.
- Исаев С.А.* Термодинамика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана. 2000. 413 с.
- Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 1 и 2. М.: Мир. 1981.
- Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука. 1978. 512 с.
- Каменщиков В.А., Пластинин Ю.А., Николаев В.М. и др.* Радиационные свойства газов при высоких температурах. М.: Машиностроение. 1971. 440 с.
- Карасев А.Б., Кондранин Т.В., Кузьминский И.Н.* К расчету переноса селективного излучения в неоднородной плазме // Изв. АН СССР. МЖТ. 1979. № 4. С. 129 – 136.
- Карлсон Б., Бем Д.Ж.* Решение транспортного уравнения S_n -методом. В кн. Труды II международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева. 1958. Избранные доклады иностранных ученых. М.: 1959. Т. 3. С. 408 – 432.
- Касабов Г.А., Елисеев В.В.* Спектроскопические таблицы для низкотемпературной плазмы. М.: Атомиздат. 1979. 160 с.
- Катковский Л.В., Ходыко Ю.В., Лепарская Л.В.* Расчет методами Монте-Карло выходящего излучения в колебательно-вращательной полосе CO из цилиндрической сверхзвуковой струи молекулярного газа при отсутствии локального термодинамического равновесия // Ж. прикл. спектроскопии. 1983. Т. 38. Вып. 2. С. 256 – 262.
- Каули Ч.* Теория звездных спектров. М.: Мир. 1974. 255 с.
- Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир. 1972. 384 с.
- Киселев К.А.* Аналитический метод расчета пропускания неоднородного слоя газа для спектральной линии с фойгтовским контуром // Ж. прикл. спектроскопии. 1979. Т. 30. Вып. 3. С. 397 – 404.
- Киселев К.А.* О возможности аналитического расчета среднего пропускания неоднородного слоя газа по параметрам тонкой структуры спектра // Ж. прикл. спектроскопии. 1981. Т. 34. Вып. 6. С. 1071 – 1077.
- Клименко А.В. и Зорин В.М. (ред.).* Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент. Справочник, Книга вторая. М.: Изд-во МЭИ, 2001, 561 с.
- Кляус Е.М., Франкфурт У.И.* Макс Планк. М.: Наука. 1980. 391 с.

- Кобзев Г.А.* Оптические свойства воздушной плазмы при высоких температурах // Препр. ИВТ АН СССР. № 1-112. М., 1983 (а). 73 с.
- Кобзев Г.А.* Уширение спектральных линий положительных ионов азота и кислорода // Препр. ИВТ АН СССР. № 1-101. М., 1983 (б). 49 с.
- Кобзев Г.А., Нужный В.А.* Оптические свойства воздушной плазмы с учетом спектральных линий, $T = 20000 \div 300000$ К // Препр. ИВТАН СССР. № 1-134. М. 1984 (а). 56 с.
- Кобзев Г.А., Нужный В.А.* Спектральные и интегральные оптические характеристики непрерывного спектра воздушной плазмы при высоких температурах // Препр. ИВТ АН СССР. № 1-131. М. 1984 (б). 83 с.
- Кольчужкин А.М., Учайкин В.В.* Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат. 1978. 255 с.
- Компьютеры и нелинейные явления // Под.ред. А.А. Самарского. М.: Наука. 1988. 192 с.
- Кондранин Т.В., Кузьминский И.И.* Влияние линейчатого спектра на лучистый теплообмен в ударном слое // ТВТ. 1981. Т. 19. № 4. С. 777 – 785.
- Кондратьев К.Я.* Метеорология планет. Л.: Изд-во ЛГУ. 1977. 293 с.
- Кондратьев К.Я., Биненко В.И.* Влияние облачности на радиацию и климат. Л.: Гидрометеиздат. 1984. 240 с.
- Коньков А.А., Нейланд В.Я., Николаев В.М. и др.* Проблемы лучистого теплообмена в гиперзвуковой аэродинамике // ТВТ. 1969. Т. 7. № 1. С. 140 – 161.
- Корлисс Ч., Бозман У.* Вероятности переходов и силы осцилляторов 70 элементов. М.: Мир. 1968. 562 с.
- Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 1974. 831 с.
- Котеров В.Н.* Эквивалентность методов сферических гармоник, дискретных ординат и экспоненциальной аппроксимации для плоских задач теории переноса. В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд-во ВЦ АН СССР. 1974. Вып. 1. С. 7 – 13.
- Краснопольский В.А.* Физика свечения атмосфер планет и комет. М.: Наука. 1987. 304 с.
- Красс М.С., Мерзликин В.Г.* Радиационная теплофизика снега и льда. Л.: Гидрометеиздат. 1990. 261 с.
- Кривцов В.М.* О расчете селективного излучения. В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд-во ВЦ АН СССР. 1976. Вып. 2. С. 36 – 41.
- Кривцов В.М.* Об одном подходе к расчету селективного излучения // ЖВМ и МФ. 1974 (а). Т. 14. № 6. С. 1595 – 1599.

- Кривцов В.М.* Расчет течения селективно излучающего газа между коаксиальными цилиндрами. В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд-во ВЦ АН СССР. 1974 (6). Вып. 1. С. 94 – 108.
- Кривцов В.М., Наумова И.Н., Шмыглевский Ю.Д. и др.* Сравнение расчетов осесимметричных течений излучающего газа // ЖВМ и МФ. 1977. Т. 17. №4. С. 1077 – 1081.
- Кривцов В.М., Наумова И.Н., Шулишина Н.П., Шмыглевский Ю.Д.* Проба двух методов расчета переноса излучения // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15. № 1. С. 163 – 171.
- Кросби А.* Излучательная способность изотермической изотропно рассеивающей среды // Ракетная техника и космонавтика. 1973. Т. 11. № 8. С. 181 – 183.
- Кузнецова Л.А., Кузьменко Н.Е., Кузяков Ю.Я. и др.* Вероятности оптических переходов двухатомных молекул. М.: Наука. 1980. 320с.
- Куликов Ю.Н., Четверушкин Б.Н.* Неявный разностный метод осреднения температуры в задачах радиационной газовой динамики // ЖВМ и МФ. 1973. Т. 13. № 1. С. 136 – 146.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука. 1986.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука. 1974. 752 с.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 1. М.: Наука. 1976, 583 С.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1959. 532 с.
- Левинсон И.Б., Никитин А.А.* Руководство по теоретическому вычислению интенсивностей линий в атомных спектрах. Л.: Изд-во ЛГУ. 1962. 359 с.
- Лосев С.А., Пилюгин Н.Н., Суржиков С.Т.* Моделирование радиационных процессов в механике излучающего газа. М.: Изд-во МГУ. 1990. 190 С.
- Мажорова О.С.* Итерационный метод решения двумерных матричных уравнений // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. №22. М. 1982. 28 с.
- Мажорова О.С., Попов Ю.П.* О методах численного решения уравнений Навье – Стокса // ЖВМ и МФ. 1980. Т. 20. №4. С. 1005 – 1015.
- Малявина Т.Б.* Осреднение уравнений переноса по углам в двумерном случае // Прикл. мат. и механ. 1973. Т. 37. № 2. С. 355 – 368.
- Маров М.Я., Колесниченко А.В.* Введение в планетную астрономию. М.: Наука. 1987. 456 с.
- Марчук Г.И.* Методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат. 1961. 667 с.
- Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука. 1988. 264 с.

- Марчук Г.И., Лебедев В.И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат. 1981. 496 с.
- Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др.* Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука. 1976. 216 с.
- Матвеев А.Н.* Оптика. М.: Высшая школа. 1985. 351 с.
- Матвеев В.С.* Приближенные представления коэффициента поглощения и эквивалентных ширин линий с фойгтовским контуром // Ж. прикл. спектроскопии. 1972. Т. 16. Вып. 2. С. 228 – 233.
- Махоткин О.А.* Решение задач радиационно-кондуктивного теплообмена методом Монте-Карло. 1 – общий алгоритм. В кн.: Численные методы и статистическое моделирование в теории переноса. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР. 1980. С. 119 – 130.
- Мельниченко А.С., Огибин В.Н.* Применение метода Монте-Карло к решению спектральных задач лучистого теплообмена // ЖВМ и МФ. 1977. Т. 17. №4. С. 1068 – 1074.
- Методы Монте-Карло в физике и геофизике.* Уфа: Изд-во Башкирского гос. университета. 1973. 322 с.
- Минин И.Н.* Теория переноса излучения в атмосферах планет. М.: Наука. 1988. 264с.
- Михайлов Г.А.* Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. Новосибирск: Наука. 1974. 141 с.
- Михайлов Г.А.* Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М.: Наука. 1987. 240 с.
- Можсейко С.В., Цветкова И.Л., Шильков А.В.* Расчет переноса излучения в горячем воздухе // Матем. моделирование. 1992. Т. 4. № 1. С. 65 – 82.
- Нельсон Х.Ф.* Влияние частиц на ИК-излучение выхлопных струй тактической ракеты // Аэрокосмическая техника. 1986. № 1. С. 119 – 127.
- Немчинов И.В.* Об усредненных уравнениях переноса излучения и их использовании при решении газодинамических задач // Прикл. мат. и мех. 1970. Т. 34. №4. С. 706 – 721.
- Немчинов И.В., Светцов В.В., Шувалов В.В.* О структуре прогревного слоя перед фронтом сильной интенсивно-излучающей ударной волны // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1978. №5. С. 86 – 92.
- Немчинов И.В., Светцов В.В., Шувалов В.В.* Решение задачи о распространении сильных интенсивно излучающих ударных волн в воздухе методом осреднения уравнения переноса. В кн.: Низкотемпературная плазма в космосе и на Земле. М.: Изд-во ВАГО АН СССР. 1977. С. 47 – 89.
- Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б.* Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы. М.: Физматлит. 2000. 399 с.

- Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука. 1984. 343 с.
- Никифорова А.В., Тарасов В.А., Троциев В.Е.* О решениях кинетических уравнений дивергентным методом характеристик // ЖВМ и МФ. 1972. Т. 12. №4. С. 1041 – 1048.
- Николайшвили Ш.С.* О решении односкоростного уравнения переноса с использованием приближения Ивона – Мертенса // Атомная энергия. 1966. Т. 20. Вып. 4. С. 344 – 345.
- Овсянников В.М.* Учет селективности поглощения излучения в гиперзвуковом потоке газа. М.: Наука. 1983. 152 с.
- Овсянников В.М., Тирский Г.А.* Метод расчета радиационного потока и его дивергенции в области со ступенчатым распределением температуры и состава // ПМТФ. 1971. №2. С. 54 – 62.
- Олстэд В.* Обтекание гладких симметричных тел потоком с селективным излучением // Ракетная техника и космонавтика. 1971. Т.9. №1. С. 147 – 158.
- Ольховский И.И.* Курс теоретической механики для физиков. М.: МГУ. 1978. 574 с.
- Онуфриев А.Т., Севастьяненко В.Г.* О расчете переноса энергии излучения в спектральных линиях // ПМТФ. 1967. №1. С. 125 – 128.
- Онуфриев А.Т., Севастьяненко В.Г.* Перенос лучистой энергии в спектральных линиях с учетом реабсорбции // ПМТФ. 1966. №2, С. 122 – 125.
- Ортега Дж., Рейнболд В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир. 1975. 558 с.
- Оцисик М.Н.* Сложный теплообмен. М.: Мир. 1976. 616 с.
- Пеннер С.С.* Количественная молекулярная спектроскопия и излучательная способность газа. М.: Изд-во иностранной литературы. 1963. 330 с.
- Петров В.А., Марченко Н.В.* Перенос энергии в частично прозрачных твердых телах. М.: Наука. 1985. 189 с.
- Пилюгин Н.Н., Тирский Г.А.* Динамики ионизованного излучающего газа. М.: Изд-во МГУ. 1989. 309 с.
- Планк М.* Избранные труды. М.: Наука. 1975. 788 с.
- Пластинин Ю.А., Суржиков С.Т.* Перенос излучения в неоднородных слоях высокотемпературных газов в атомных линиях фойгтовского контура // Труды 4 Всес. конф. “Динамика излучающего газа”. Т.2. М.: Изд-во МГУ. 1981. С. 35 – 45.
- Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б.* Тепловая защита. М.: Энергия. 1976. 392 с.
- Поляк Г.Л.* Лучистый теплообмен при наличии лучепоглощающей и рассеивающей среды // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27. Вып. 1.

- Поляченко А.Л.* Численные методы в ядерной геофизике. М.: Энергоатомиздат. 1987. 150 с.
- Попов Ю.А.* Излучение рассеивающих объемов простейших геометрических форм // ТВТ. 1980. Т. 18. №3. С. 567–571.
- Попов Ю.А.* О приближении Куртиса – Годсона для расчета излучения неизотермического газа // Инж.-физ. ж. 1977. Т. 32. №4. С. 743–745.
- Попов Ю.А.* Применение статистической модели полос к расчету радиационных характеристик неоднородного и неизотермического газов // ТВТ. 1974. Т. 12. №4. С. 790–796.
- Репина Г.Е., Четверушкин Б.Н.* Об одном методе решения уравнения переноса излучения в двумерных задачах радиационной газовой динамики // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19. №6. С. 1513–1520.
- Романов Г.С., Станкевич Ю.А., Станциц Л.К. и др.* Термодинамические свойства, спектральные и средние коэффициенты поглощения многокомпонентных газов в широком диапазоне параметров. Минск: АНК ИТМО. Препринт №2. 1993.
- Росселанд С.* Астрофизика на основе теории атома. ОНТИ. 1936.
- Рубцов Н.А.* Теплообмен излучением в сплошных средах. Новосибирск: Наука. 1984. 277 с.
- Румынский А.Н., Чуркин В.П.* Обтекание затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого излучающего газа // ЖВМ и МФ. 1974. Т. 14. №6. С. 1553–1570.
- Савельев И.В.* Курс общей физики. Т. III. М.: Наука. 1973. 526 с.
- Самарский А.А.* Введение в численные методы. М.: Наука. 1987. 286с.
- Самарский А.А., Андреев В.Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука. 1976. 352 с.
- Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука. 1978. 591с.
- Светцов В.В.* Расчет сферически симметричной задачи о взрыве методом осреднения уравнения переноса. В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд-во ВЦ АН СССР. 1980. Вып. 3. С. 46–57.
- Севастьяненко В.Г.* Перенос излучения в реальном спектре. Интегрирование по частоте // Инж.-физ. журнал. 1979. Т. 36. №2. С. 218–230.
- Севастьяненко В.Г.* Перенос излучения в реальном спектре. Интегрирование по частоте и углам // Инж.-физ. журнал. 1980. Т. 38. №2. С. 278–285.
- Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Оптика. М.: Наука. 1985. 751 с.
- Смелов В.В.* Лекции по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат. 1978. 215 с.

- Смирнов Б.М.* Атомные столкновения и элементарные процессы в плазме. М.: Атомиздат. 1968. 363 с.
- Смирнов Б.М., Шляпников Г.В.* Излучательные переходы в молекулярном газе // Химия плазмы. Вып. 3. М.: Атомиздат. 1976. С. 130–188.
- Смоктый О.И.* Моделирование полей излучения в задачах космической спектрофотометрии. Л.: Наука. 1986. 352 с.
- Собельман И.И.* Введение в теорию атомных спектров. М.: Наука. 1963. 640 с.
- Соболев В.В.* Курс теоретической астрофизики. М.: Наука. 1967. 528 с.
- Соболев В.В.* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М.: Гостехиздат. 1956.
- Соболев В.В.* Рассеяние света в атмосферах планет. М.: Наука. 1972. 335 с.
- Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука. 1973. 311 с.
- Сошников В.М.* Влияние вращательной структуры молекулярных полос на поглощение света слоями конечной толщины // Оптика и спектроскопия. 1961. Т. 10. №4. С. 448–456.
- Спроул Р.* Современная физика. М.: Наука. 1974. 501 с.
- Спэрроу Е.М., Сесс Р.Д.* Теплообмен излучением. Л.: Энергия. 1972.
- Степанов Н.Ф.* Квантовая механика и квантовая химия. М.: Мир. 2001. 519 с.
- Стожмем Л., Лав Т.* Лучистый перенос тепла от цилиндрического облака частиц // Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т.6. №10. С. 136–142.
- Стожмем Л., Маклеллен К.* Угловое распределение теплового излучения от облака частиц цилиндрической формы // Ракетная техника и космонавтика. 1971. Т.9. №11. С. 5–6.
- Султангазин У.М.* Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Алма-Ата: Наука. Каз. ССР. 1979. 268 с.
- Суржиков С.Т.* Вычислительный эксперимент в построении радиационных моделей механики излучающего газа. М.: Наука. 1992. 157 с.
- Суржиков С.Т.* К расчету селективного радиационного теплообмена в объемах произвольной геометрии // ТВТ. 1993 (а). Т.31. №3. С. 434–438.
- Суржиков С.Т.* Теплообмен излучением с учетом атомных линий в слоях низкотемпературной лазерной плазмы // Матем. моделирование. 1993 (б). Т.5. №10. С. 11–31.
- Суржиков С.Т.* Имитация распространения линейчатого излучения в светорассеивающих объемах // ТВТ. 1993 (в). Т.31. №4. С. 680.

- Суржиков С.Т.* Статистическое моделирование переноса теплового излучения. М. ИПМех РАН. Препринт № 508. 1993 (г). 40 с.
- Суржиков С.Т.* Макростатистическая модель для описания теплообмена излучением с учетом спектра колебательных полос. Формулировка модели // ТВТ. 1998 (а). Т. 36. №2. С. 285 – 290.
- Суржиков С.Т.* Макростатистическая модель для описания теплообмена излучением с учетом спектра колебательных полос. Расчет переноса излучения // ТВТ. 1998 (б). Т. 36. №3. С. 475 – 481.
- Суржиков С.Т.* Методы потоковой квазидиффузии для расчета переноса излучения в конечных цилиндрических объемах. В кн.: Тезисы докладов VI Всесоюзной конференции по динамике излучающего газа. М.: ИПМ АН СССР. 1987. С. 51 – 52.
- Суржиков С.Т.* О расчете направленного теплового излучения светорассеивающих объемов методом Монте-Карло // ТВТ. 1987. Т.25. №4. С. 691.
- Суржиков С.Т.* Оптические свойства газов и плазмы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004 (а). 557 с.
- Суржиков С.Т.* Пространственная модель спектральной излучательной способности светорассеивающих струй продуктов сгорания // ТВТ. 2004 (б). Т. 31. (в печати).
- Суржиков С.Т.* Оптические свойства газов и плазмы. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004 (в). 560 с.
- Суржиков С.Т.* Спектральные коэффициенты поглощения горячих атмосферных газов. Атмосферы Земли и Марса. М.: ИПМех РАН. 2004 (в). 170 с.
- Суржиков С.Т.* Расчет имитационными методами Монте-Карло излучения струй продуктов сгорания с учетом вращательной структуры спектра // ТВТ. 2003. Т. 41. № 5. С. 785 – 799.
- Суржиков С.Т.* Расчет переноса селективного излучения в двумерной цилиндрической геометрии. Нулевое приближение метода квадромоментов. М.: ИПМех АН СССР. Препринт № 352. 1988. 23 с.
- Суржиков С.Т.* Тепловое излучение крупномасштабных кислородно-водородных огневых шаров. Исследование вычислительных моделей // ТВТ. 1997. Т. 35, № 4, С. 584.
- Суржиков С.Т.* Численный анализ радиационных лазерных волн медленного горения // Квантовая электроника. 2000. Т. 30. № 5. С. 416 – 420.
- Сэмсон Д.* Уравнения переноса энергии и количества движения в газах с учетом излучения. М.: Мир. 1969. 207 с.
- Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука. 1966. 624 с.
- Теория звездных спектров.* Сб. трудов. М.: Наука. 1966. 388 с.

- Троцкий В.Е., Юдинцев В.Ф., Федянин В.И.* Об ускорении сходимости итераций при решении кинетического уравнения // ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8. № 2. С. 452 – 458.
- Тьен К.Л.* Радиационные свойства газов // Успехи теплопередачи. Т. 5. М.: Мир. 1975. С. 280 – 360.
- Файвленд В.А.* Решение трехмерного уравнения радиационного теплопереноса методом дискретных ординат // АКТ. 1989. № 9. С. 79 – 88.
- Фано У., Спенсер Л., Бергер М.* Перенос гамма излучения. М.: Госатомиздат. 1963. 284 с.
- Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. 3. Излучение. Волны. Кванты. М.: Наука. 1976. 496 с.
- Филиппычев Ю.С., Четверушкин Б.Н.* Об одном способе осреднения уравнений диффузионного типа по энергиям фотонов // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16. № 6. С. 1601 – 1605.
- Фок В.А.* Начала квантовой механики. М.: Наука. 1976. 376 с.
- Фортон В.Е., Якубов И.Т.* Физика неидеальной плазмы. Черноголовка: Институт химической физики АН СССР. 1984. 263 с.
- Франк-Каменецкий А.Д.* Моделирование траекторий нейтронов при расчете реакторов методом Монте-Карло. М.: Атомиздат. 1978. 94 с.
- Фриш С.Э.* Оптические спектры атомов. М., Л.: ГИФМЛ. 1963. 640 с.
- Хисамутдинов А.И., Стариков В.Н., Морозов А.А.* Алгоритмы Монте-Карло в ядерной геофизике. Новосибирск: Наука. 1985. 158 с.
- Холодов Н.М., Флом З.Г., Колтун П.С.* Расчет радиационно-кондуктивного теплообмена полупрозрачной пластины методом Монте-Карло // Инж.-физ. ж. 1982. Т. 42. № 3. С. 455 – 461.
- Хора Х.* Физика лазерной плазмы. М.: Энергоатомиздат. 1986. 272 с.
- Хошизаки Ш., Лэшер Л.* Конвективный и лучистый теплообмен на поверхности тела с учетом массы // Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т. 6. № 8. С. 3 – 13.
- Хошизаки Ш., Уилсон Л.* Конвективный и лучистый теплообмен при входе со сверхорбитальной скоростью // Ракетная техника и космонавтика. 1967. Т. 5. № 1. С. 29 – 42.
- Цветкова И.Л., Шильков А.В.* Осреднение уравнения переноса в резонансно поглощающей среде // Матем. моделирование. 1989. Т. 1. № 1. С. 92 – 100.
- Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии. М.: Изд-во иностранной литературы. 1953. 432 с.
- Чарахчян А.А.* Об одной численной схеме для уравнения переноса на оптически грубой сетке // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15. № 4. С. 999 – 1005.

- Чарахчян А.А.* Об одном подходе к расчету уравнения переноса для задач динамики излучающего газа. В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд-во ВЦ АН СССР. 1976. Вып.2. С.16 – 35.
- Чарахчян А.А.* Расчет нестационарных, сферически симметричных течений излучающего серого газа. В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд-во ВЦ АН СССР. 1974. Вып. 1. С. 54 – 74.
- Чарахчян А.А., Шмыглевский Ю.Д.* Численные методы в динамике излучающего газа // ЖВМ и МФ. 1980. Т. 20. №5. С. 1249 – 1265.
- Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука. 1988. 424 с.
- Четверушкин Б.Н.* Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука. 1985. 304 с.
- Четверушкин Б.Н.* Численное решение спектральной задачи о прогреве падающим извне излучением вещества // ЖВМ и МФ. 1971. №2. С. 48 – 53.
- Чин Ж.* Перенос излучения при течении в окрестности передней критической точки с учетом влияния излучения в линиях и слоя продуктов абляции // Ракетная техника и космонавтика. 1969. Т.7. №7. С. 117 – 128.
- Шильков А.В.* Методы осреднения сечений и энергетического спектра в задачах переноса нейтронов // Матем. моделирование. 1991. Т.3. №2. С. 63 – 80.
- Шмыглевский Ю.Д.* Вариант моментного метода расчета переноса селективного излучения // ЖВМ и МФ. 1977. Т. 17. №3. С. 785 – 790.
- Шмыглевский Ю.Д.* Моментный метод расчета переноса селективного излучения. В кн.: Динамика излучающего газа. М.: Изд-во ВЦ АН СССР. 1976. Вып. 2. С. 42 – 60.
- Шмыглевский Ю.Д.* О переносе энергии излучением в спектральных линиях // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1969. №3. С. 12 – 20.
- Шмыглевский Ю.Д.* Расчет переноса лучистой энергии методом Галеркина // ЖВМ и МФ. 1973. Т. 13. №2. С. 398 – 407.
- Шпольский Э.В.* Атомная физика. Т. 1 и 2. М.: Наука. 1974.
- Эдвардс Д.К.* Излучательные характеристики материалов // Теплопередача. Сер. С. 1969. Т. 91. №2. С. 96 – 113.
- Эдвардс Д.К., Глэссен Л.К., Хаузер В.К. и др.* Лучистый теплообмен в неизотермических несерых газах // Теплопередача. Сер.С. 1967. Т. 89. №3. С. 26 – 39.
- Эдвардс Д.К., Нельсон К.Е.* Ускоренный метод расчета лучистого теплообмена между несерыми стенками и газами H_2O и CO_2 в изотермических условиях // Теплопередача. Сер.С. 1962. Т. 84. №4. С. 3 – 9.

- Эдвардс Р., Бобко Р.* Лучистая теплопередача от изотермической дисперсной среды с изотропным рассеянием // Теплопередача. Сер.С. 1967. Т. 89. №4. С. 23 – 33.
- Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука. 1968. 344 с.
- Armstrong B.H., Sokoloff J., Nichols R.W., et al.* Radiative Properties of High Temperature Air // JQSRT. 1961. V. 1. № 2. P. 143 – 162.
- Bougnier R.E.* An improved separability approximation for line radiative transport in nonhomogeneous media // JQSRT. 1973. V. 13. №6. P. 499 – 508.
- Breene R.G., Jr.* Stark broadening in air molecule system // JQSRT. 1968. V. 8. №3. P. 1013 – 1017.
- Burch D.E., Howard J.N., Williams D.* Infrared Transmission of Synthetic Atmospheres, V. Absorption Laws for Overlapping Bands // J. Opt. Soc. Amer. 1956. V. 42. P. 452.
- Cess R.D., Wang L.S.* A band absorptance formulation for nonisothermal gaseous radiation // Int. J. Heat Mass Transfer. 1970. V. 13. №3. P. 545 – 555.
- Chan S.H., Tien C.L.* A band absorptance of non-isothermal infrared radiating gases // JQSRT. 1969. V. 9. №9. P. 1261 – 1271.
- Chu C.M., Churchill S.W.* Representation of the angular distribution of radiation scattered by a spherical particle // J. Opt. Soc. Amer. 1955. V. 45. № 11. P. 958 – 962.
- Conrad R., Raizer Yu.P., Surzhtkov S.T.* Continuous Optical Discharge Stabilized by Gas Flow in Weakly Focused Laser Beam // AIAA Journal. 1996. V. 34. №8. P. 1584 – 1588.
- Crosbie F.L., Viskanta R.* The Exact Solution to a Simple Non-Grey Radiative Transfer Problem // JQSRT. 1969. V. 9. №5. P. 553 – 568.
- Curtis A.R.* Discussion of "A Statistical Model for Water-Vapour Absorption" by R.M. Goody // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 1952. V. 78. P. 638.
- Dombrovsky L.A.* Radiation Heat Transfer in Disperse Systems. Begell House. Inc., publishers. 1996. 256 p.
- Eddington A.S.* The Internal Constitution of Stars. Cambridge University Press, London. 1926.
- Edwards D.K.* Molecular Gas Band Radiation. Advances in Heat Transfer. 1976. V. 12. Ed. by Thomas F. Irvine, Jr., James P. Hartnett. Academic Press, New York, San Francisco, London.
- Edwards D.K., Balakrishnan A.* Thermal radiation of combustion gases // Int. J. Heat Mass Transfer. 1973. V. 16. № 1. P. 26 – 40.

- Edwards D.K., Glassen L.K., Hauser W.C., Tuchscher J.S.* Radiation Heat Transfer in Nonisothermal Nongray Gases // Transactions of ASME. 1967. V. 89. №3.
- Edwards D.K., Menard W.A.* Comparison of models for correlation of total band absorption // Appl. Optics. 1964. V. 3. №5. P. 621–625.
- Edwards D.K., Morizumi S.J.* Scaling of vibrational-rotation gas radiation // JQSRT. 1970. V. 10. №3. P. 175–188.
- Federighi F.D.* Vacuum boundary conditions for spherical harmonics methods // Nucleonics. 1964. V. 6. P. 277–285.
- Felske J.D., Tien C.L.* Infrared radiation from non-homogeneous gas mixtures having overlapping bands // JQSRT. 1974. V. 14. №1. P. 35–48.
- Ferriso C.C., Ludwig C.B.* Spectral emissivities and integrated intensities of the 2.7 H₂O band between 530 and 2200 deg K // JQSRT. 1964. V. 4. №1. P. 215–227.
- Ferriso C.C., Ludwig C.B., Thompson A.L.* Empirically determined infrared absorption coefficients of H₂O from 300 to 3000 K // JQSRT. 1966. V. 6. №3. P. 241–275.
- Fiveland W.A.* Discrete-Ordinate Methods for Radiative Heat Transfer in Isotropically and Anisotropically Scattering Media // J. of Heat Transfer, 1987. V. 109. P. 809–812.
- Fleck J.A., Cummings Jr. and J.D.* An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent non-linear radiation transport // J. of Comput. Phys. 1971. V. 8. P. 313–342.
- Foster P.J., Howarth C.R.* Optical Constants of Carbons and Coals in the Infrared // Carbon. 1962. V. 6. P. 719.
- Gerstl S.A.W.* Trans. Amer. Nucl. Soc., 1969. V. 12. №2. P. 733; 1971. V. 14. №1. P. 214; 1971. V. 14. №1. P. 215.
- Godson W.L.* The Computation of Infrared Transmission by Atmospheric Water Vapour, I and II // J. Meteorol. 1955. V. 12. P. 272 and 533.
- Godson W.L.* The Evaluation of Infra-Red Radiative Fluxes due to Atmospheric Water Vapour // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 1953. V. 79. P. 367.
- Gogley A.C.* Radiative transport of Lorentz lines in nonisothermal gases // JQSRT. 1970. V. 10. №9. P. 1065–1075.
- Golden S.A.* The Dopler analog of the Elsasser band model // JQSRT. 1967. V. 7. №3. P. 483–494.
- Golden S.A.* The Voigt analog of an Elsasser band // JQSRT. 1969. V. 9. №8. P. 1067–1081.
- Goody R.M.* A Statistical Model for Water-Vapour Absorption // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 1952. V. 78. P. 165.

- Goody R.M.* Atmospheric Radiation. I. Theoretical Basis. Oxford at the Clarendon Press, 1964.
- Hilbert D.* Phys. Zeitschrift., 1912. Bd. 13. № 5. s. 1056.
- Hilbert D.* Phys. Zeitschrift., 1913. Bd. 14. № 13. s. 592.
- Hirc C.* Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume 1. Fundamentals of Numerical Discretization. 1994, A Wiley Interscience Publication, John Wiley & Sons, Chichester, New York.
- Holstein T.* Imprisonment of resonance radiation in gases // Phys. Rev., 1947. V. 72. № 10. P. 1212.
- Hottel H.C.* Radiant Heat Transmission. Heat Transmission. 3rd ed. Edited by McAdams W.H. McGraw-Hill. New York. 1954. Chapt. 4.
- Howell J.R.* The Monte Carlo Method in Radiative Heat Transfer // ASME Proceedings of the 7th AIAA/ASME Joint Thermophysics And Heat Transfer Conference. Volume 1. HTD V. 357-1. 1998. P. 1 – 19.
- Huffaker R.M.* Current research on infrared radiation from rocket exhaust // JQSRT. 1968. V. 8. № 1. P. 87 – 104.
- Jeanes J.H.* The Equations of Radiative Transfer of Energy. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1917. V. 78. P. 28 – 36.
- Kaplan L.D.* A Quasi-Statistical Approach to the Calculation of Atmospheric Transition // Proc. Toronto Meteorol. Conf. (Roy. Meteorol. Soc). 1953, 1954.
- Kavanagh R.W., Bjornerud E.K., Penner S.S.* Nomogram for the evaluation of peak and total intensities for spectral lines with Doppler contour // J. Opt. Soc. Amer. 1953. V. 43. № 5. P. 380 – 382.
- Kourganoff V., Busbridge I.W.* Basic Methods in Transfer Problems. Dover Publications, Inc., New York, 1963. 281 p.
- Krakov B., Babrov H.J., Maclay G.J. et al.* Use of the Curtis – Godson approximation in calculations of radiant heating by inhomogeneous hot gases // Appl. Opt. 1966. V. 5. № 11. P. 1791 – 1800.
- Krook M.* On the Solution of Equation of Transfer. 1 // Astrophys. J., 1955. V. 122. P. 488 – 497.
- Kuznetsova L.A., Surzhikov S.T.* Radiative Heat Transfer in Narrow Bands Of Rotational Lines Of Diatomic Molecules Electronic Spectra // ASME Proceedings of the 7th AIAA/ASME Joint Thermophysics And Heat Transfer Conference. V. 1. HTD-Vol.357-1. 1998. P. 41 – 49.
- Kyle T.G.* Absorption of radiation by uniformly spaced Doppler lines // Astrophys. J. 1967. V. 148. № 3. P. 845 – 848.
- Ladenberg R., Reiche F.* Uber Selective Absorption // Ann. Phys. 1913. V.42. P.181.

- Lindquist G.H., Simmons F.S.* A band model formulation for very nonuniform paths // *JSRT*. 1972. V. 12. № 5. P. 807 – 820.
- Ludwig C.B.* Measurement of the curves-of-growth of hot water vapor // *Applied Optics*. 1971. V. 10. № 5. P. 1057 – 1073.
- Ludwig C.B., Malkmus W., Reardon J.E. et al.* Handbook of infrared radiation from combustion gases // NASA SP-3080. Washington: Marshal Space Flight Center, 1973.
- Ludwig C.B., Malkmus W., Reardon J.E., Thomson J.A.L.* Handbook Infrared Radiation from Combustion Gases. NASA, Washington, D.C., 1973; *Ludwig C.B., Malkmus W., et al.*, The Standard Infrared Radiation Model // AIAA 81-1051, 1981.
- Lyons R.B., Wormhoudt J., Gruninger J.* Scattering of radiation by particles in low altitude plumes // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1983. V. 20. № 2. P. 189 – 192.
- MacCormack R.W., Paullay A.J.* Computational efficiency achieved by time splitting of finite difference operators // AIAA Paper 72-154, San Diego, 1972.
- Marshak R.E.* Note on the Spherical Harmonics Method as Applied to the Milne problem for a Spherical Harmonics Method // *Phys. Rev.*, 1947. V. 71. P. 443 – 446.
- Marshak R.E.* Variation Method for Asymptotic Neutron Densities // *Phys. Rev.* 1947. V. 71. P. 668.
- McDonald P.W.* The computation of transonic flow through two-dimensional gas turbine cascade // ASME Paper 71-GT-89, 1971.
- Menguc M.P., Iyer R.K.* Modeling of radiative transfer using multiple spherical harmonics approximations // *JSRT*. 1988. № 6. P. 445 – 461.
- Mertens R.* Simon Stevin. *Suppl.*, 1954. V. 30. P. 1.
- Milne E.A.* Radiative equilibrium in the outer layers of a star. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 1921. V. 81. P. 361.
- Moore C.E.* Atomic energy levels. NBS Circular 467. Washington D.C. V. 1.-1949; V. 2. 1952; V. 3. 1958.
- Murray R.L.* Nuclear Reactor Physics. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. N.J. 1957.
- Ozisik M.N., Menning J., Hald W.* Half-range moment method for solution of the transport equation in a spherically symmetric geometry // *JSRT*. 1975. V. 15. № 12. P. 1101 – 1106.
- Park Ch.* Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics. Wiley-Interscience Publication. J. Wiley & Sons. New York. 1990.
- Placzek G.* On the Theory of the Slowing Down of Neutrons in Heavy Substances // *Phys. Rev.* 1946. V. 69. P. 9 – 10, P. 423.

- Plass G.N.* The Influence of the 9.6 μ Ozone Band on the Atmospheric Infra-Red Cooling Rate // *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* 1956. Vol.82. P.30.
- Plass G.* Radiation from nonisothermal gases // *Appl.Opt.* 1967. V.6. №11. P.1995–1999.
- Plass G.* Useful representations for measurements of spectral band absorption // *J. of the Opt. Soc. of America.* 1960. V.50. №9. P.868–875.
- Plass G.N.* Models for Spectral Band Absorption // *J. Opt. Soc. Amer.* 1958 V.48. P.690.
- Plastinin Yu.A., Karabadzhak G., Khmelinin B., Baula G., Rodionov A.* Ultra-violet, Visible and Infrared Spectra Modeling for Solid and Liquid-fuel Rocket Exhausts // *AIAA Paper №2001-0660.* 2001. P.15.
- Pomraning G.C.* An Extension of the Eddington Approximation // *JQSRT,* 1969. V.9. P.407–422.
- Pomraning G.C.* An improved tree-surface boundary condition for the P_3 approximation // *Nucl. Sci. Eng.* 1964. V.18. №4. P.528–530.
- Pomraning G.C.* The Equations of Radiation Hydrodynamics. Oxford, New York: Pergamon Press, 1973.
- Reardon J.E.* Prediction of radiation from rocket exhaust gases // *AIAA 5-th Thermophysics Conference.* Los Angeles. June 29, 1970. *AIAA Paper* 70-841.
- Rizzi A.W., Inouye, W.* Time split finite volume method for three-dimensional blunt-body flows // *AIAA Journal.* 1973. V.11. P.1478–1485.
- Rodgers C.D., Williams W.* Integrated absorption of a spectral line with the Voigt profile // *JQSRT.* 1974. V.14. №4. P.319–323.
- Rosseland S.* Theoretical Astrophysics, Oxford University Press, London, 1936.
- Rothman L.S., Gamache R.R., Tipping R.H. et al.* The HITRAN Molecular Database: Editions of 1991 and 1992 // *JQSRT.* 1992. V.48. №5/6. P.469.
- Sampson D.H.* Choice of an Appropriate Mean Absorption Coefficient for Use in the General Grey Equations // *JQSRT.* 1965. V.5. №1. P.211–225.
- Sampson D.H., Marton R.T.* On a Semi-Grey Approximation to Non-Grey Radiative Transfer // *JQSRT.* 1972. V.12. №10. P.1389–1408.
- Schiff D., Ziering S.* // *Nucl. Sci. Engng.* 1960. V.7. №2. P.172.
- Schluter D.* Die emissionskontinua thermischer edelgasplasmen // *Zeitschrift fur Physik.* 1968. Band 210. Heft 1. P.80–91.
- Schuster A.* Radiation Through a Foggy Atmosphere // *Astrophys. J.* 1905. V.21. P.1–22.
- Schwarzschild K.* Uber das Gleichgewicht der Sonneatmosphäre // *Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. Nachr.* 1906. V.1. P.41–53.

- Sherman M.P.* Moment methods in radiative transfer problem // JQSRT. 1967. V. 7. № 1. P. 89 – 109.
- Simmons F.S.* Band model for nonisothermal radiating gases // Appl. Opt. 1966. V. 5. № 11. P. 1801 – 1811.
- Simmons F.S.* Radiances and equivalent widths of Lorentz line for nonisothermal paths // JQSRT. 1967. V. 7. № 1. P. 111 – 121.
- Simmons F.S.* Rocket Exhaust Plume Phenomenology. The Aerospace Press. El Segundo, California. 2000. 236 p.
- Simmons F.S., Arnold C.B., Lindquist G.H. et al.* Calculation of radiation from hot H₂O and CO₂, viewed through a cool intervening atmosphere // Appl. Opt. 1970. V. 9. № 12. P. 2792 – 2793.
- Staylor W.F.* Determination of stack plume properties from satellite imagery // J. Spacecraft. 1978. V. 15. № 2. P. 92 – 99.
- Surzhikov S.T.* Calculation of the radiation flux divergence near the region of local heat release by quadrupole method. Radiative Transfer – 1, Ed. M. Pinar Menguc. Begell House, Inc., New York. 1996. P. 92 – 106.
- Surzhikov S.T.* Computing System For Solving Radiative Gasdynamic Problems of Entry and Re-Entry Space Vehicles // Proc. Int. Workshop “Planetary Probe Atmospheric Entry and Descent Trajectory Analysis and Science”, Lisbon, Portugal, 6–9 October, 2003. ESA SP-544. 2004 c. P. 111 – 117.
- Surzhikov S.T.* Database of Atomic Lines for Radiative Gas Dynamics // AIAA Paper 2002-2898, 2002 (a), 48 p.
- Surzhikov S.T.* Direct Simulation Monte-Carlo Algorithms for the Rocket Exhaust Plumes Emissivity Prediction // AIAA Paper 2002-0795. 2002 (b). 11p.
- Surzhikov S.T.* Spectral and Narrow Band Directional Emissivity of Light-Scattering and Non-Scattering Volumes // AIAA Paper 2002-3324. 2002 (c). P. 21.
- Surzhikov S.T.* Monte-Carlo Simulation of Plumes Spectral Emission // AIAA Paper 2003-3895. 2003. 11 p.
- Surzhikov S.T.* Numerical Simulation of Heat Radiation Generated by Entering Space Vehicle // AIAA Paper 2004-2379, Portland, Oregon, 2004 (a). 11 p.
- Surzhikov S.T.* Prediction of 3D Rocket Exhaust Plume Signatures by the Monte-Carlo Method // AIAA Paper 04-1354. 2004 (b). 24 p.
- Surzhikov S.T., Gorelov V.A., Kireev A.Yu.* Determination of Trajectory Parameters and Some Parameters of Planetary Atmospheres by Means of Spectral Heat Radiation Generated by Entering Space Vehicle // Proc. Int. Workshop “Planetary Probe Atmospheric Entry and Descent Trajectory

- Analysis and Science", Lisbon, Portugal, 6–9 October 2003. ESA SP-544. 2004. P. 93 – 100.
- Surzhikov S.T., Howell J.R.* Monte-Carlo Simulation of Radiation in Scattering Volumes with Line Structure // *J. of Thermophysics and Heat Transfer*. 1998. V. 12. №2. P. 278.
- Tang K.C., Brewster M.Q.* K-Distribution Analysis of Gas Radiation with Nongray, Emitting, Absorbing, and Anisotropic Scattering Particles // *Transactions of the ASME*. 1994. V. 116. P. 980.
- Thynell S.T.* Radiation due to CO₂ or H₂O and Particles in Cylindrical Media // *J. Thermophysics*. 1990. V. 4. №4. P. 436.
- Tien C.L., Lowder J.E.* A correlation for total band absorptance of radiating gases // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 1966. V. 9. №7. P. 698 – 701.
- Traugoff S.C.* On Grey Absorption Coefficient in Radiative Transfer // *JQSRT*. 1968. V. 8. №3. P. 971 – 999.
- van de Hulst H.C.* Theory of Absorption Lines in the Atmosphere of the Earth // *Ann. D'Astrophys*. 1945. Vol. 8. P.21.
- Weinberg A.M., Wigner E.P.* The Physical Theory of Neutron Chain Reactions. The University of Chicago Press. Chicago. IL. 1958.
- Weiner M.M., Edwards D.K.* Non-isothermal gas radiation in superposed vibration-rotation bands // *JQSRT*. 1968. V. 8. №5. P. 1171 – 1183.
- Weiner M.M., Edwards D.K.* Teoretical expression of Water vapor spectral emissivity with allowance for line structure // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 1968. V. 11. №1. P. 55 – 65.
- Wick G.C.* Uber Ebene Diffusionsprobleme // *Z. Phys*. 1943. V. 121. P. 702.
- Wiese W.L., Smith M.W., Glennon B.M.* Atomic transition probabilities. National Standard Reference Data Series. National Bureau of Standards 4. 1966. V. 1; 1969. V. 2.
- Wilson K.H., Greif R.* The separability approximation in non-homogeneous gases // *JQSRT*. 1971. V. 11. №8. P. 1245 – 1263.
- Wilson K.H., Nicolet W.E.* Spectral absorption coefficients of carbon, nitrogen and oxygen atoms // *JQSRT*. 1967. V. 7. №6. P. 891 – 941.
- Wyett P.J., Stull V.R., Plass G.N.* Quasi-Random Model of Band Absorption // *J. Opt. Soc. Amer*. 1962 V. 52. P. 1209.
- Yamamoto G., Aida M.* Transmission in a non-homogeneous atmosphere with an absorbing gas of constant mixing ratio // *JQSRT*. 1970. V. 10. №6. P. 593 – 608.
- Young S.J.* Band model formulation for inhomogeneous optical paths // *JQSRT*. 1975. V. 15. №6. P. 483 – 501.
- Yvon J.* // *J. Nucl. Energy*. 1957. V. 4. №3. P. 305.
- Ziering S., Schiff D.* // *Nucl. Sci. Engng*. 1958. V. 3. №6. P. 635.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютно прозрачная поверхность 46
Абсолютно черное тело 34
Алгоритм квазислучайной выборки 250
Альbedo однократного рассеяния 22
Аналитические итерационные методы 271
- Белая поверхность 46
- Вектор плотности потока излучения 20
Вектор Умова – Пойнтинга 18
Вероятность выживания кванта 22
Вероятность вынужденного излучения 83
Вероятность вынужденного поглощения 83
Волновое число 30
Вращательные полосы 94
- Гармонические функции 148
Гибридный метод статистического моделирования 467
Граничные условия Марка 180
Граничные условия Маршака 181
Групповая модель 329, 342
Групповая обобщенная статистическая модель 403
Групповые функции 31
- Давление излучения 21
Дельта-рассеяние 290
Дисперсионная форма линии 354
Диффузионное приближение 132
Диффузно-отражающая поверхность 26
Длина волны 30
Доплеровская полуширина 353
- Задача Милна 71
Закон Бера 43
Закон Бугера 42
Закон Бугера – Ламберта 43
Закон Вина 39

- Закон квадратного корня 396
Закон Кирхгофа 40
Закон Ламберта 42
Закон Рэлея – Джинса 39
Закон смещения Вина 39
Закон Стефана – Больцмана 37
Зеркально-отражающая поверхность 26
- Изотропно рассеивающая среда 76
Индикатриса отражения 25
Индикатриса пропускания 79
Индикатриса рассеяния 23
Интегральная излучательная способность 324
Интегральное уравнение переноса излучения 70
Интегральные характеристики 31
Интенсивность излучения абсолютно черного тела 34
Интенсивность излучения 17
Интенсивность отраженного излучения 25
Интенсивность эффективного излучения 28
- Квадратурные весовые коэффициенты 224
Квазидиффузионный метод Гольдина 359
Квазиспектральная модель 320
Квазистационарное приближение 49
Колесательно-вращательные полосы 94
Комбинированная оптическая модель 321
Конечно-разностная схема Самарского 236
Конечно-разностный тип сетки 193
Конечно-элементный тип сетки 193
Консервативная расчетная схема 192
Консервативный метод характеристик с интерполяцией 239
Коэффициент квазидиффузии 360
Коэффициент радиационной теплопроводности 324
Коэффициент Эйнштейна спонтанного излучения 83
Кумулятивная функция 286
- Линейно-анизотропное рассеяние 151
Линейный закон поглощения 396
Линейчатый спектр 94
Локальное термодинамическое равновесие (ЛТР) 47
Лоренцевская полуширина 353
- Макростатистическая модель 432
Метод Анфимова – Шари 370

- Метод группового усреднения 349
Метод дискретных направлений (МДН) 247
Метод дискретных ординат (МДО) 223
Метод квадромоментов 272
Метод Кертиса – Годсона 404
Метод конечного объема центрированный в узлах 194
Метод конечного объема центрированный в ячейке 194
Метод конечного объема 190
Метод максимального сечения 89
Метод моментов 140
Метод нелокальных интегральных характеристик 383
Метод полумоментов 260
Метод последовательных приближений 264
Метод потоковой квазидиффузии 364
Метод разделения переменных Шмыглевского 340
Метод усредненных коэффициентов
линейчатого поглощения 475
Метод усредненных парциальных характеристик 378
Метод усредненных уравнений переноса Немчинова 374
Метод характеристик с интерполяцией 237
Метод характеристик 235
Метод Шварцшильда – Шустера 128
Метод Эддингтона 137
Метод эквивалентного излучающего объема 145
Метод эффективных квадромоментных характеристик 392
Метод эффективных полумоментных характеристик 390
Метод эффективных сечений 386
Методы Лебегова усреднения 341
Многогрупповой квазидиффузионный метод 366
Моделирование длины свободного пробега 294
Модель радиационного переноса 94
Модель разделяющихся переменных
в коэффициенте поглощения 339
Модель серой среды 343
Модель состояния среды 93
Модель частотола 342
Моментная процедура 157
Моментный метод Кривцова 341
Направленная степень черноты 27
Направленно-полусферическая отражательная способность 25
Направленно-полусферическая поглощательная способность 26

- Неконсервативная расчетная схема 192
Непрозрачная поверхность 26
Неструктурированная сетка 193
- Обобщенная статистическая модель Гуди 402
Объемная плотность энергии излучения 20
Объемный излучатель 124
Объемный коэффициент излучения 24
Объемный коэффициент ослабления 22
Объемный коэффициент поглощения 21
Объемный коэффициент рассеяния 22
Оптическая модель среды 93, 318
Оптически толстый слой 105
Оптически тонкая среда 53
Оптически тонкий слой 105
Оценка случайной величины 309
- Плотность одностороннего потока излучения 20
Плотность полного потока излучения 20
Плотность потока эффективного излучения 29
Поверхностная плотность потока излучения
абсолютно черного тела 37
- Полинейчатая модель 330
Полиномы Лежандра 148
Полная спектральная область 342
Полусферическая отражательная способность 26
Полусферическая поглощательная способность 27
Полусферическая степень черноты 28
Полусферически-направленная отражательная способность 25
Приближение когерентного рассеяния 50
Приближение Милна – Эддингтона 338
Приближение объемного высвечивания 53
Приближение полного перераспределения по частотам 90
Приближение Росселанда 107
Приближение сильной линии 397
Приближение слабой линии 397
Приближения предельных оптических толщин 106
Принцип детального равновесия 34
Присоединенные полиномы Лежандра 157
Простая статистическая модель Гуди 402
- Равновесное излучение 33
Радиационная модель среды 323

- Реабсорбция 106
Розыгрыш длины свободного пробега 281
Розыгрыш столкновений 296
Свободно-свободные квантовые переходы 97
Свободно-связанные квантовые переходы 97
Связанно-свободные квантовые переходы 97
Связанно-связанные квантовые переходы 96
Синтетический спектр 417
Скорость квантовых переходов 84
Собственная излучательная способность единицы объема 24
Спектральная группа 31
Спектральная функция источников в линии 91
Спектральная функция источников излучения 51
Спектральная функция профиля испускания 86
Спектральная функция профиля поглощения 86
Спектральное сечение излучения 88
Спектральное сечение поглощения 88
Спектральные характеристики 30
Спектральный диапазон 31
Спектральный объемный коэффициент поглощения
с поправкой на вынужденное излучение 90
Спектроэнергетические характеристики 280
Сплошной спектр 97
Среднепланковский коэффициент поглощения 324
Среднеросселандовская длина свободного пробега фотонов 324
Среднеросселандовский коэффициент поглощения 324
Средний коэффициент по Chandrasekharу 326
Средняя поглощательная способность 412
Средняя эквивалентная ширина 417
Статистический принцип Гуди 401
Степень черноты поверхности 27
Степень черноты полусферического однородного объема 55
Структурированная сетка 193
Ступенчатая модель 330
Сферические гармоники 148
Тензорное приближение 259
Термодинамическое равновесие 33
Тормозное излучение 98
Транспортное приближение рассеяния 140, 261
Уравнение Милна 73

- Условие нормировки индикатрисы рассеяния 23
- Феноменологический объемный
спектральный коэффициент излучения 89
- Феноменологический объемный
спектральный коэффициент поглощения 89
- Феноменологическое спектральное
дифференциальное сечение излучения 88
- Феноменологическое спектральное
дифференциальное сечение поглощения 88
- Феноменологическое уравнение переноса 76
- Фойгтовская полуширина 353
- Формальное решение уравнения переноса излучения 53
- Функция излучения второго рода 38
- Функция излучения первого рода 38
- Функция источников тепловыделения в среде 52
- Функция Планка 34
- Функция распределения фотонного газа 18
- Функции излучения абсолютно черного тела 37
- Характеристические координаты 237
- Циклическая частота 30
- Частота колебаний электромагнитного излучения 30
- Эквивалентная ширина 395
- Электронные полосы 94
- Яркость 124
- DP_n -метод 259
- DS_n -метод 245
- LBL-метод с малым числом моделируемых траекторий 476
- LBL-статистическое моделирование 466
- Line by line* (LBL) модель 330, 349
- Ray-Tracing метод 247
- S_n -метод 241

Научное издание

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Суржиков Сергей Тимофеевич

**Тепловое излучение
газов и плазмы**

В авторской редакции

Художник *Н.Г. Столярова*

Компьютерная верстка *Т.А. Суржиковой*

Подписано в печать 30.12.2004.

Формат 60×90/16. Печать офсетная. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 34. Уч.-изд. л. 33,5.

Тираж 300 экз. Заказ № 272

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. 105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано с оригинал-макета в типографии ГП «Облиздат».
248640, Калуга, пл. Старый торг, 5.
